

اشتقاقية دالة

1. مشتقة دالة عند عدد

نسبة تغير دالة

لتكن الدالة f المعرفة على المجال I وليكن x_B و x_A عنصران مختلفان من I . نسبة تغير الدالة f بين A و B هو النسبة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

نرمز لنسبة تغير الدالة f بين A و B عادة بالرمز $\tau_{[A,B]}$

$$\tau_{[A,B]} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

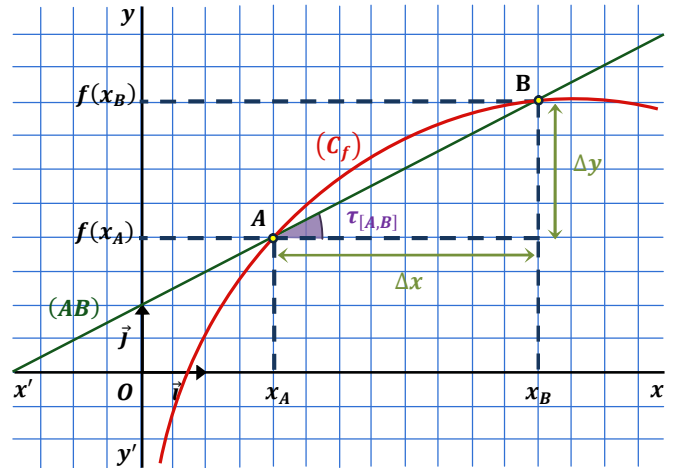
السرعة المتوسطة

تمثل نسبة تغير الدالة f بين A و B السرعة المتوسطة لـ f بين الفاصلتين x_A و x_B . فإذا كانت f فاصلة متحرك ما فان سرعته المتوسطة بين اللحظتين t_1 و t_2 من x_A الى x_B هي:

$$V_{moy} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_2 - t_1}$$

التفسير البياني

إذا كانت f دالة و (C_f) تمثيلها البياني حيث A و B نقطتان متميزتان من (C_f) احدائيهما $(x_A, f(x_A))$ و $(x_B, f(x_B))$ على الترتيب فان نسبة التغير $\tau_{[A,B]}$ للدالة f بين A و B تمثل معامل توجيه المستقيم (AB) .



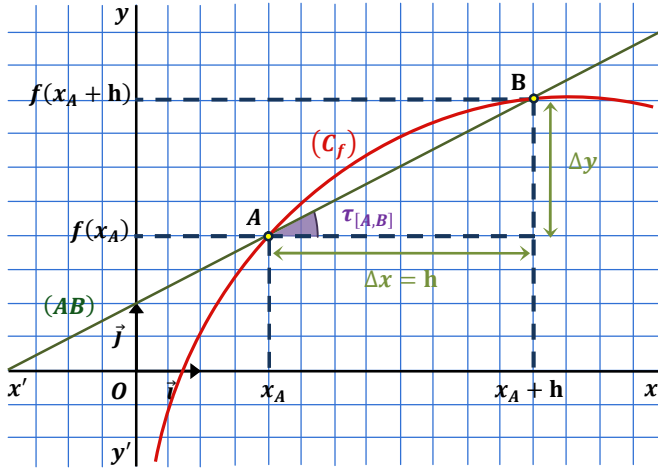
نتيجة

- إذا كانت الدالة f متزايدة على المجال $[a, b]$ فان نسبة تزايدها بين a و b موجبة و العكس ليس بالضرورة صحيح.
- إذا كانت الدالة f متناقصة على المجال $[a, b]$ فان نسبة تزايدها بين a و b سالبة و العكس ليس بالضرورة صحيح.
- إذا كانت الدالة f ثابتة على المجال $[a, b]$ فان نسبة تزايدها بين a و b معدومة و العكس ليس بالضرورة صحيح.

الصيغة الثانية

بوضع $x_B - x_A = h$ نجد $x_B = h + x_A$ حيث h عدد حقيقي غير معدوم تصبح نسبة تغير الدالة f بين A و B :

$$\tau_{[A,B]} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{h}$$

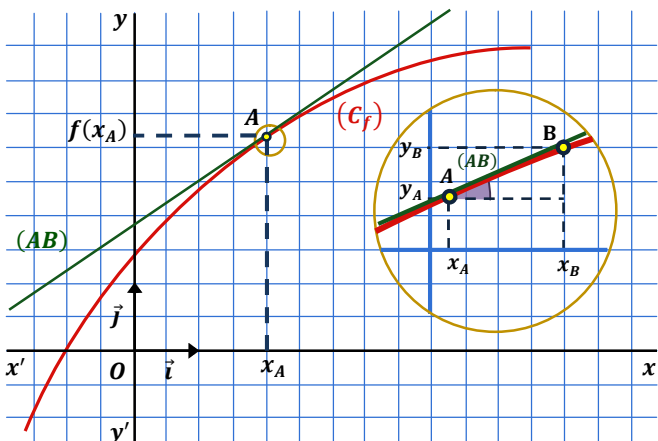


الوسار العنصري

بما أن أصغر مسافة هي المسافة بين عددين حقيقيين متتاليين فان أصغر جزء من منحنى هو قطعة مستقيمة فإذا كان x_B هو العدد الذي يلي x_A مباشرة فان نسبة التغير بين A و B تصبح هي نفسها ميل القطعة المستقيمة $[AB]$ فينطبق المستقيم (AB) على القطعة المستقيمة $[AB]$.

وبما أنه لا يمكن معرفة العدد الحقيقي الذي يلي العدد x_A مباشرة فاننا نأخذ العدد x_B الذي يقترب بالقدر الكافي من x_A أي الذي يؤول الى x_A وبالتالي لن ينطبق المستقيم (AB) على القطعة المستقيمة $[AB]$ و انما سيصبح مماسيا لمنحنى f عند x_A . اذن معادلة المماس (AB) عند x_A هي:

$$\lim_{x_B \rightarrow x_A} \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$



تطبيق 1

أثبت أن الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند x_0 ثم فسر النتيجة هندسياً :

$$1) f(x) = x^2 - 3x + 5 \quad x_0 = 2$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \quad x_0 = -3$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} \quad x_0 = 0$$

التقريب التآفي

f دالة معرفة على مجال مفتوح I . (C_f) منحنيتها البياني تعد معادلة المماس عند العدد x_0 أحسن تقريب تآفي للدالة f لأن معادلة المنحني (C_f) تؤول الى معادلة المماس (T) كلما كانت قيمة x قريبة بالقدر الكافي من x_0 أي كلما كانت قيمة h قريبة من الصفر بالقدر الكافي

• الصيغة الأولى :

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي x_0 ينتمي الى I فإن :

$$f(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0) \cdot \varepsilon(x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0 \text{ حيث } \varepsilon \text{ تسمى الباقي حيث}$$

نتحصل على التقريب التآفي للدالة f باهمال الباقي ε . ونكتب : $f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ ، ويسمى العدد $f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ التقريب التآفي لـ f عند x_0

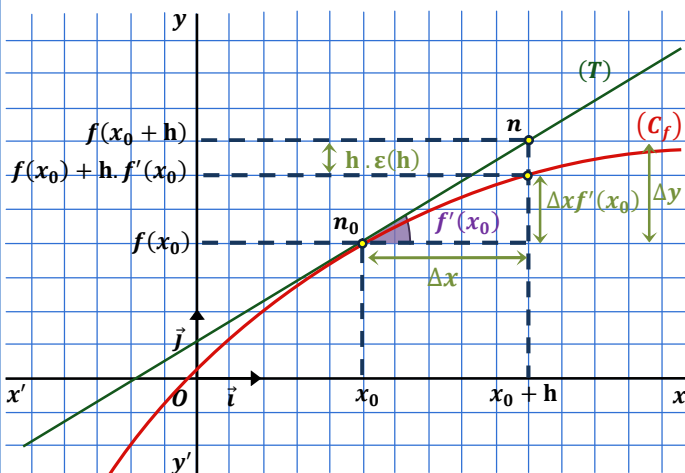
• الصيغة الثانية :

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث h ينتمي الى I فإن :

$$f(x_0 + h) = h \cdot f'(x_0) + f(x_0) + h \cdot \varepsilon(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ حيث } \varepsilon \text{ تسمى الباقي حيث}$$

نتحصل على التقريب التآفي للدالة f باهمال الباقي ε . ونكتب : $f(x_0 + h) \approx h \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ ، ويسمى العدد $h \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ التقريب التآفي لـ f عند x_0



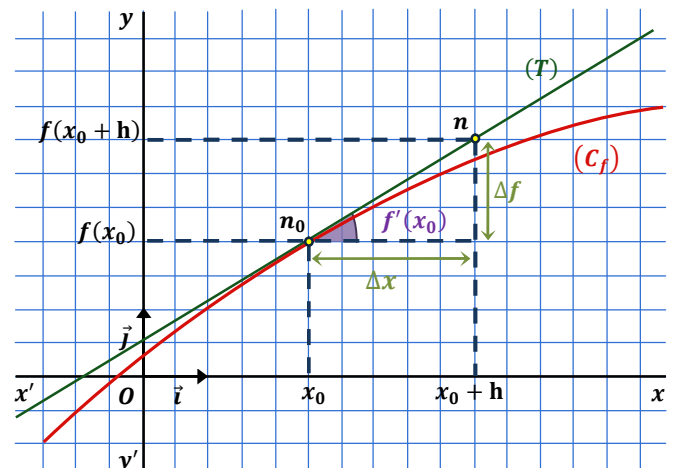
الصيغة الثانية

بوضع $x_b = h + x_a$ نجد $x_b - x_a = h$ حيث h عدد حقيقي غير معدوم يصبح العدد المشتق :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

و تصبح معادلة المماس :

$$(T): y = f'(x_0) \cdot (h) + f(x_0)$$



العدد المشتق

لتكن الدالة f المعرفة على المجال I وليكن x_0 عنصر من I . نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا قبلت نسبة تزايد f نهاية عند x_0 أي إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

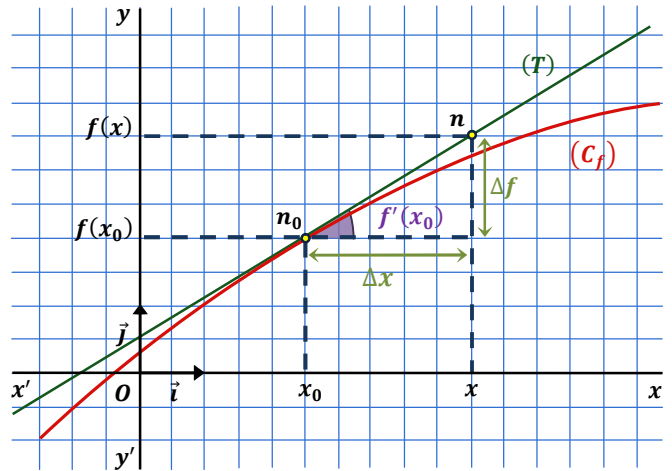
حيث L عدد حقيقي ثابت يختلف عن $\pm\infty$. يسمى L بالعدد المشتق ويرمز له $f'(x_0)$ ونكتب إذن :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

التفسير البياني

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن منحنيتها البياني يقبل عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ مماساً (T) ميله (معامل توجيهه) هو العدد المشتق $f'(x_0)$ ومعادلته :

$$(T): y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



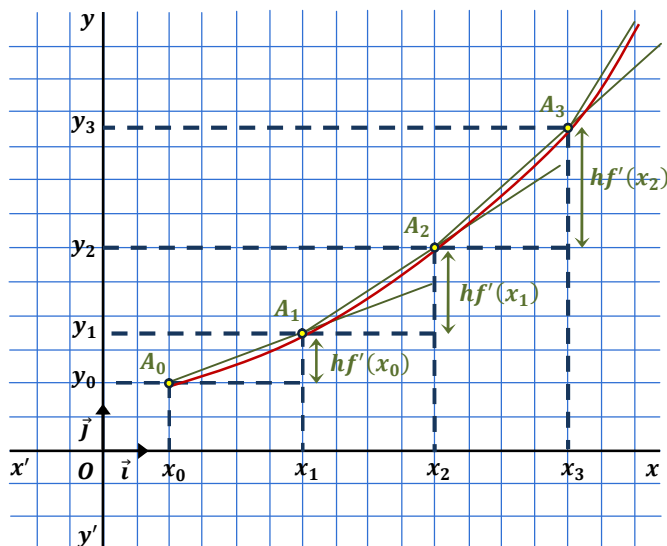
طريقة أولر

تسمح لنا طريقة أولر من انشاء تمثيل بياني تقريبي للدالة f عندما لا تتوفر لدينا عبارة $f(x)$ بمعرفة $f'(x_0)$ و $f(x_0)$. تتركز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من الصفر لدينا:

$$f(x_0 + h) \approx h \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

انطلاقاً من النقطة $A_0(x_0; y_0)$ بحيث $f'(x_0) \neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1; y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ التي تنتمي الى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ و المار من A_0 و بالتالي: $y_1 = h \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ و بما أن $(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ من أجل h قريب من الصفر فان النقطة $A_1(x_1; y_1)$ قريب من (C_f) منحنى f .

بنفس الطريقة يمكن انشاء، انطلاقاً من النقطة A_1 ، النقطة $A_2(x_2; y_2)$ وهكذا يمكن على التوالي انشاء النقط $A_n(x_n; y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = h \cdot f'(x_{n-1}) + f(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$. يربط النقط $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. و نحصل على أكثر دقة كلما كان h أقرب الى 0.



تطبيق 5

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(x) = 3x^2 \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(1) باستعمال طريقة أولر عين قيمة مقربة لـ $f(1, 1)$ ثم $f(1, 2)$.

(2) أثبت أن الدالة $x \rightarrow x^3$ هي الدالة f ثم قارن القيمة المقربة لـ $f(1, 2)$ الموجودة في السؤال السابق مع القيمة الحقيقية لـ $f(1, 2)$.

تطبيق 2

(1) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(2+h)^2$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد:

$$(2, 04)^2, (1, 98)^2, (2, 001)^2$$

(2) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(1+h)^3$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد:

$$(0, 96)^3, (1, 04)^3$$

(3) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\frac{1}{3+h}$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد:

$$\frac{1}{3,1}, \frac{1}{2,99}, \frac{1}{3,02}$$

(4) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{5+h}$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد:

$$\sqrt{4,83}, \sqrt{4,97}, \sqrt{5,01}$$

(5) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right)$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد:

$$\sin\left(\frac{47\pi}{240}\right), \sin\left(\frac{27\pi}{150}\right)$$

تطبيق 3

عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{1+h}$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد:

$$\sqrt{86}, \sqrt{177}, \sqrt{125}$$

تطبيق 4

(1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2/3\}$ بـ: $f(x) = \frac{3x-1}{2-3x}$

(a) أحسب العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة $x_0 = 1$.
(b) عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f(1+h)$ عندما يؤول h الى 0 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(1, 03)$ و $f(0, 998)$.

(2) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $2x^2 - 3x + 1$

(a) أحسب العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة $x_0 = -1$.
(b) عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f(-1+h)$ عندما يؤول h الى 0 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(-1, 02)$ و $f(-0, 97)$.

(3) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $\sqrt{1+x}$

(c) أحسب العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة $x_0 = 2$.
(d) عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f(2+h)$ عندما يؤول h الى 0 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(2, 005)$ و $f(1, 994)$.

تطبيق 6

نقبل أنه توجد دالة f تحقق العلاقة:

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(x) = 1/2f(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(1) أحسب $f'(0)$.

(2) أوجد قيمة تقريبية لـ $f(0, 1)$ ثم $f'(0, 1)$ وأخيرا $f(0, 2)$.

السرعة اللحظية

يمثل العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة x_0 السرعة اللحظية لـ f عند الفاصلة x_0 . فإذا كانت f فاصلة متحرك ما فان سرعته اللحظية عند اللحظة t_0 هي:

$$V(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

قابلية الاشتقاق من اليمين

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من اليمين عند x_0 إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \quad \text{حيث } L \text{ ثابت}$$

قابلية الاشتقاق من اليسار

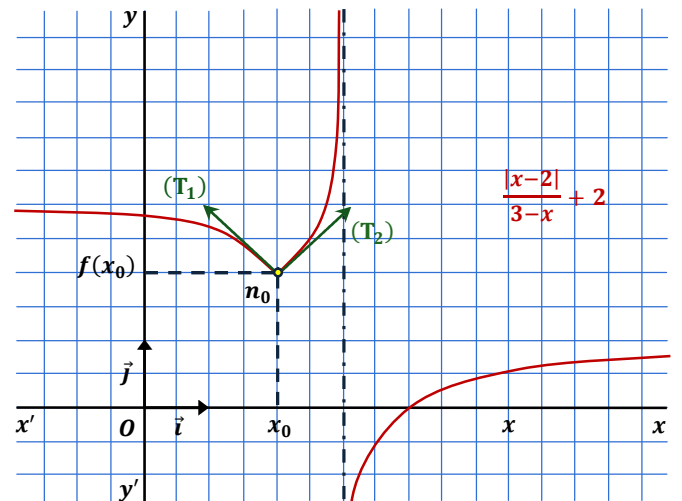
تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \quad \text{حيث } L \text{ ثابت}$$

النقطة الزاوية

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L_2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L_1$$

حيث $L_1 \neq L_2$ فان بيان الدالة f يقبل عند النقطة $n_0(x_0, f(x_0))$ نصفي مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما L_1 و L_2 والنقطة x_0 تسمى نقطة زاوية.



ملاحظة

- إذا كان $L > 0$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأعلى
- إذا كان $L < 0$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأسفل

تطبيق 7

أدرس قابلية اشتقاق الدالة عند x_0 وماذا تستنتج؟

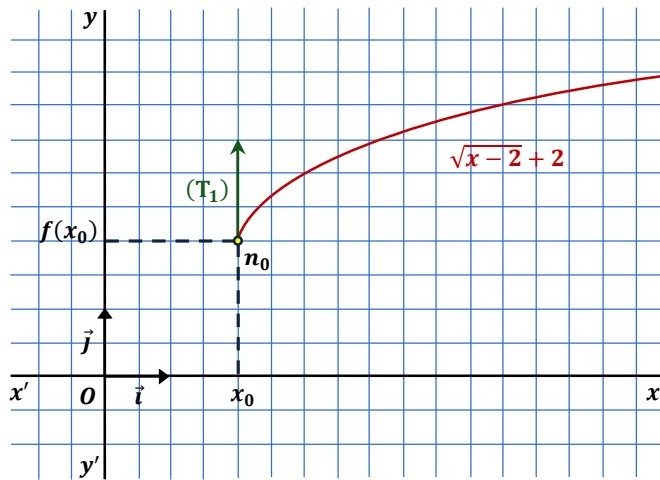
$$1) f(x) = \frac{1+|x|}{1+x^2} \quad x_0 = 0$$

$$2) f(x) = \frac{|x-1|}{x-2} \quad x_0 = 1$$

$$3) f(x) = |x^2 - x - 6| \quad x_0 = -2$$

نقطة التوقف

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ فان بيان الدالة f يقبل عند النقطة $(n_0(x_0, f(x_0)))$ نصف مماس موازي لمحور الترتيب و النقطة n_0 تسمى نقطة توقف.



ملاحظة

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأعلى
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأسفل

تطبيق 8

أدرس قابلية اشتقاق الدالة عند x_0 وماذا تستنتج؟

$$1) f(x) = 3 + \sqrt{2-x} \quad x_0 = 2^-$$

$$2) f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \quad x_0 = 1^+$$

$$3) f(x) = \sqrt{|2x^2 - 3x + 1|} \quad x_0 = 1$$

نتيجة

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

2. مشتقة دالة على مجال

الدالة المشتقة

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I من R إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x_0 من I نسمي الدالة التي ترفق، من أجل كل عدد حقيقي x من I العدد المشتق $f'(x)$ المشتقة للدالة f على D_f ويرمز لها بـ f' ونكتب:

$$f' : \begin{cases} x \longrightarrow f'(x) \\ I \longrightarrow R \end{cases}$$

مشتقات الدوال المألوفة

الدالة	دالتها المشتقة	مجال الاشتقاق
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \in R^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \in R^*$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0, +\infty[$
$a \cdot x^n$	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$	$x \in R$
$a \cdot x + b$	a	$x \in R$
a	0	/
$\sin x$	$\cos x$	$x \in R$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in R$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
$\cotan x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \in R - \{k\pi\}$

مشتق مجموع دالتين

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f + g$ قابلة للاشتقاق على I حيث:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

مشتق جداء دالتين

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f \times g$ قابلة للاشتقاق على I حيث:

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

مشتق جداء دالة و عدد

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و k عدد حقيقي فإن الدالة $k \times f$ قابلة للاشتقاق على I حيث:

$$(k \times f)'(x) = k \times f'(x)$$

مشتق حاصل قسوة دالتين

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I مع $g \neq 0$ فإن الدالة f/g قابلة للاشتقاق على I حيث:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{[g(x)]^2}$$

مشتق مقلوب دالة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I مع $f \neq 0$ فإن الدالة $1/f$ قابلة للاشتقاق على I حيث:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مشتق مركب دالتين

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$ فإن الدالة $f \circ g$ قابلة للاشتقاق على I حيث

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

نتيجة

الدالة	دالتها المشتقة	مجال الاشتقاق
$\frac{1}{f^n(x)}$	$-\frac{n \cdot f'(x)}{f^{n+1}(x)}$	$f(x) \neq 0$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$f(x) > 0$
$f^n(x)$	$n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$	$f(x) \in R$
$f(ax + b)$	$a \cdot f'(ax + b)$	$x \in R$
$\sin[f(x)]$	$f'(x) \cdot \cos(f(x))$	$x \in R$
$\cos[f(x)]$	$-f'(x) \cdot \sin(f(x))$	$x \in R$
$\tan[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cotan[f(x)]$	$\frac{-f'(x)}{\sin^2(f(x))}$	$f(x) \neq \{k\pi\}$

نظريات

- الدوال كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على R .
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.
- الدوال الصماء قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.
- الدوال المثلثية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.
- عموماً فإن الدوال المرجعية و الدوال المركبة من دوال مرجعية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.

تطبيق 9

أحسب مشتقات الدوال التالية :

- 1) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x$
- 2) $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^3$
- 3) $f(x) = \frac{2x-3}{3x^2-2} + \frac{x^2-1}{x^2+3}$
- 4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
- 5) $f(x) = (2x - 3)\sqrt{3x + 5}$
- 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} - \frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$
- 7) $f(x) = \cos(2x - 1)$
- 8) $f(x) = \sin(-5x + 3)$
- 9) $f(x) = (\sin x) \cdot (\cos x + 1)$
- 10) $f(x) = \sin^2(5x + 3)$
- 11) $f(x) = (3x) \cdot \cos(x + 3)$
- 12) $f(x) = \frac{\sin x}{x-1} + \frac{1}{\cos x}$
- 13) $f(x) = \frac{\cos x + 1}{\sin(x+3)} + \frac{\sin x}{x}$

نتيجة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R فان f' دالتها المشتقة على المجال I . قيمة الدالة المشتقة f' عند الفاصلة x_0 من المجال I هي قيمة العدد المشتق $f'(x_0)$ الذي يمثل ميل المماس عند تلك الفاصلة.

تطبيق 10

الدالة المعرفة على R بـ :

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) أكتب معادلة لمماس (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .
- 2) عين ثلاث نقط من (C) يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$.

تطبيق 11

الدالة المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) هل توجد نقطة M من (C) يكون المماس عندها موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y = 3x - 1$.
- 2) عدد حقيقي، أكتب معادلة لمماس (C) عند الفاصلة a .
- 3) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مماسين كل منهما يشمل 0.

تطبيق 12

الدالة المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) لماذا يقبل (C) مماسا عند كل نقطة؟
- 2) حل في R المعادلة $f'(x) = 0$. فسر النتيجة بيانيا.
- 3) عين نقط من (C) يكون معامل توجيه المماس فيها يساوي 3.
- 4) ليكن (D) مستقيم معادلته $y = ax + b$. ناقش حسب قيم a وجود نقط من (C) يكون المماس فيها موازيا لـ (D).

تطبيق 13

اعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$$

أثبت أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل ثلاث مماسات تمر بالنقطة $A(3/2, 7/2)$

تطبيق 14

الدالة المعرفة على $R - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \frac{ax-1}{x+2}$

a وسيط حقيقي. (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

عين a حتى يكون معامل توجيه مماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها -1 هو -3

تطبيق 15

الدالة المعرفة على R بـ : $f(x) = \frac{3x^2+ax+\beta}{x^2+1}$

حيث β , عدنان حقيقيان. (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

عين قيمة α, β حتى يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 4x + 3$ مماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

تطبيق 16

الدالة المعرفة على R بـ :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

عين قيمة a, b, c بحيث يقبل المنحنى (C) مماسا أفقيا عند الفاصلة 1 و مماسا معامل توجيهه -2 عند النقطة $(-2, -5)$

تطبيق 17

الدالة المعرفة على R بـ :

$$f(x) = mx^3 - x^2 + 3$$

حيث m وسيط حقيقي. (C) المنحنى الممثل للدالة f في

المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد مماسات المنحنى (C) التي معامل توجيهها معدوم.

تطبيق 18

الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ بـ :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية. (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

عين قيمة a, b, c بحيث يقبل المنحنى (C) عند النقطة $(2, 6)$ مماسا أفقيا وعند النقطة ذات الفاصلة 3 مماسا

موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = 3x + 1$

3. تطبيقات الاشتقاقية

اتجاه تغير دالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R و f' دالتها المشتقة

- إذا كانت $f'(x) > 0$ على المجال I فإن f متزايدة تماما على I
- إذا كانت $f'(x) < 0$ على المجال I فإن f متناقصة تماما على I
- إذا كانت $f'(x) = 0$ على المجال I فإن f ثابتة على I

نتيجة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R و f' دالتها المشتقة

- إذا كانت f متزايدة تماما على المجال I فإن $f'(x) > 0$ على I
- إذا كانت f متناقصة تماما على المجال I فإن $f'(x) < 0$ على I
- إذا كانت f ثابتة على المجال I فإن $f'(x) = 0$ على I

تطبيق 19

أدرس اتجاه تغير الدوال التالية على مجال تعريفها:

- $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$
- $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2x + 4}$
- $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$
- $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$
- $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 13}$
- $f(x) = |x + 2| + \frac{4x}{x^2 - 4}$
- $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 2}$
- $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 4}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}$
- $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

تطبيق 20

قارن بين العددين A و B في كل حالة ممايلي:

- $A = \frac{1 - (1,4142135)^2}{1 + (1,4142135)^2}$ $B = \frac{1 - (3,14159265)^2}{1 + (3,14159265)^2}$
- $A = \frac{3,4721359}{(4,4721359)^2 + 2}$ $B = \frac{3,58257569}{(4,58257569)^2 + 2}$
- $A = \frac{(7,64575131)^2 + 3}{6,64575131}$ $B = \frac{(7,23606797)^2 + 3}{6,23606797}$

تطبيق 21

في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه:

(a) أدرس اتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها.

(b) استنتج حصرا للدالة f على المجال D .

(c) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال D .

- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ $D = [0, 1]$
- $f(x) = -2 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$ $D = [1, 2]$
- $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2x + 4}$ $D = [2, 3]$

تطبيق 22

f الدالة المعرفة على R ب: $f(x) = x^3 - 3x + 4$

- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-3, 3]$.
- (2) أرسم جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-3, 3]$.
- (3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا على $[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}]$.
- (4) عين عدد و اشارة حلول المعادلات التالية:
 $f(x) = 2$, $f(x) = 3$, $f(x) = 5$, $f(x) = 6$

تطبيق 23

f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

- أحسب الدالة المشتقة للدالة f .
- استنتج الدالة المشتقة للدوال المقترحة التالية:

- $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$
- $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}$
- $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^2$
- $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$
- $f(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$
- $f(x) = \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x - 1}$
- $f(x) = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x - 1}$

تطبيق 24

يمثل الجدول المقابل تغيرات دالة f معرفة على المجال

x	-1	0	2	4	6	8	9
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	1	0	-2	0	2	0	-1

أعط جدول تغيرات الدوال التالية:

- $f(x^2)$ (7) $f^2(x)$ (5) $f(|x|)$ (3) $1/f(x)$ (1)
- $f(x^3)$ (8) $f^3(x)$ (6) $|f(x)|$ (4) $\sqrt{f(x)}$ (2)

تطبيق 25

f الدالة المعرفة على R ب: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

- حل في R المعادلة $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة f على R ثم ارسم جدول تغيراتها على المجال $[-6, 6]$.
 - استنتج جدول تغيرات الدوال التالية:
- $f(x^2)$ (7) $f^2(x)$ (5) $f(|x|)$ (3) $1/f(x)$ (1)
 - $f(x^3)$ (8) $f^3(x)$ (6) $|f(x)|$ (4) $\sqrt{f(x)}$ (2)

نقطة الانعطاف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $[a, b]$ و x_0 عنصر من المجال $[a, b]$ و ليكن

اذا انعدمت المشتقة الثانية f'' و غيرت من اشارتها عند x_0 فان النقطة $(x_0, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C) على $[a, b]$.

ملاحظة

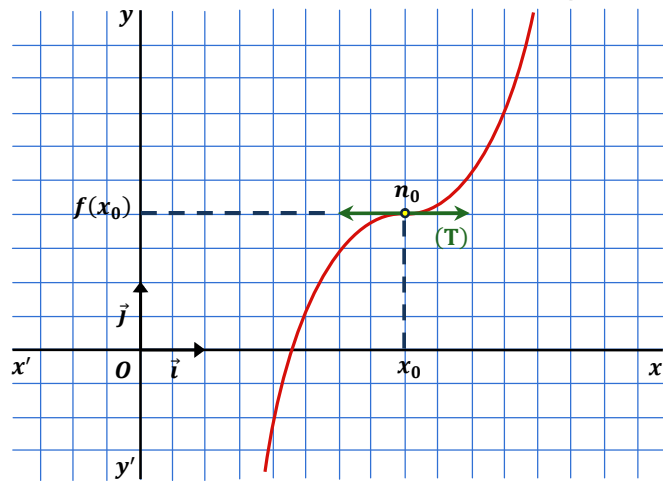
اذا كانت $f''(x_0) = 0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف عند x_0 لأن f'' قد تنعدم ولا تغير اشارتها

نظرية

اذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند x_0 و لم تغير من اشارتها فان النقطة $(x_0, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

التفسير البياني

اذا كانت n_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C) فان المماس يقطع (C) عند n_0 . جزء من المنحنى (C) يقع أسفل المماس و الجزء الآخر يقع فوق المماس.



تطبيق 28

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = x^3 - 6x - 5$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف M يطلب تعيينها.
- 2) أكتب معادلة المماس عند النقطة M ثم أدرس وضعيته بالنسبة للمنحنى (C) .

تطبيق 29

f الدالة المعرفة على R بـ: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة M ذات الاحداثيات $(-1, -2)$ ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (T) و (C) . ماذا تستنتج؟
- 2) أحسب المشتقة الأولى f' ثم أدرس اشارتها. هل يؤكد هذا الاستنتاج السابق؟

القيمة الحدية الهلوية

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $[a, b]$ و x_0 عنصر من $[a, b]$ اذا انعدمت المشتقة الأولى f' و غيرت من اشارتها عند x_0 فان $f(x_0)$ هي قيمة حدية محلية لـ f على المجال $[a, b]$.

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة و ليكن x_0 عنصرا من I .

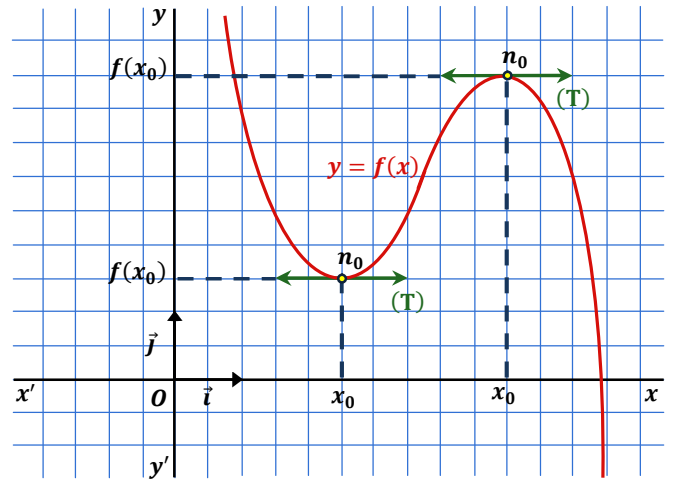
اذا قبلت الدالة f قيمة حدية محلية عند x_0 فان $f'(x_0) = 0$

ملاحظة

اذا كانت $f'(x_0) = 0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عند x_0 لأن دالتها المشتقة f' قد تنعدم ولا تغير من اشارتها.

التفسير البياني

اذا قبلت الدالة f قيمة حدية محلية صغرى أو عظمى عند x_0 فان منحنىها البياني يقبل عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ مماسا أفقيا (T) موازيا لمحور الفواصل



تطبيق 26

f_m دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث $f_m(x) = \frac{mx+x^2}{x^2-1}$

عين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث:

- 1) لا تقبل الدالة f قيمة حدية.
- 2) تقبل الدالة f قيمتين حديتين محليتين مختلفتين.

تطبيق 27

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-2}$

حيث β, α عدنان حقيقيان. (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

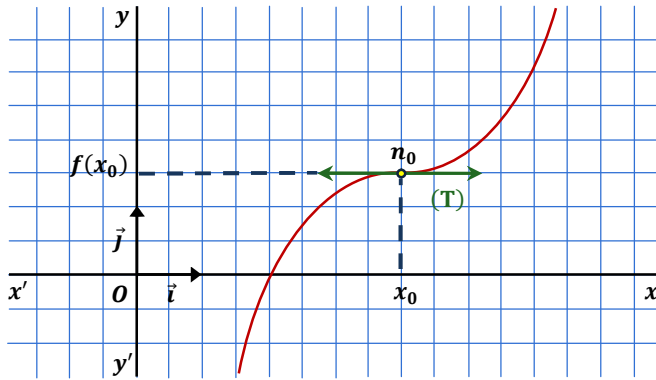
عين قيمة a, b, c بحيث يقبل المنحنى (C) قيمة حدية عظمى عند النقطة ذات الاحداثيات $(0, -1)$ و مماسا معاملا توجيهه $3 -$ عند الفاصلة 1.

وضعية الهماس عند نقطة الانعطاف

الحالة الأولى

- اذا انعدمت المشتقة الأولى f' و لم تغير من اشارتها وانعدمت المشتقة الثانية f'' و غيرت من اشارتها عند x_0 فان منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف بمماس أفقي .

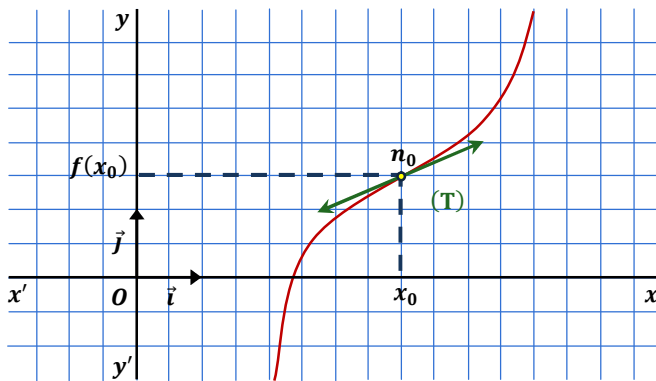
x		x_0	
f'	+	0	+
f'	-	0	-
f''	-	0	+



الحالة الثانية

- اذا لم تغير المشتقة الأولى f' من اشارتها وانعدمت المشتقة الثانية f'' و غيرت من اشارتها عند x_0 فان منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف بمماس مائل .

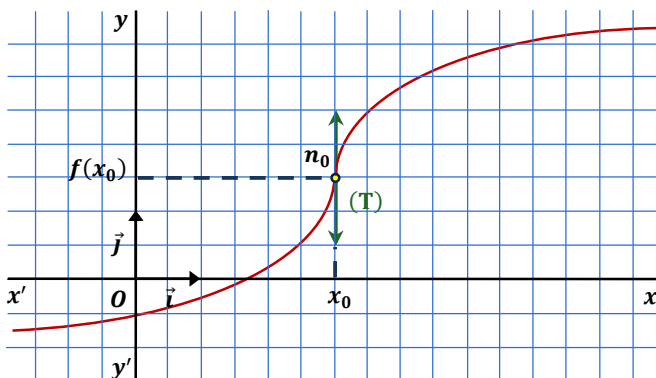
x		x_0	
f'	+	+	+
f'	-	-	-
f''	-	0	+



الحالة الثالثة

- اذا لم تغير المشتقة الأولى f' من اشارتها و غيرت المشتقة الثانية f'' من اشارتها عند x_0 وكان $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$ فان منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف بمماس عمودي .

x		x_0	
f'	+	\nexists	+
f'	-	\nexists	-
f''	-	\nexists	+



" عندها تريد بلوغ قمة جبل قوم يحسنون ترى جبل قوهك هضبة ، بل ان هضبتهم تكاد تكون بطحاء فلا تكاد تميز لهم قمة ، فهم فيما سواء كمن يعمل كمن لا يعمل : ترى الكل يسير و لا شيء يسير ، و الكل يزرع و قليل من يشبع ، و الكل يصنع و لك أن تتحسس ما أبدع ، و ان كان فلا أروع ! ، و الكل ... هجرهم الاحسان لها خذوه ففرضت عليهم الأرض عدلها بها اقترفوه فكان نعم العدل و كانوا نعم الرعية! "

خالد سايفي