2 اشتقاقيـة دالـة

1. مشتقة دالة عند عدد

نسبة تغير دالة

لتكن الدالة f المعرفة على المجال I و ليكن x_A و x_B عنصران مختلفان من I . نسبة تغيـر الدالة f بين A و B هو النسبة :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}$$

نرمز لنسبة تغير الدالة f بين A و B عادة بالرمز $\tau_{[A,B]}$

$$\tau_{[A,B]} = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}$$

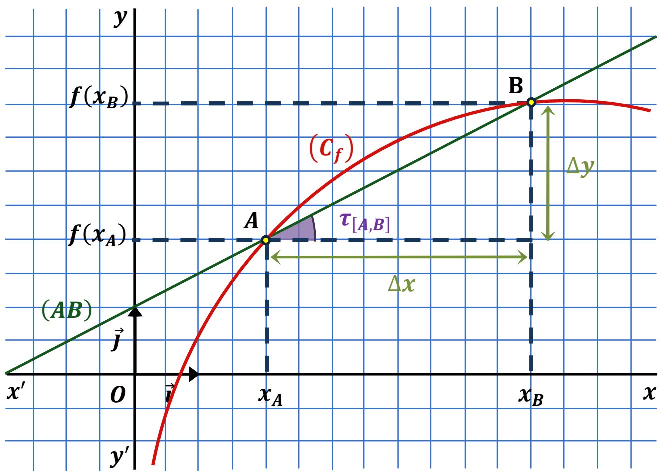
السرعة المتوسطة

تمثل نسبة تغير الدالة f بين A و B السرعة المتوسطة لـ f بين الفاصلتين x_A و x_B . فاذا كانت f فاصلة متحرك ما فان سرعته المتوسطة بين اللحظتين t_1 و t_2 من x_A الى x_B هي :

$$V_{moy} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{x_B-x_A}{t_2-t_1}$$

التفسير البياني

اذا كانت f دالة و (C_f) تمثيلها البياني حيث A و B نقطتان متمايزتان من (C_f) احداثياتهما $(x_A, f(x_A))$ و $(x_B, f(x_B))$ على الترتيب فان نسبة التغير $\tau_{[A,B]}$ للدالة f بين A و B تمثل معامل توجيه المستقيم (AB) .



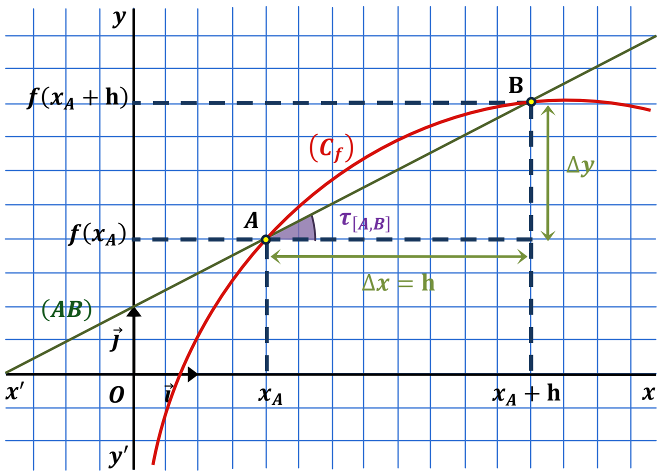
نتيجة

- اذا كانت الدالة f متزايدة على المجال $[a, b]$ فان نسبة تزايدها بين a و b موجبة و العكس ليس بالضرورة صحيح .
- اذا كانت الدالة f متناقصة على المجال $[a, b]$ فان نسبة تزايدها بين a و b سالبة و العكس ليس بالضرورة صحيح .
- اذا كانت الدالة f ثابتة على المجال $[a, b]$ فان نسبة تزايدها بين a و b معدومة و العكس ليس بالضرورة صحيح .

الصيغة الثانية

بوضع $x_B - x_A = \mathrm{h}$ نجد $x_B = \mathrm{h} + x_A$ حيث h عدد حقيقي غير معدوم تصبح نسبة تغيـر الدالة f بين A و B :

$$\tau_{[A,B]} = \frac{f(x_A+\mathrm{h})-f(x_A)}{\mathrm{h}}$$

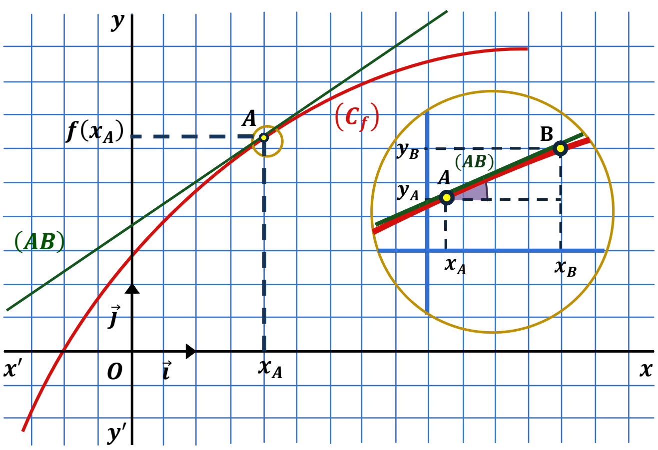


المسار العنصري

بما أن أصغر مسافة هي المسافة بين عددين حقيقيين متتاليين فان أصغر جزء من منحني هو قطعة مستقيمة فاذا كان x_B هو العدد الذي يلي x_A مباشرة فان نسبة التغير بين A و B تصبح هي نفسها ميل القطعة المستقيمة $[AB]$ فينطبق المستقيم (AB) على القطعة المستقيمة $[AB]$.

و بما أنه لا يمكن معرفة العدد الحقيقي الذي يلي العدد x_A مباشرة فاننا نأخذ العدد x_B الذي يقترب بالقدر الكافي من x_A أي الذي يؤول الى x_A و بالتالي لن ينطبق المستقيم (AB) على القطعة المستقيمة $[AB]$ و انما سيصبح مماسيا لمنحنى f عند x_A . اذن معادلة المماس (AB) عند x_A هي :

$$\lim_{x_B \to x_A} = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}$$



العدد المشتق

لتكن الدالة f المعرفة على المجال I و ليكن x_0 عنصر من I.
نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 اذا قبلت نسبة تزايد f نهاية عند x_0 أي اذا كانت

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mathrm{L}$$

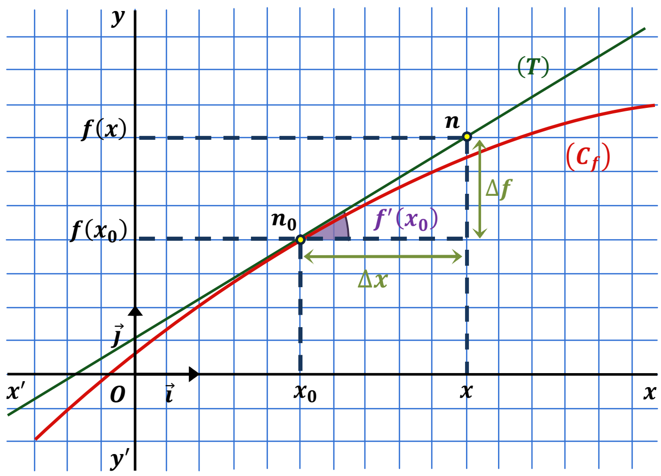
حيث L عدد حقيقي ثابت يختلف عن $\pm\infty$.
يسمى L بالعدد المشتق ويرمز له $f'(x_0)$ و نكتب اذن :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

التفسير البياني

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فان منحنيها البياني يقبل عند النقطة $n_0(x_0\,, f(x_0))$ مماسا (T) ميله (معامل توجيهه) هو العدد المشتق $f'(x_0)$ و معادلته :

$$(\mathrm{T}): y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$$



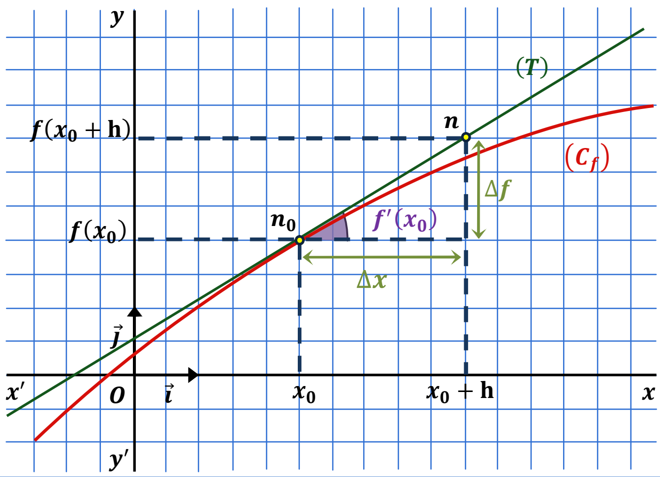
الصيغة الثانية

بوضع $x_b - x_a = \mathrm{h}$ نجد $x_b = \mathrm{h} + x_a$ حيث h عدد حقيقي غير معدوم يصبح العدد المشتق :

$$f'(x_0) = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{f(x_0+\mathrm{h})-f(x_0)}{\mathrm{h}}$$

و تصبح معادلة المماس :

$$(\mathrm{T}): y = f'(x_0).(\mathrm{h}) + f(x_0)$$



تطبيق 1

أثبت أن الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند x_0 ثم فسر النتيجة هندسيا :

1) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ $\qquad x_0 = 2$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ $\qquad x_0 = -3$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$ $\qquad x_0 = 0$

التقريب التآلفي

f دالة معرفة على مجال مفتوح I. (C_f) منحنيها البياني
تعد معادلة المماس عند العدد x_0 أحسن تقريب تآلفي للدالة f لأن معادلة المنحنى (C_f) تؤول الى معادلة المماس (T) كلما كانت قيمة x قريبة بالقدر الكافي من x_0 أي كلما كانت قيمة h قريبة من الصفر بالقدر الكافي

- **الصيغة الأولى :**

اذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فانه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي x_0 ينتمي الى I فان :

$$f(x) = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0).\varepsilon(x - x_0)$$

الدالة ε تسمى الباقي حيث $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$

نتحصل على التقريب التآلفي للدالة f باهمال الباقي ε.
و نكتب: $f(x) \approx f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$، و يسمى العدد $f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$ التقريب التآلفي لـ f عند x_0

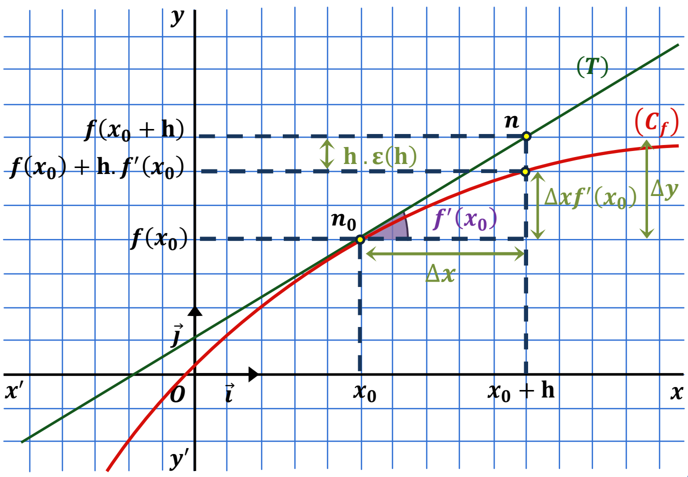
- **الصيغة الثانية :**

اذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فانه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث h ينتمي الى I فان :

$$f(x_0 + \mathrm{h}) = \mathrm{h}\,.f'(x_0) + f(x_0) + \mathrm{h}\,.\varepsilon(\mathrm{h})$$

الدالة ε تسمى الباقي حيث $\lim_{\mathrm{h} \to 0} (\mathrm{h}) = 0$

نتحصل على التقريب التآلفي للدالة f باهمال الباقي ε.
و نكتب: $f(x_0 + \mathrm{h}) \approx \mathrm{h}\,.f'(x_0) + f(x_0)$، و يسمى العدد $\mathrm{h}\,.f'(x_0) + f(x_0)$ التقريب التآلفي لـ f عند x_0



تطبيق 2

1) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(2+\text{h})^2$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد :

$$(2,04)^2 \ ، \ (1,98)^2 \ ، \ (2,001)^2$$

2) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(1+\text{h})^3$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد :

$$(1,04)^3 \ ، \ (0,96)^3$$

3) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\frac{1}{3+\text{h}}$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد :

$$\frac{1}{3,02} \ ، \ \frac{1}{2,99} \ ، \ \frac{1}{3,1}$$

4) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{5+\text{h}}$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد :

$$\sqrt{5,01} \ ، \ \sqrt{4,97} \ ، \ \sqrt{4,83}$$

5) عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\text{h}\right)$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد :

$$\sin\left(\frac{27\pi}{150}\right) \ ، \ \sin\left(\frac{47\pi}{240}\right)$$

تطبيق 3

عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{1+\text{h}}$ عندما ينتهي h الى الصفر 0 ثم عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد :

$$\sqrt{125} \ ، \ \sqrt{177} \ ، \ \sqrt{86}$$

تطبيق 4

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\text{R}-\{2/3\}$ بـ : $f(x)=\frac{3x-1}{2-3x}$

a) أحسب العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة $x_0=1$.

b) عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f(1+\text{h})$ عندما يؤول h الى 0 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(1,03)$ و $f(0,998)$.

2) لتكن الدالة f المعرفة على R بـ : $2x^2-3x+1$

a) أحسب العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة $x_0=-1$.

b) عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f(-1+\text{h})$ عندما يؤول h الى 0 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(-1,02)$ و $f(-0,97)$.

3) لتكن الدالة f المعرفة على R بـ : $\sqrt{1+x}$

c) أحسب العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة $x_0=2$.

d) عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f(2+\text{h})$ عندما يؤول h الى 0 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(2,005)$ و $f(1,994)$.

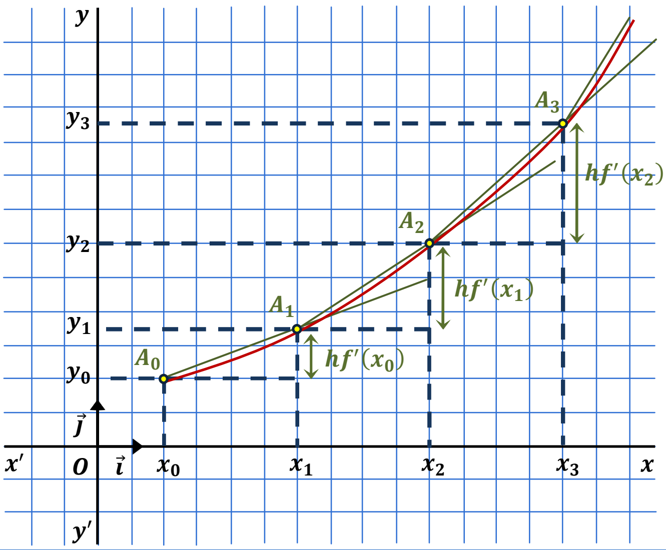
طريقة أولر

تسمح لنا طريقة أولر من انشاء تمثيل بياني تقريبي للدالة f عندما لاتتوفرلدينا عبارة $f(x)$. بمعرفة $f'(x_0)$ و $f(x_0)$.
تتركز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من الصفر لدينا :

$$f(x_0+\text{h}) \approx \text{h}\,.\,f'(x_0)+f(x_0)$$

انطلاقا من النقطة $A_0(x_0;y_0)$ بحيث $f'(x_0)\neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1;y_1)$ ذات الفاصلة $x_1=x_0+h$ التي تنتمي الى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ و المار من A_0 و بالتالي : $y_1=\text{h}\,.\,f'(x_0)+f(x_0)$ و بما أن $(x_0+\text{h})\approx \text{h}\,.\,f'(x_0)+f(x_0)$ من أجل h قريب من الصفر فان النقطة $A_1(x_1;y_1)$ قريب من منحنى (C_f) f .

بنفس الطريقة يمكن انشاء ، انطلاقا من النقطة A_1 ، النقطة $A_2(x_1+h\,;f(x_1)+hf'(x_1))$ وهكذا يمكن على التوالي انشاء النقط $A_n(x_n;y_n)$ حيث $x_n=x_{n-1}+h$. و $y_n=\text{h}\,.\,f'(x_{n-1})+f(x_{n-1})$ مع $n\geq 1$. بربط النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ... نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة . و نحصل على أكثر دقة كلما كان h أقرب الى 0 .



تطبيق 5

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(x)=3x^2 \qquad x\in\text{R} \end{cases}$$

1) باستعمال طريقة أولر عين قيمة مقربة لـ $f(1,1)$ ثم $f(1,2)$.

2) أثبت أن الدالة $x\longrightarrow x^3$ هي الدالة f ثم قارن القيمة المقربة لـ $f(1,2)$ الموجودة في السؤال السابق مع القيمة الحقيقية لـ $f(1,2)$.

تطبيق 6

نقبل أنه توجد دالة f تحقق العلاقة:

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(x) = 1/2f(x) \quad x \in R \end{cases}$$

1) أحسب $f'(0)$.

2) أوجد قيمة تقريبية لـ $f(0,1)$ ثم $f'(0,1)$ و أخيرا $f(0,2)$

السرعة اللحظية

يمثل العدد المشتق للدالة f عند الفاصلة x_0 السرعة اللحظية لـ f عند الفاصلة x_0. فاذا كانت f فاصلة متحركة ما فان سرعته اللحظية عند اللحظة t_0 هي:

$$V(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

قابلية الاشتقاق من اليمين

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من اليمين عند x_0 اذا كانت

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$ حيث L ثابت

قابلية الاشتقاق من اليسار

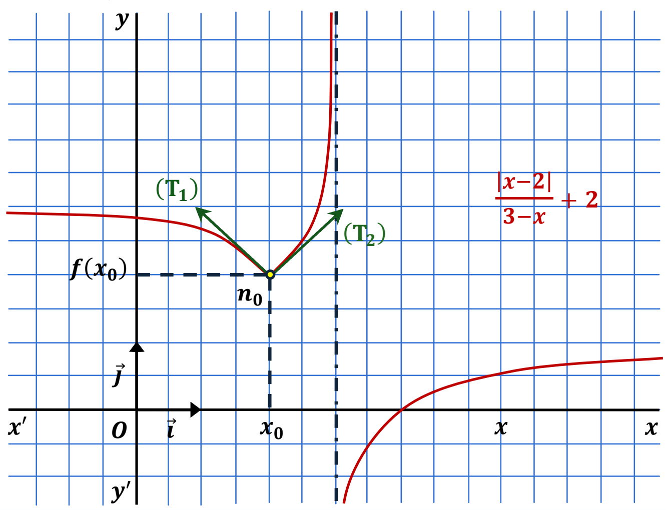
تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند x_0 اذا كانت

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$ حيث L ثابت

النقطة الزاوية

اذا كان $\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L_1$ و $\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L_2$

حيث $L_1 \neq L_2$ فان بيان الدالة f يقبل عند النقطة $n_0(x_0, f(x_0))$ نصفي مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما L_1 و L_2 و النقطة x_0 تسمى نقطة زاوية.



ملاحظة

- اذا كان $L > 0$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأعلى
- اذا كان $L < 0$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأسفل

تطبيق 7

أدرس قابلية اشتقاق الدالة عند x_0 وماذا تستنتج؟

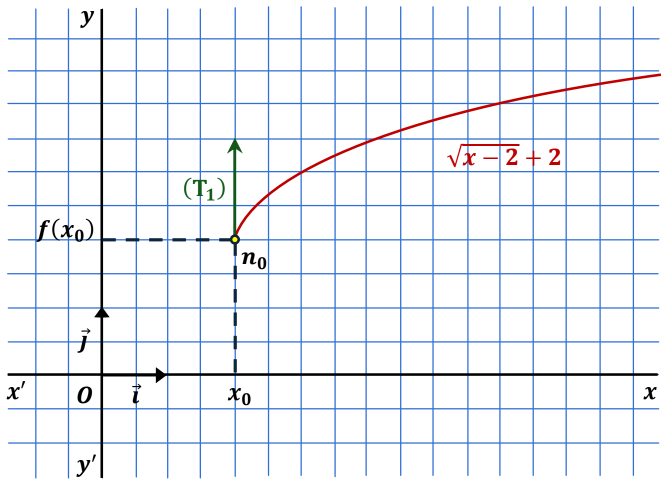
1) $f(x) = \frac{1+|x|}{1+x^2}$ $\quad x_0 = 0$

2) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-2}$ $\quad x_0 = 1$

3) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ $\quad x_0 = -2$

نقطة التوقف

اذا كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ فان بيان الدالة f يقبل عند النقطة $n_0(x_0, f(x_0))$ نصف مماس موازي لمحور التراتيب و النقطة n_0 تسمى نقطة توقف.



ملاحظة

- اذا كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأعلى
- اذا كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فان نصف المماس يكون موجها نحو الأسفل

تطبيق 8

أدرس قابلية اشتقاق الدالة عند x_0 وماذا تستنتج؟

1) $f(x) = 3 + \sqrt{2 - x}$ $\quad x_0 = 2^-$

2) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ $\quad x_0 = 1^+$

3) $f(x) = \sqrt{|2x^2 - 3x + 1|}$ $\quad x_0 = 1$

نتيجة

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 اذاكانت

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

2. مشتقة دالة على مجال

الدالة المشتقة

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I من R اذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x_0 من I
نسمي الدالة التي ترفق ، من أجل كل عدد حقيقي x من I العدد المشتق $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f على D_f و يرمز لها بـ f' و نكتب :

$$f' : \begin{cases} x \longrightarrow f'(x) \\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{R} \end{cases}$$

مشتقات الدوال المألوفة

الدالة	دالتها المشتقة	مجال الاشتقاق
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$x \in \mathrm{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$x \in \mathrm{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0, +\infty[$
$a.x^n$	$a.n\,x^{n-1}$	$x \in \mathrm{R}$
$a.x+b$	a	$x \in \mathrm{R}$
a	0	/
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathrm{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathrm{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathrm{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$\mathrm{cotan}\, x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathrm{R} - \{k\pi\}$

مشتق مجموع دالتين

اذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I فان الدالة $f+\mathrm{g}$ قابلة للاشتقاق على I حيث :

$$(f+\mathrm{g})'(x) = f'(x) + \mathrm{g}'(x)$$

مشتق جداء دالتين

اذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I فان الدالة $f \times \mathrm{g}$ قابلة للاشتقاق على I حيث :

$$(f \times \mathrm{g})'(x) = f'(x) \times \mathrm{g}(x) + \mathrm{g}'(x) \times f(x)$$

مشتق جداء دالة و عدد

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و k عدد حقيقي فان الدالة $\mathrm{k} \times f$ قابلة للاشتقاق على I حيث :

$$(\mathrm{k} \times f)'(x) = \mathrm{k} \times f'(x)$$

مشتق حاصل قسمة دالتين

اذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I مع $\mathrm{g} \neq 0$ فان الدالة f/g قابلة للاشتقاق على I حيث :

$$\left(\frac{f}{\mathrm{g}}\right)'(x) = \frac{f'(x)\times \mathrm{g}(x) - \mathrm{g}'(x)\times f(x)}{[\mathrm{g}(x)]^2}$$

مشتق مقلوب دالة

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I مع $f \neq 0$ فان الدالة $1/f$ قابلة للاشتقاق على I حيث :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مشتق مركب دالتين

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $f(\mathrm{I})$ فان الدالة $fo\mathrm{g}$ قابلة للاشتقاق على I حيث

$$(fo\mathrm{g})'(x) = \mathrm{g}'(x) f'(\mathrm{g}(x))$$

نتيجة

الدالة	دالتها المشتقة	مجال الاشتقاق
$\frac{1}{f^n(x)}$	$\frac{-n.f'(x)}{f^{n+1}(x)}$	$f(x) \neq 0$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$f(x) > 0$
$f^n(x)$	$n.f'(x).f^{n-1}(x)$	$f(x) \in \mathrm{R}$
$f(ax+b)$	$a.f'(ax+b)$	$x \in \mathrm{R}$
$\sin[f(x)]$	$f'(x).\cos(f(x))$	$x \in \mathrm{R}$
$\cos[f(x)]$	$-f'(x).\sin(f(x))$	$x \in \mathrm{R}$
$\tan[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\mathrm{cotan}[f(x)]$	$\frac{-f'(x)}{\sin^2(f(x))}$	$f(x) \neq \{k\pi\}$

نظريات

- الدوال كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على R .
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها .
- الدوال الصماء قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها .
- الدوال المثلثية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها .
- عموما فان الدوال المرجعية و الدوال المركبة من دوال مرجعية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها .

تطبيق 9

أحسب مشتقات الدوال التالية :

1) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x$
2) $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^3$
3) $f(x) = \frac{2x-3}{3x^2-2} + \frac{x^2-1}{x^2+3}$
4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
5) $f(x) = (2x-3)\sqrt{3x+5}$
6) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} - \frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$
7) $f(x) = \cos(2x-1)$
8) $f(x) = \sin(-5x+3)$
9) $f(x) = (\sin x).(\cos x + 1)$
10) $f(x) = \sin^2(5x+3)$
11) $f(x) = (3x).\cos(x+3)$
12) $f(x) = \frac{\sin x}{x-1} + \frac{1}{\cos x}$
13) $f(x) = \frac{\cos x+1}{\sin(x+3)} + \frac{\sin x}{x}$

نتيجة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R فان f' دالتها المشتقة على المجال I . قيمة الدالة المشتقة f' عند الفاصلة x_0 من المجال I هي قيمة العدد المشتق $f'(x_0)$ الذي يمثل ميل المماس عند تلك الفاصلة.

تطبيق 10

f الدالة المعرفة على R بـ :

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أكتب معادلة لمماس (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.
2) عين ثلاث نقط من (C) يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$.

تطبيق 11

f الدالة المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) هل توجد نقطة M من (C) يكون المماس عندها موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y = 3x - 1$.
2) a عدد حقيقي ، أكتب معادلة لمماس (C) عند الفاصلة a
3) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مماسين كل منهما يشمل O

تطبيق 12

f الدالة المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) لماذا يقبل (C) مماسا عند كل نقطة ؟
2) حل في R المعادلة $f'(x) = 0$. فسر النتيجة بيانيا .
3) عين نقط من (C) يكون معامل توجيه المماس فيها يساوي 3.
4) ليكن (D) مستقيم معادلته $y = ax + b$. ناقش حسب قيم a وجود نقط من (C) يكون المماس فيها موازيا لـ (D).

تطبيق 13

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$$

أثبت أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل ثلاث مماسات تمر بالنقطة $A(3/2\,,7/2)$

تطبيق 14

f الدالة المعرفة على $R - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \frac{ax-1}{x+2}$

a وسيط حقيقي . (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

عين a حتى يكون معامل توجيه مماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها -1 هو -3

تطبيق 15

f الدالة المعرفة على R بـ $f(x) = \frac{3x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$

حيث α, β عددان حقيقيان. (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

عين قيمة α, β حتى يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 4x + 3$ مماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

تطبيق 16

f الدالة المعرفة على R بـ :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

عين قيمة a , b و c بحيث يقبل المنحنى (C) مماسا أفقيا عند الفاصلة 1 و مماسا معامل توجيه 2 - عند النقطة $(-2, -5)$

تطبيق 17

f الدالة المعرفة على بـ :

$$f(x) = mx^3 - x^2 + 3$$

حيث m وسيط حقيقي . (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد مماسات المنحنى (C) التي معامل توجيهها معدوم .

تطبيق 18

f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ بـ :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

حيث a , c و أعداد حقيقية . (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

عين قيمة a , b و c بحيث يقبل المنحنى (C) عند النقطة $(2, 6)$ مماسا أفقيا و عند النقطة ذات الفاصلة 3 مماسا موازيا للمستقيم ذو المعادلة : $y = 3x + 1$

3. تطبيقات الاشتقاقية

اتجاه تغير دالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R و f' دالتها المشتقة

- اذا كانت $f'(x) > 0$ على المجال I فان f متزايدة تماما على I
- اذا كانت $f'(x) < 0$ على المجال I فان f متناقصة تماما على I
- اذا كانت $f'(x) = 0$ على المجال I فان f ثابتة على I

نتيجة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R و f' دالتها المشتقة

- اذا كانت f متزايدة تماما على المجال I فان $f'(x) > 0$ على I
- اذا كانت f متناقصة تماما على المجال I فان $f'(x) < 0$ على I
- اذا كانت f ثابتة على المجال I فان $f'(x) = 0$ على I

تطبيق 19

أدرس اتجاه تغير الدوال التالية على مجال تعريفها :

1) $f(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

2) $f(x) = \frac{x^3-3x-6}{2x+4}$

3) $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$

4) $f(x) = \frac{2x^2+4x+2}{x^2+2x+2}$

5) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x+13}$

6) $f(x) = |x+2| + \frac{4x}{x^2-4}$

7) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-2}$

8) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2-4}$

9) $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$

10) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

11) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

تطبيق 20

قارن بين العددين A و B في كل حالة ممايلي :

1) $A = \frac{1-(1{,}4142135)^2}{1+(1{,}4142135)^2}$ $\quad B = \frac{1-(3{,}14159265)^2}{1+(3{,}14159265)^2}$

2) $A = \frac{3{,}4721359}{(4{,}4721359)^2+2}$ $\quad B = \frac{3{,}58257569}{(4{,}58257569)^2+2}$

3) $A = \frac{(7{,}64575131)^2+3}{6{,}64575131}$ $\quad B = \frac{(7{,}23606797)^2+3}{6{,}23606797}$

تطبيق 21

في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه :

a) أدرس اتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها .

b) استنتج حصرا للدالة f على المجال D .

c) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال D .

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ $\quad D = [0,1]$

2) $f(x) = -2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ $\quad D = [1,2]$

3) $f(x) = \frac{x^3-3x-6}{2x+4}$ $\quad D = [2,3]$

تطبيق 22

f الدالة المعرفة على R بـ : $f(x) = x^3 - 3x + 4$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-3,3]$.

2) أرسم جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-3,3]$.

3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا على $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

4) عين عدد و اشارة حلول المعادلات التالية :

$f(x) = 6$ ، $f(x) = 5$ ، $f(x) = 3$ ، $f(x) = 2$

تطبيق 23

f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

a) أحسب الدالة المشتقة للدالة f .

b) استنتج الدالة المشتقة للدوال المقترحة التالية :

1) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

2) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}$

3) $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^2$

4) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

6) $f(x) = \frac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

7) $f(x) = \frac{\cos^2 x+1}{\cos x-1}$

8) $f(x) = \frac{\tan^2 x+1}{\tan x-1}$

تطبيق 24

يمثل الجدول المقابل تغيرات دالة f معرفة على المجال

x	-1		0		2		4		6		8		9
$f'(x)$			$-$		0		$+$		0		$-$		
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

أعط جدول تغيرات الدوال التالية :

1) $1/f(x)$ $\quad$ 2) $\sqrt{f(x)}$ $\quad$ 3) $f(|x|)$ $\quad$ 4) $|f(x)|$

5) $f^2(x)$ $\quad$ 6) $f^3(x)$ $\quad$ 7) $f(x^2)$ $\quad$ 8) $f(x^3)$

تطبيق 25

f الدالة المعرفة على R بـ : $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

a) حل في R المعادلة $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.

b) أدرس اتجاه تغير الدالة f على R ثم ارسم جدول تغيراتها على المجال $[-6,6]$.

c) استنتج جدول تغيرات الدوال التالية :

1) $1/f(x)$ $\quad$ 2) $\sqrt{f(x)}$ $\quad$ 3) $f(|x|)$ $\quad$ 4) $|f(x)|$

5) $f^2(x)$ $\quad$ 6) $f^3(x)$ $\quad$ 7) $f(x^2)$ $\quad$ 8) $f(x^3)$

القيمة الحدية المحلية

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $[a,b]$ و x_0 عنصر من $[a,b]$ اذا انعدمت المشتقة الأولى f' و غيرت من اشارتها عند x_0 فان $f(x_0)$ هي قيمة حدية محلية لـ f على المجال $[a,b]$.

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة و ليكن x_0 عنصرا من I .

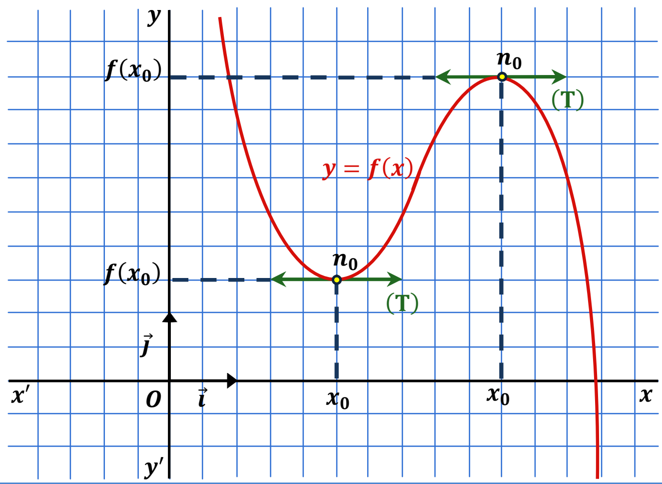
اذا قبلت الدالة f قيمة حدية محلية عند x_0 فان $f'(x_0) = 0$

ملاحظة

اذا كانت $f'(x_0) = 0$ فهذا لا يعني بالظرورة أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عند x_0 لأن دالتها المشتقة f' قد تنعدم ولا تغير من اشارتها .

التفسير البياني

اذا قبلت الدالة f قيمة حدية محلية صغرى أو عظمى عند x_0 فان منحنيها البياني يقبل عند النقطة $n_0(x_0\,, f(x_0))$ مماسا أفقيا (T) موازيا لمحور الفواصل



تطبيق 26

f_m دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث $f_m(x) = \dfrac{mx+x^2}{x^2-1}$

عين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث :

1) لا تقبل الدالة f قيمة حدية.

2) تقبل الدالة f قيمتين حديتين محليتين مختلفتين .

تطبيق 27

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$

حيث β , عددان حقيقيان. (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

عين قيمة a , b و c بحيث يقبل المنحنى (C) قيمة حدية عظمى عند النقطة ذات الاحداثيات $(0,-1)$ و مماسا معامل توجيه 3 - عند الفاصلة 1 .

نقطة الانعطاف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $[a,b]$ و ليكن x_0 عنصرا من المجال $[a,b]$.

اذا انعدمت المشتقة الثانية f'' و غيرت من اشارتها عند x_0 فان النقطة $n_0(x_0\,, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C) على $[a,b]$.

ملاحظة

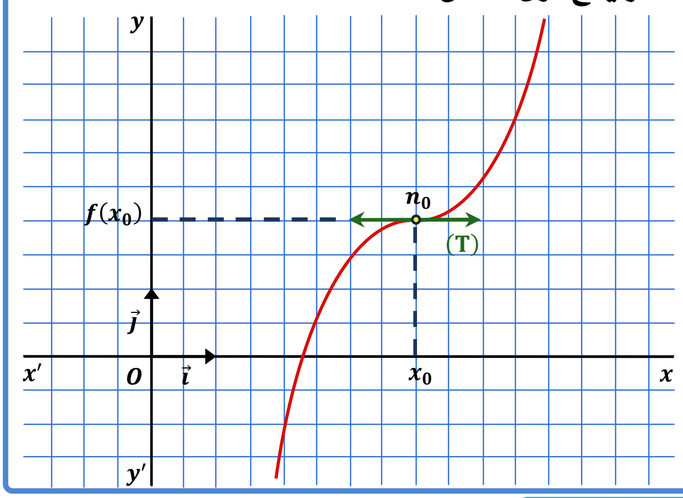
اذا كانت $f''(x_0) = 0$ فهذا لا يعني بالظرورة أن منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف عند x_0 لأن f'' قد تنعدم ولا تغير اشارتها

نظرية

اذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند x_0 و لم تغير من اشارتها فان النقطة $n_0(x_0\,, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f.

التفسير البياني

اذا كانت n_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C) فان المماس يقطع (C) عند n_0 . جزء من المنحنى (C) يقع أسفل المماس و الجزء الآخر يقع فوق المماس.



تطبيق 28

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = x^3 - 6x - 5$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف M يطلب تعيينها .

2) أكتب معادلة المماس عند النقطة M ثم أدرس وضعيته بالنسبة للمنحنى (C) .

تطبيق 29

f الدالة المعرفة على R بـ : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة M ذات الاحداثيات $(-1,-2)$ ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (T) و (C) . ماذا تستنتج ؟

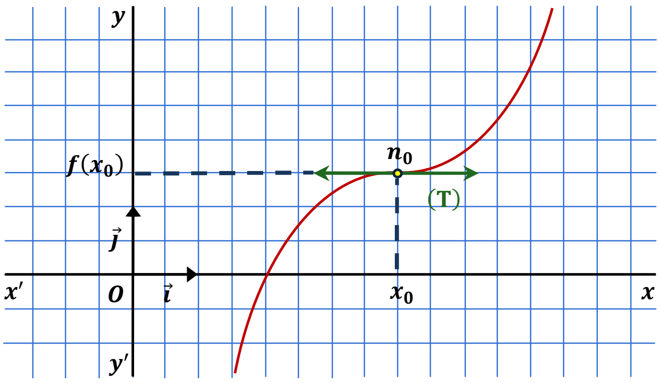
2) أحسب المشتقة الأولى f' ثم أدرس اشارتها . هل يؤكد هذا الاستنتاج السابق ؟

وضعية المماس عند نقطة الانعطاف

الحالة الأولى

- اذا انعدمت المشتقة الأولى f' و لم تغير من اشارتها و انعدمت المشتقة الثانية f'' و غيرت من اشاتها عند x_0 فان منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف بمماس أفقي .

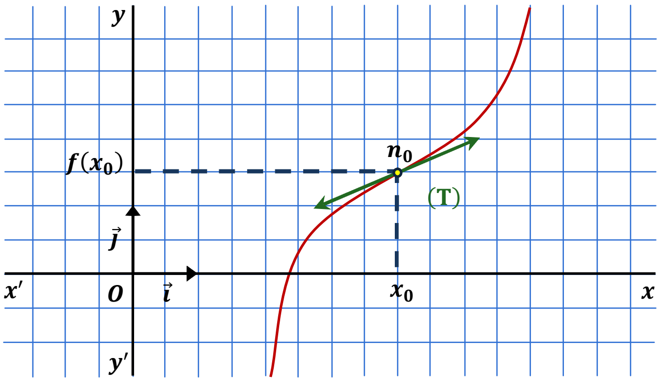
x		x_0	
f'	$+$	0	$+$
f'	$-$	0	$-$
f''	$-$	0	$+$



الحالة الثانية

- اذا لم تغير المشتقة الأولى f' من اشارتها و انعدمت المشتقة الثانية f'' و غيرت من اشاتها عند x_0 فان منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف بمماس مائل .

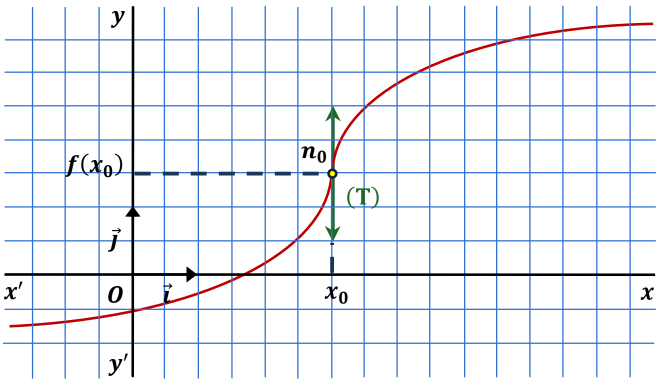
x		x_0	
f'	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$



الحالة الثالثة

- اذا لم تغير المشتقة الأولى f' من اشارتها و غيرت المشتقة الثانية f'' من اشاتها عند x_0 و كان $\lim_{x \to x_0} f'(x_0) = \infty$ فان منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف بمماس عمودي .

x		x_0	
f'	$+$	$\nexists$	$+$
f'	$-$	$\nexists$	$-$
f''	$-$	$\nexists$	$+$



" عندما تريد بلوغ قمة جبل قوم يحسنون ترى جبل قومك هضبة ، بل ان هضبتهم تكاد تكون بطحاء فلا تكاد تميز لهم قمة ، فهم فيها سواء كمن يعمل كمن لا يعمل : ترى الكل يسير و لا شيئ مسير ، و الكل يزرع وقليل من يشبع ، و الكل يصنع و لك أن تتحسس ما أبدع ، و ان كان فلا أروع ! و الكل ... . مجرمهم اللاحسان لما خذلوه ففرضت عليهم الأرض عدلها بما اقترفوه فكان نعم العدل و كانو نعم الرعية! "

خالد سايغي