

في كل ما يلي : يرمز D_f إلى مجموعة تعريف دالة f ، أما C_f فيرمز إلى منحنيتها في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .
ملاحظة: إذا كتبنا ∞ فنقصد $+\infty$ أو $-\infty$.

(1) المستقيم المقارب العمودي:

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فإن تفسيرها البياني (أو الهندسي) هو:
المنحني C_f يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = a$.

(2) المستقيم المقارب الأفقي:

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ فإن تفسيرها البياني (أو الهندسي) هو:
 C_f يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = b$ ، وذلك بجوار ∞ .

(3) المستقيم المقارب المائل:

1- لإثبات أن المستقيم $y = ax + b$ (Δ) مقارب مائل لـ C_f بجوار ∞ ، يكفي أن نثبت أن:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.
ب- إذا لم نُعط لنا معادلة المستقيم المقارب المائل، وطلب منا تعيينه، ننظر إلى عبارة $f(x)$ ، فإن كانت من الشكل التالي:

$$f(x) = ax + b + \varphi(x) \quad \text{مع} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$$

فالمستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ C_f عند ∞ .
إذا لم تتوفر الملاحظة السابقة، نعين المستقيم المقارب المائل بالطريقة التالية: نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ، فنجد عدداً حقيقياً a غير معدوم، ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ ، فنجد عدداً حقيقياً b وتكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y = ax + b$.

(4) الدالة الزوجية:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أن f زوجية، نبرهن، من أجل كل x من D_f ، أن: $f(-x) = f(x)$.
ملاحظة هامة: إذا كانت f زوجية، فيمكن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم تكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.

(5) الدالة الفردية:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أن f فردية، نبرهن، من أجل كل x من D_f ، أن: $f(-x) = -f(x)$.
أو $f(-x) + f(x) = 0$.
ملاحظة هامة: إذا كانت f فردية، فيمكن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم تكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

(6) الدالة الدورية:

f دالة، و p عدد حقيقي غير معدوم، بحيث من أجل كل x من D_f ، $x + p$ ينتمي إلى D_f . لإثبات أن p دور للدالة f نبرهن، من أجل كل x من D_f ، أن: $f(x + p) = f(x)$.
ملاحظة 1: الدور P للدالة f هو أصغر عدد حقيقي

موجب تماماً يحقق العلاقة السابقة .
ملاحظة 2: إذا كانت f دورية، فيمكن الاكتفاء بإنشاء جزء من C_f على مجال طول دوره P .

(7) مركز التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α .
لإثبات أن النقطة $\omega(\alpha, \beta)$ مركز تناظر للمنحني C_f ، يكفي أن نثبت، من أجل كل x من D_f ، أن:

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \quad \text{أو} \quad f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$$

(8) محور التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α .
لإثبات أن المستقيم $x = \alpha$ (D) محور تناظر للمنحني C_f ، يكفي أن نثبت، من أجل كل x من D_f ، أن:

$$f(2\alpha - x) = f(x) \quad \text{أو} \quad f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$$

(9) نقطة الانعطاف:

بصفة عامة، لتعيين نقطة الانعطاف، نقوم بما يلي:
نحسب المشتق الثاني $f''(x)$ ، و ندرس إشارته ، فإذا وجدنا $f''(x)$ انعدم عند قيمة x_0 من D_f ، مُغيّراً إشارته، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f .
حالة خاصة: في بعض الحالات، يمكن تعيين نقطة الانعطاف دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$ ، وذلك إذا انعدم المشتق الأول $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f ، ولم يغيّر إشارته ، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f .

$$\text{حالة أخرى: إذا كانت} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

أو $-\infty$ ؛ فالتفسير الهندسي هنا هو أن

النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f . (فائدة: يكون المماس عند هذه النقطة موازياً لمحور الترتيب).

ملاحظة: في بعض الحالات، يفرض علينا سياق التمرين أن نعين نقطة الانعطاف بالكيفية التالية:

يُطلب منا أن ندرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، فإذا وجدنا أن

C_f غير وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل و بعد نقطة التماس) نستنتج أن النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f .

(10) تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل:

لتعيين نقط تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل، نحل المعادلة $f(x) = 0$ حيث $x \in D_f$. (طبعا، إذا كانت قابلة للحل !)

(11) تقاطع C_f مع حامل محور الترتيب:

f دالة حيث $0 \in D_f$ لتعيين نقطة تقاطع C_f مع حامل محور الترتيب، نعوض x بالصفر في عبارة $f(x)$. (يتبع...)

12) المماس:

هناك ستُ صيغ- تقريبا- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى معرفة فاصلة نقطة التماس x_0 هي المفتاح للإجابة على أي منها كما سنرى.

1/ الصيغة الأولى (العادية) : اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

الإجابة: نكتب الدستور: $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نُعوّض x_0 بقيمتها المعطاة.

2/ الصيغة الثانية: اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الترتيب y_0 .

الإجابة: نحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

3/ الصيغة الثالثة: بين أنه يوجد مماس- أو أكثر- للمنحني C_f ميله (أو معامل توجيهه) يساوي a .

الإجابة: نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ ، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا كذلك إلى الحالة الأولى.

ملاحظة: عدد الحلول يدل على عدد المماسات.

4/ الصيغة الرابعة: بين أنه يوجد مماس- أو أكثر- للمنحني C_f يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$.

الإجابة: نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ (عُدنا إلى الحالة الثانية).

5/ الصيغة الخامسة: بين أنه يوجد مماس- أو أكثر- للمنحني C_f يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$.

الإجابة: نحل المعادلة $a.f'(x_0) = -1$.

6/ الصيغة السادسة: بين أنه يوجد مماس- أو أكثر- للمنحني C_f يشمل النقطة ذات الإحداثيين (α, β) .

الإجابة: نحل المعادلة $\beta = f'(x_0).(\alpha - x_0) + f(x_0)$

عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

13) النقطة الزاوية: إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = I_2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = I_1$$

حيث I_1 و I_2 عدنان حقيقيان ($I_1 \neq I_2$)، فالتفسير الهندسي هو أن النقطة ذات الفاصلة x_0 : نقطة زاوية للمنحني C_f .

ملاحظة 1: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = I_2 \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = I_1$$

ملاحظة 2: معادلتا نصفي المماسين عند النقطة الزاوية هما:

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = f'_d(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

علما أن: $f'_d(x_0) = I_1$ و $f'_g(x_0) = I_2$

تنبيه: تبقى النقطة الزاوية موجودة حتى لو كانت إحدى النهايتين السابقتين عددا حقيقيا 1 و الأخرى $+\infty$ أو $-\infty$.

14) استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء C_f ، قد يُطلب منا أن نستنتج منحنيا آخر C_h - مثلا- لدالة h ؛ و يكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي :

1/ الصيغة الأولى: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x) = |f(x)|$

الإجابة: 1) على المجالات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ (أي يكون فيها C_f على محور الفواصل أو فوقه)

نحصل على $h(x) = f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f .

2) على المجالات التي تكون فيها $f(x) < 0$ (أي يكون فيها C_f تحت محور الفواصل)

نحصل على $h(x) = -f(x)$ ، ومنه يكون C_h نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

2/ الصيغة الثانية: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x) = f(|x|)$

ملاحظة: غالبا ما يُطلب منا أولاً أن نثبت أن h زوجية.

الإجابة: 1) إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ (الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f .

2) نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لأن h زوجية.

3/ الصيغة الثالثة: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x) = f(-|x|)$

ملاحظة: غالبا ما يُطلب منا أولاً أن نثبت أن h زوجية.

الإجابة: 1) إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ (الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f .

2) نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب لأن h زوجية.

4/ الصيغة الرابعة: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x) = -f(x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

5/ الصيغة الخامسة: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x) = f(-x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور الترتيب.

6/ الصيغة السادسة: استنتج C_h منحنى الدالة h التي تحقق :

$$h(x) = -f(-x)$$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

7/ الصيغة السابعة: استنتج C_h منحنى الدالة h التي تحقق :

$$h(x) = f(x + a) + b \quad ; \quad \text{حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{V} \begin{pmatrix} -a \\ +b \end{pmatrix}$

8/ الصيغة الثامنة: استنتج C_h منحنى الدالة h التي تحقق :

$$h(x) = k.f(x) \quad ; \quad k \in \mathbb{R}^*$$

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالتآلف $A(x/x, y/y, k)$

ملاحظة: هذه أبرز الحالات، وغيرها شبيه بها أو يعود إليها (يُتبع...)