تمرين 01:

قابلية الاشتقاق دالة ذات شكل واحد

f دالة معرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$.

1) برهن أنه من أجل $h\neq 0$: $\dfrac{4h+8}{\sqrt{h^2+8h+9}+3}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

2) استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند : $x=1$ معينا $f'(1)$ و فسّر هندسيا النتيجة.

3) أكتب معادلة المماس (T) عند $x=1$ و استنتج أن الدالة f مستمرة عند $x=1$.

تمرين 02:

قابلية الاشتقاق دالة ذات قيمة مطلقة

(C_f) منحنى الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=x^2+|x-1|$.

1) تحقق أن f مستمرة عند : $x_0=1$.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $h\neq 0$ حيث : $\dfrac{f(1+h)-1}{h}=h+2+\dfrac{|h|}{h}$.

3) هل العبارة $\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0.

4) ماذا تستنتج بالنسبة لقابلية اشتقاق الدالة f في هذه الحالة؟.

5) أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المحصل عليها في السؤال 3.

6) أكتب معادلتي نصفي المماسين للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (1).

7) ماذا تمثل نقطة تقاطع نصفي المماسين للمنحنى (C_f)؟.

تمرين 03:

مشكلة لها مخرج

إشارة مشتقة انطلاقا من جدول تغيراتها

f دالة معرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=x^4+2x^3+6x^2+12x-12$.

1) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

2) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

تمرين 04:

ترجمة شروط إلى معادلات رياضية

f دالة معرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+ax+c}$ حيث : a ؛ b ؛ c أعداد حقيقية مختلفة و غير معدومة.

1) عين الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c علما أن المنحنى (C_f) :

☑ يشمل النقطة $A(1\,;4)$.

☑ يقبل مماسا عند A معامل توجيهه معدوم .

☑ المنحنى (C_f) يقطع (yy') في نقطة ترتيبها 5 .

تمريـــن05:

مشتقات الدوال المألوفة

أحسب الدالة المشتقة للدالة f على مجال اشتقاقها في كل حالة :

1) $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-5x+4$ ؛ 2) $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2+x+1}$ ؛ 3) $f(x)=(2x+1)\sqrt{x}$ ؛ 4) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x)=\cos x-4\sin x+5$ ؛ 6) $f(x)=4\cos x-3\tan x+5x-1$ ؛ 7) $f(x)=\tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

تمريـــن06:

مشتقات الدوال المركبة: $[U^n]'$

أحسب **بطريقتين** الدالة المشتقة للدالة f على مجال اشتقاقها :

1) $f(x)=(3x+1)^3$ ؛ 2) $f(x)=(4-7x)^5$ ؛ 3) $f(x)=(x^4-x^2+1)^3$

تمريـــن07:

مشتقات الدوال المركبة: $\left[\frac{1}{U^n}\right]'$

أحسب **بطريقتين** الدالة المشتقة للدالة f على مجال اشتقاقها :

1) $f(x)=\frac{1}{(4-5x)^2}$ ؛ 2) $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$ ؛ 3) $f(x)=\frac{1}{(x^3-x^2-4x+4)^4}$

تمريـــن08:

مشتقات الدوال المركبة: $[\sqrt{U}]'$

أحسب **بطريقتين** الدالة المشتقة للدالة f على مجال اشتقاقها :

1) $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ؛ 2) $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$ ؛ 3) $f(x)=\sqrt{4x^2-3x-1}$

تمريـــن09:

u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-2\,;3]$ حيث جدول تغيراتها هو التالي :

x	-2		-1		0		1		2		3
$u'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$u(x)$	1	$\nearrow$ $+$	2	$\searrow$ $+$	0	$\searrow$ $-$	-2	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	3

♦ نعتبر الدوال f ؛ g ؛ h حيث : $f=u^2$ ؛ $g=\frac{1}{u}$ ؛ $h=\sqrt{u}$.

1) عين إشارة $u(x)$.

2) عين مجموعة تعريف كلا من : f ؛ g ؛ h.

3) عبر عن : $f'(x)$ ؛ $g'(x)$ ؛ $h'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$.

4) استنتج جدول تغيرات الدوال : f ؛ g ؛ h.

توسّع أكثر

نموذج لبكالوريا

تمريـــن10:

التخمين و التعميم

نعتبر الدالة : $f : x \mapsto x^n$ حيث : $x \in N^*$.

1) من أجل : $n=1$ أحسب $f'(x)$ ؛ $f''(x)$.

2) من أجل $n=2$: أحسب $f'(x)$ ؛ $f''(x)$ ؛ $f^3(x)$.

3) من أجل $n=3$: أحسب $f'(x)$ ؛ $f''(x)$ ؛ $f^3(x)$ ؛ $f^4(x)$.

4) من أجل كل $n \in N^*$ أعط تخمينا حول أصغر قيمة للعدد p التي يكون من أجلها : $f^p(x)=0$.

تمريـــن11:

التعريف الأول و الثاني لنقطة الانعطاف

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ نعتبر (C_g) منحنى الدالة g المعرّفة على $\Re$ كمايلي : $g(x)=x^3-3x^2+3x+3$.

1) أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيينها.

نعتبر (C_f) منحنى الدالة f المعرفة على $\Re$ كمايلي : $f(x)=x^3-3x+2$.

3) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.

تمريـــن12:

التعريف الأول للتقريب التآلفي

1) عين التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة f في كل حالة ن الحالات التالية :

1) $f(x)=(1+x)^3$ ؛ 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ؛ 3) $f(x)=\sqrt{1+x}$ ؛ 4) $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

2) **تطبيق عددي :**

باستعمال النتائج السابقة أحسب بدون آلة حاسبة القيم التقريبية للأعداد الحقيقية التالية :

$(1{,}01)^3$ ؛ $\dfrac{1}{1{,}02}$ ؛ $\sqrt{0{,}98}$ ؛ $\tan(46°)$.

تمريـــن13:

التعريف الثاني للتقريب التآلفي

f دالة معرفة على $\Re$ كمايلي : $f(x)=x^3$.

1) عين التقريب التآلفي لعبارة : $f(1+h)$ من أجل h قريب من 0 مبينا الارتياب المرتكب.

2) أحسب قيمة مقرّبة للعدد : $(1{,}023)^3$.

تمرين14:

أضمن علامة التقريب التآلفي

عين عين التقريب التآلفي المحلي عند a للدالة f في كل حالة :

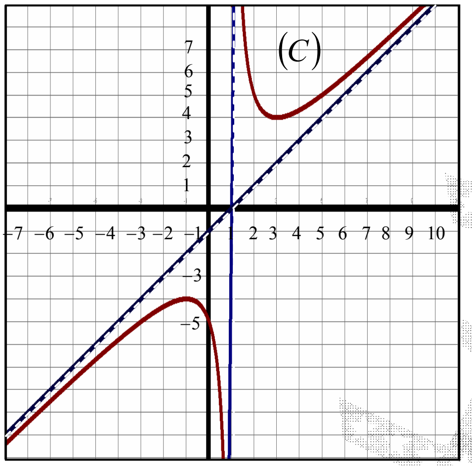
1) $f(x)=-3x^2+x \;;\; a=0$ ؛ 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x} \;;\; a=1$ ؛ 3) $f(x)=\sqrt{1-x} \;;\; a=-3$

4) $f(x)=\sin x \;;\; a=0$

تمرين15:

المنحنى (C) يمثل منحنى دالة f في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i}\;;\vec{j})$. بقراءة بيانية عين :

القراءة البيانية للمنحنيات



1) المجال D مجال تعريف الدالة f و النهايات عند حدود D.

2) المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) و معادلاتها.

3) الوضع النسبي للمنحنى (C) و مقاربه المائل.

4) إشارة $f'(x)$ و جدول تغيرات الدالة f.

5) إشارة الدالة f.

6) عين مجال تعريف الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

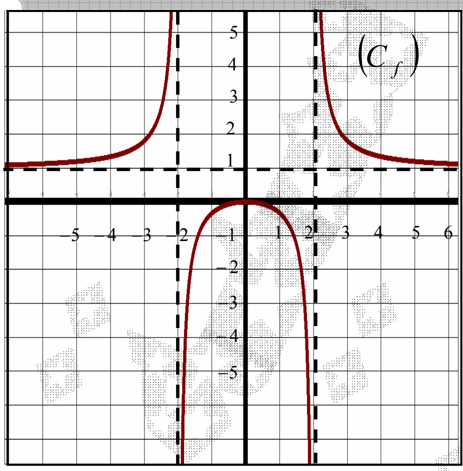
7) عين نهايات الدالة g عند 1 و عند $+\infty$.

8) عبّر عن g' بدلالة f و f' ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g.

9) أحسب $g(3)$ و شكل جدول تغيرات الدالة g.

تمرين16:

القراءة البيانية للمنحنيات



باستعمال المنحنى (C_f) المقابل عين :

1) مجموعة تعريف الدالة f.

2) عين النهايات عند حدود مجال تعريفها.

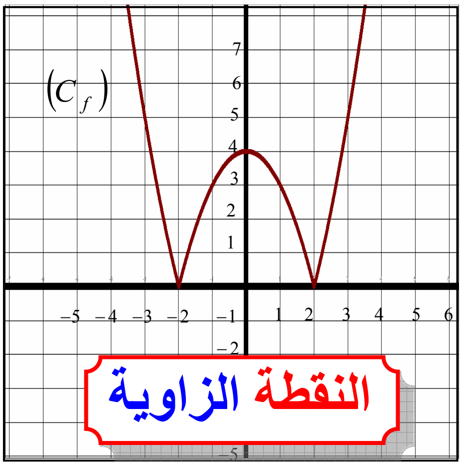
3) عين النهاية الحدية للدالة f على المجال $]-2\,;2[$.

4) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) الموازية للمحورين.

5) أكتب جدول تغيرات الدالة f.

6) هل الدالة f زوجية أم فردية ؟ علل؟

تمرين17:



باستعمال المنحنى (C_f) المقابل عين :

1) مجموعة تعريف الدالة f .

2) عين المجموعة التي تكون فيها الدالة f مستمرة.

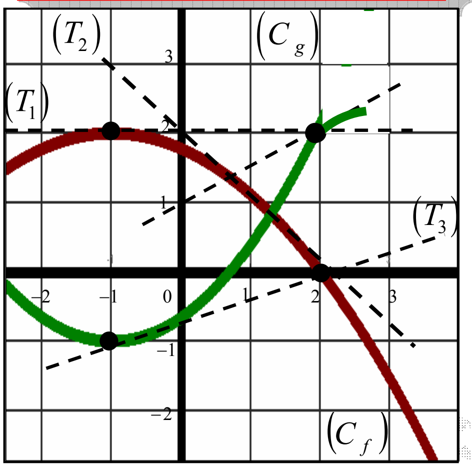
3) عين المجموعة التي تكون فيها الدالة f قابلة للاشتقاق.

4) كيف تسمى النقطتين $A(-2;0)$ و $B(2;0)$ ؟.

تمرين18:

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2\,;3]$ و بعض مماساتها.

العدد المشتق بيانيا



أحسب الأعداد التالية و عين معادلة كل مماس :

1) $f'(-1)$ ؛ $g'(-1)$ ؛ $f'(2)$ ؛ $g'(2)$.

$(f+g)'(-1)$ ؛ $(f.g)'(2)$ ؛ $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)$ ؛ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$.

2) من أجل كل x من المجال $[0\,;2]$.

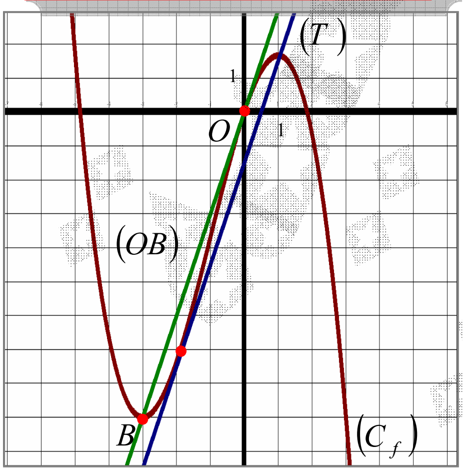
3) نضع : $h(x)=f(2x-1)$. أحسب $h'(0)$ ؛ $h'\left(\frac{3}{2}\right)$.

4) حدد اتجاه تغير كل من الدوال التالية : h على المجال $[0\,;2]$ و $g\circ f$ على المجال $[-2\,;3]$.

تمرين19:

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة في $\Re$ في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i}\,;\vec{j})$.

مناقشة وسيطية مائلة



المنحنى (C) يحقق الشروط التالية :

- ♦ (C) يقبل عند النقطة $A(1\,;f(1))$ مماسا أفقيا.
- ♦ (C) يمر من O و يشمل النقطة $B(-3\,;-9)$.
- ♦ (C) يقبل المستقيم (OB) مماسا في O.

1) ما هو معامل توجيه المستقيم (OB) ؟.

نفرض أن عبارة الدالة f من الشكل : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

2) بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=-\frac{1}{3}$ ؛ $b=-1$ ؛ $c=3$ ؛ $d=0$.

3) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة المماس (OB) للمنحنى (C) عند 0.

5) بين أن المنحنى (C) يقبل مماس يوازي (OB) عند -2 يطلب كتابة معادلة له.

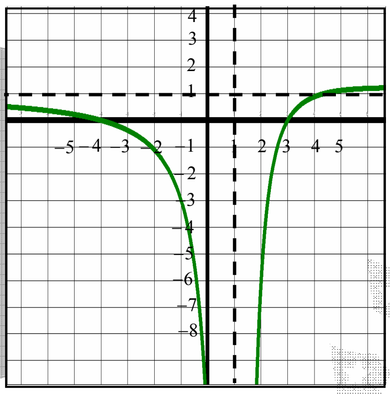
6) باستعمال المنحنى (C)ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود ؛عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=3x+m$

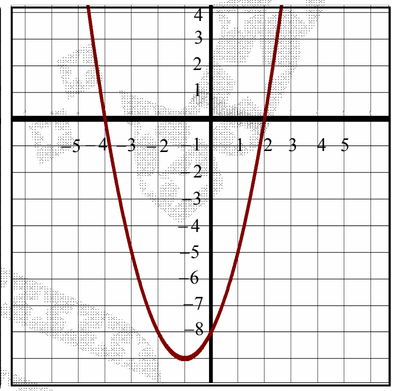
تمرين20:

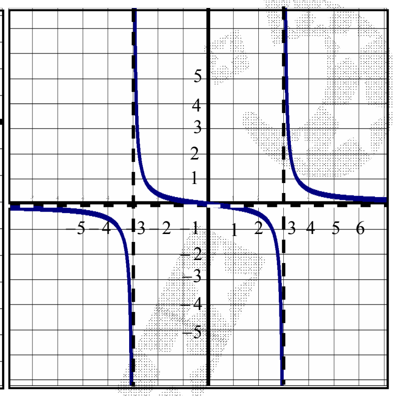
المنحنيات الثلاث التالية تمثل منحنيات الدوال المشتقة للدوال : f ؛ g ؛ h على الترتيب.

1) حدد اتجاه تغير كل من : f ؛ g ؛ h على مجالات تعريفها.

فهم جيد لمنحنيات دوال مشتقة







تمرين21:

لتكن f الدالة المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بجدول تغيراتها :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1) أثبت أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty\,;-2]$.

2) أثبت أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-2\,;-1[$.

3) هل تقبل المعادلة : $f(x)=0$ حلا في المجال $]-1\,;+\infty[$ ؟ علل.

4) استنتج مما سبق إشارة الدالة $f(x)$.

مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين22:

لتكن الدالة f المعرفة من أجل $x\neq-1$ بـ : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$. حيث a ؛ b ؛ c و d أعداد حقيقية

جدول تغيراتها :

تعيين العلاقة الحرفية لدالة معرفة بجدول

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1) ما هي قيمة العدد d ؟ أحسب $f'(x)$ ؟ عين الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c.

2) برهن أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم $(\Delta): y = x+1$ مقارب مائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

3) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

تمرين 23:

من خلال جدول تغيرات الدالة f التالي :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

كيفية رسم المنحنيات

1) عين مجموعة تعريف الدالة f و استنتج نهايتها عند حدود D_f.

2) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) الموازية للمحورين .

3) استنتج إشارة $f(x)$ على مجموعة تعريفها علما أن : $f(-1)=0$ و $f(0)=-1$.

4) عين القيمة الحدية الصغرى للدالة f على المجال $]-\infty; 1[$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) على معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}\ ; \vec{j})$.

تمرين 24:

من خلال جدول تغيرات الدالة f التالي :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

كيفية رسم المنحنيات

1) عين مجموعة تعريف الدالة f و استنتج نهايتها عند حدود D_f.

2) استنتج إشارة $f(x)$ على مجموعة تعريفها علما أن : $f(1)=0$.

3) أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) على معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}\ ; \vec{j})$ علما أن (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

مخطط دراسة دالة

1) مجموعة التعريف :

☑ نحدد مجموعة تعريف الدالة إذا لم تكن معطاة في النص.

☑ دراسة شفعية الدالة أو دوريتها لإقتصار الدراسة على نصف المجال لتسهيل الدراسة و لربح الوقت.

☑ تحديد مركز أو محور التناظر لمنحنى الدالة.

2) حساب النهايات :

☑ نحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف أو عند عند حدود مجموعة الدراسة.

3) دراسة إتجاه تغير دالة :

☑ حساب الدالة المشتقة على المجال الذي تقبل عند الاشتقاق.

☑ دراسة إشارة المشتقة و تعيين إشارتها.

☑ استنتاج اتجاه تغير الدالة انطلاقا من إشارة المشتق.

4) تشكيل جدول تغيرات الدالة :

☑ نلخص الدراسة السابقة بدءا من مجموعة التعريف إلى إشارة المشتق في جدول التغيرات.

☑ في السطر الأول للجدول نضع مجال مجموعة التعريف .

☑ في السطر الثاني نضع المشتق و إشارته.

☑ في السطر الثالث نضع الدالة f و اتجاه تغيراتها إضافة للقيم الحدية لها.

5) البحث عن نقاط تقاطع منحنى الدالة مع مجورى الإحداثيات:

☑ التقاطع مع محور التراتيب (yy') : نعدم x أي نحسب $f(0)$ شرط أن تكون الدالة معرفة عند $x=0$.

☑ التقاطع مع محور الفواصل (xx') : نعدم y أي نحل المعادلة $f(x)=0$ أو نستعمل نظرية القيم المتوسطة إذا كانت المعادلة صعبة الحل درجة ثالثة مثلا.

6) تحديد المستقيمات المقاربة إن وجدت:

☑ يتحدد المستقيم المقارب الشاقولي و الأفقي عموما بالتفسير الهندسي لنتيجة النهايات عند أطراف مجموعة التعريف.

بينما المستقيم المقارب المائل يتحدد بحساب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]$.

7) التمثيل البياني للدالة :

☑ أولا: نرسم المستقيمات المقاربة .

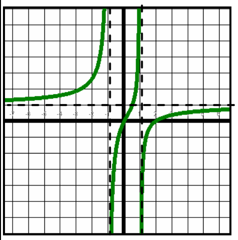
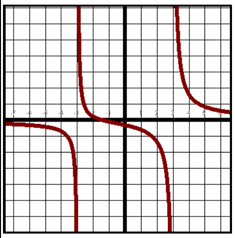
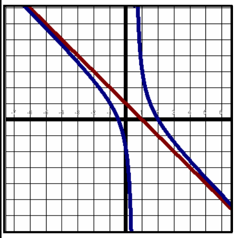
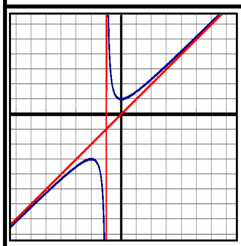
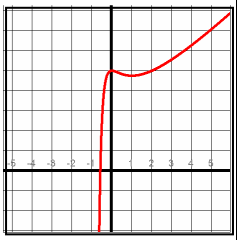
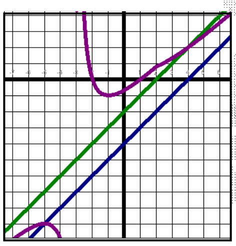
☑ ثانيا : نرسم نقط تقاطع المنحنى مع المحاور و القيم الحدية.

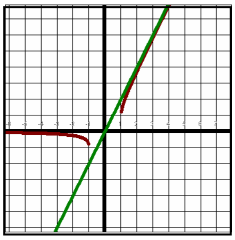
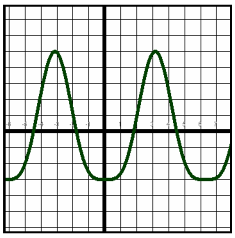
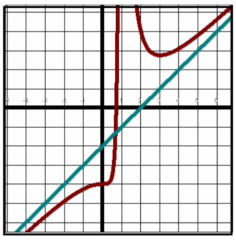
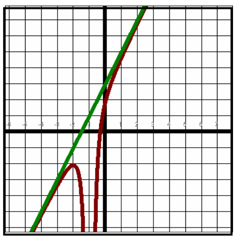
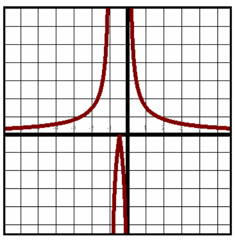
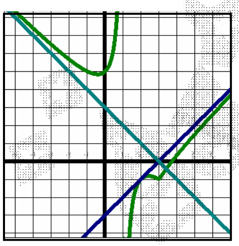
☑ ثالثا : نرسم المماسات للمنحنى إن وجدت و المماسة عند القيم الحدية.

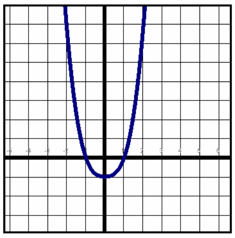
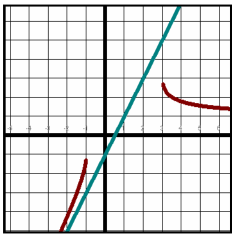
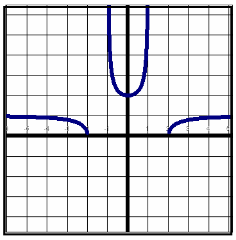
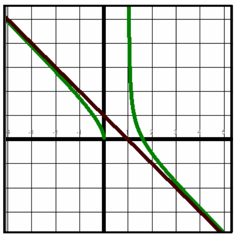
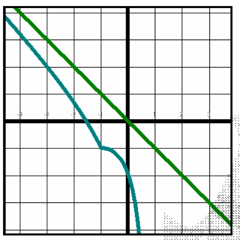
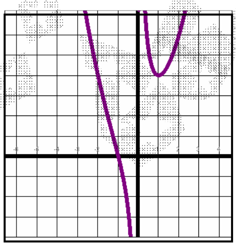
☑ رابعا : نستغل في الرسم محور أو مركز التناظر إن وجد .

منحنيات بعض الدوال العددية

☜ أدرس تغيرات الدالة f في كل حالة و مثل منحناها البياني على معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

	الدالة	مجموعة التعريف و الدالة المشتقة	منحناها البياني
(1	$f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$	$D_f=\Re-\{-1;1\}$ $f'(x)=\dfrac{2x^2-2x+2}{\left(x^2-1\right)^2}$	
(2	$f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-9}$	$D_f=\Re-\{-3;3\}$ $f'(x)=\dfrac{-2x^2-6x-18}{\left(x^2-9\right)^2}$	
(3	$f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$	$D_f=\Re-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ $f'(x)=\dfrac{-4x^2+4x-7}{\left(2x-1\right)^2}$	
(4	$f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$	$D_f=\Re-\{-1\}$ $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{\left(x-1\right)^2}$	
(5	$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+10x+5}{\left(x+1\right)^2}$	$D_f=\Re-\{-1\}$ $f'(x)=\dfrac{x^4+4x^3-x^2-4x}{\left(x+1\right)^4}=\dfrac{\left(x^2+4x\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x+1\right)^4}$	
(6	$f(x)=\dfrac{x^2-\lvert x-2\rvert}{x+3}$	$D_f=\Re-\{-3\}$ $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{\left(x+3\right)^2} & \left(x<2\ ;\ x\in D_f\right) \\ f'(x)=\dfrac{x^2+6x-5}{\left(x+3\right)^2} & \left(x\geq 2\ ;\ x\in D_f\right) \end{cases}$	

	$D_f =]-\infty;-1] \cup [-1;+\infty[$ $f\,'(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$	$f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$ **(7**
	$D_f = \Re$ $f\,'(x) = -2\sin 2x + 4\sin x$ $= 4\sin x\,(1-\cos x)$	$f(x) = \cos 2x - 4\cos x$ **(8**
	$D_f = \Re - \{1\}$ $f\,'(x) = \dfrac{x^4-4x^3+3x^2}{(x-1)^4}$ $= \dfrac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}$	$f(x) = \dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ **(9**
	$D_f = \Re - \{-1\}$ $f\,'(x) = 2+\dfrac{2}{(x+1)^3}$ $= \dfrac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$	$f(x) = 2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ **(10**
	$D_f = \Re^* - \{-1\}$ $f\,'(x) = \dfrac{2x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}$ $\left(x<-\frac{1}{2}\,;\,x\in D_f\right)$ $f\,'(x) = -\dfrac{2x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}$ $\left(x\geq-\frac{1}{2}\,;\,x\in D_f\right)$	$f(x) = \dfrac{\lvert 2x+1\rvert}{x^2+x}$ **(11**
	$D_f = \Re - \{1\}$ $f\,'(x) = -1+\dfrac{2}{(x-1)^2}$ $(x<3\,;\,x\in D_f)$ $f\,'(x) = 1+\dfrac{2}{(x-1)^2}$ $(x\geq 3\,;\,x\in D_f)$	$f(x) = \lvert x-3\rvert - \dfrac{2}{x-1}$ **(12**

	$D_f = \Re$ $f'(x) = \dfrac{x^3 + x}{\sqrt{x^2+1}}$	$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2+1}$ **(13**
	$D_f =]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{1 - x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$	$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ **(14**
	$D_f =]-\infty;-2] \cup]-1;1[\cup [2;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{3x}{(x^2-1)^2}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4}}$	$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}$ **(15**
	$D_f =]-\infty;0] \cup]1;+\infty[$ $f'(x) = -1 - \dfrac{1}{2(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$	$f(x) = -x + \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ **(16**
	$D_f = \Re - \{1\}$ $f'(x) = -1 - \dfrac{4}{(x-1)^2} \quad (x < -1 \,;\, x \in D_f)$ $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{(x-1)^2} \quad (x \geq -1 \,;\, x \in D_f)$	$f(x) = \lvert x+1 \rvert + \dfrac{x+3}{x-1}$ **(17**
	$D_f = \Re^*$ $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$	$f(x) = x^2 + 1 + \dfrac{2}{x}$ **(18**

مسائل الدوال العددية

مسألـــــــــــــــــــــــــــــــــة 01

لتكن الدالة f المعرّفة على $\Re-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) عين الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$.

4) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) الذي معادلته : $y=x-2$ مع التبرير؟.

5) حدد وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) وضع A نقطة تقاطعهما.

6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الموازي للمستقيم المقارب المائل (D).

7) أرسم (D) ؛ (T) و (C_f). ((خذ الوحدة $2cm$ على (ox) و $1cm$ على (oy))).

8) بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$. استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-1} للعدد α.

9) ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

10) نريد إيجاد نتيجة السؤال (5) باستعمال الحساب. بين أن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) : $(m+2)x^2-(2m+7)x+(m+4)=0$.

11) جد حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة (E).

☜ مسألـــــــــــــــــــــــــــــة 02

لتكن الدالة f المعرّفة على $\Re-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=|x+1|+\frac{x+3}{x-1}$.

(C_f)تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

☜ الجزء الأول :

1) أكتب f دون رمز القيمة المطلقة.

2) أدرس استمرارية الدالة f و قابلية اشتقاقها عند : $x=-1$.

3) فسّر النتيجة هندسيا.

☜ الجزء الثاني :

4) أدرس تغيرات الدالة f و شكّل جدول تغيراتها.

5) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

6) أثبت أن المستقيم $(\Delta)'$ ذو المعادلة : $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

7) عين معادلة المستقيم المقارب الثالث.

8) عين النقطة A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب (oy) ثم اكتب معادلة المماس (T) عند A.

9) أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل (ox) في نقطة وحيدة x_0 حيث : $-2<x_0<-\frac{3}{2}$.

أحسب بدقة x_0.

10) أرسم المستقيمات المقاربة ؛ المماس (T) ثم المنحنى (C_f).

☜ الجزء الثالث :

11) لتكن المستقيمات (D_m) ذات المعادلة : $y=mx+m+1$ حيث : m عدد حقيقي.

12) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة مستقلة عن m.

13) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات (D_m).

☜ مسألـــــــــــــــــــــــــــــة 03

☜ الجزء الأول :

لتكن الدالة f_m للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $D = \Re - \{-2;2\}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{x^2 + (m-2)x + m}{x^2 - 4}$.

حيث m وسيط حقيقي و (C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) عين الأعداد الحقيقية α ؛ β ؛ γ حيث من أجل كل $x \in D$ يكون : $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{4(x-2)} + \dfrac{\gamma}{4(x+2)}$.

2) بين أن كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثيتيها.

3) أحسب $f_m'(x)$ ثم عين قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها الدالة f_m :

أ) تقبل نهاية حدية واحدة ب) تقبل نهايتين حديتين صغرى و كبرى جـ) تتغير في نفس الاتجاه.

4) عين قيمة m_0 حتى يقبل (C_m) محور التراتيب محور تناظر.

☜ الجزء الثاني :

نعتبر الدالة المعرفة على $\Re - \{-2;2\}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 6}{x^2 - 4}$ نسمي (C) المنحنى الممثل لها.

1) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) ين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الموازية للمحورين.

3) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى مع المستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$ ؛ $y = 0$ ؛ $y = 1$.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند : $x_0 = 0$.

5) أرسم المستقيمات المقاربة ؛ المماس (T) و المنحنى (C).

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = \dfrac{m-1}{2}$.

☜ الجزء الثالث:

لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\Re - \{-2;2\}$ كمايلي : $h(x) = \dfrac{x^2 - 4|x| + 6}{x^2 - 4}$.

1) أكتب عبارة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2) أدرس استمرارية و قابلية اشتقاق الدالة h عند $x_0 = 0$؟ فسّر هندسيا النتيجة ؟ بين أن الدالة h زوجية ؟.

3) اشرح كيفية رسم المنحنى (Γ) الممثل للدالة h من خلال المنحنى (C).

4) أرسم (Γ) في نفس المعلم.

☜ مسألـــــــــــــــــــــــــــــــة 04

☜ الجزء الأول :

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\Re^*$ كمايلي : $f(x)=x^2+1+\frac{2}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) نعتبر القطع المكافئ (Γ) الذي معادلته : $y=x^2+1$.

3) أحسب نهاية $\left[f(x)-(x^2+1)\right]$ عند $+\infty$ ثم $-\infty$ و فسر النتيجة بيانيا.

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ).

5) حل المتراجحة : $f(x)\geq 0$ و مثل المنحنى (C_f) و (Γ) .

☜ الجزء الثاني :

g دالة معرفة على المجال $D=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$. ((الوحدة : $1cm$)).

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال D .

2) أثبت أنه من أجل $x<-1$: $-\sqrt{\frac{x^2-x+2}{x(x+1)}}=\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$.

3) استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند -1 . فسّر بيانيا النتيجة.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند : $x_0=-1$.

5) بين أنه من أجل $x\in D$: $g(x)-x=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1+\frac{2}{x}}+x}$.

6) استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ مقارب لـ (C_g) عند $+\infty$.

7) استنتج أن المستقيم (Δ') الذي معادلته : $y=-x$ مقارب لـ (C_g) عند $-\infty$.

8) أحسب $g(-2)-2$. ماذا تستنتج بالنسبة لوضعية (C_g) و المستقيم المقارب (Δ').

9) أنشئ كلا من : (T) ؛ (Δ) ؛ (Δ') ؛ (C_g).

10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=\frac{1}{m}$.