التمرين 1

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ النقط $A(1;4)$, $B(3;2)$ و $C(\alpha;0)$

عين α حتى يكون:

① المثلث ABC قائم في B .

② النقط B, A و C على استقامة واحدة.

التمرين 2

$\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ شعاعان حيث $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

عين α و β في كل حالة من الحالات التالية:

① $\begin{cases}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=3\\ \|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{5}\end{cases}$ ② $\begin{cases}\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\\ \|\overrightarrow{v}\|=2\sqrt{2}\end{cases}$

③ $\begin{cases}\overrightarrow{u}\,/\!/\,\overrightarrow{v}\\ \|\overrightarrow{v}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

التمرين 3

عين قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ في كل حالة مما يلي:

① $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$

② $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}$

③ $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$

التمرين 4

في معلم متعامد ومتجانس $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ نعتبر النقط $A(5;2)$, $B(3;4)$ و $C(0;1)$.

① احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

② احسب الطولين AB و AC .

③ استنتج قيس الزاوية $\widehat{BAC}$ مدور إلى الوحدة.

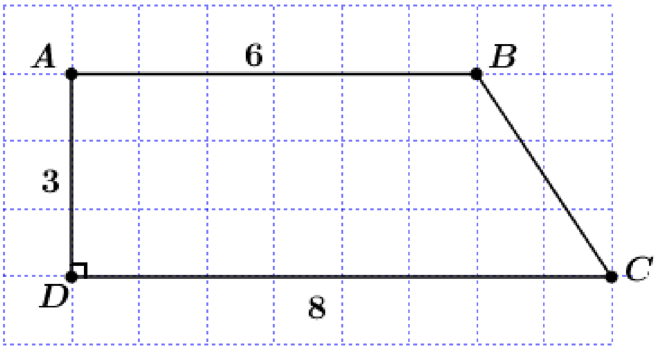
لتكن النقط $A'(1;1)$, $B'(3;4)$ و $C'(3-k;-1)$ حيث $k\in\mathbb{R}$

④ عين قيمة k حتى يكون المثلث $A'B'C'$ قائم في A' .

⑤ برهن أنّ المثلث $A'B'C'$ متساوي الساقين .

التمرين 5

$ABCD$ شبه منحرف حيث $AD=3cm, AB=6cm$ و $DC=8cm$ كما هو موضح في الشكل المرفق.



ⓐ احسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

ⓑ احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ثم استنتج قيمة مقربة لقيس الزاوية $\widehat{ACB}$

(يمكن استعمال الإسقاط العمودي في حل التمرين)

التمرين 6

اكتب معادلة المستقيم (D) الذي يشمل $A(1;2)$ ويوازي المستقيم ذو المعادلة $y=3x-4$.

② اكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل $B(2;4)$ ويعامد الشعاع $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$

التمرين 7

احسب المسافة بين النقطة M والمستقيم (D) في الحالات التالية:

① $M(1;3)$ $(D):\ y=2x-3$

② $M(-2;\sqrt{3})$ $(D):\ x=y-2$

③ $M(4;-2)$ $(D):\ x=0$

④ $M(5;3)$ $(D):\ y=0$

⑤ $M(\sqrt{2};\frac{1}{3})$ $(D):\ 5x+\sqrt{3}y-2=0$

التمرين 8

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ النقطة $A(1;\frac{5}{2})$ والمستقيم (D) ذو المعادلة $4x+3y-1=0$.

① عين معادلة المستقيم (Δ) العمودي على (D) والذي يشمل A

② عين احداثي نقط تقاطع (D) مع (Δ) .

③ استنتج المسافة بين A و (D) .

التمرين 9

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ المثلث ABC حيث $A(5,-2)$, $B(1;-2)$ و $C(4;4)$.

① عين معادلة الارتفاع المار من A .

② عين معادلة الارتفاع المار من B .

③ عين احداثي نقط تقاطع الارتفاعات.

④ عين معادلة لمجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ محددا عناصرها المميزة.

④ أثبت بطريقتين مختلفتين أنّ النقطة $D(4,0)$ لا تنتمي لمجموعة النقط M .

التمرين 10

عين احداثيي نقط تقاطع (C) مع (D) في الحالات التالية :

① $\begin{cases} (C): & x^2-2x+y^2-2y=2 \\ (D): & y=x-1 \end{cases}$

② $\begin{cases} (C): & x^2-8x+y^2+4y=5 \\ (D): & x+y-3=0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} (C): & (x-10)^2+(y-4)^2=25 \\ (D): & x+3y=17 \end{cases}$

③ $\begin{cases} (C): & (x-10)^2+(y-4)^2=25 \\ (D): & (x-10)^2+(y+4)^2=25 \end{cases}$

التمرين 11

في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، (C) هي الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-2x+4y=-1$

و T نقطة احداثياتها $T(3,4)$.

① عين احداثيي النقطة Ω مركز الدائرة (C) ونصف قطرها .

② ارسم الدائرة (C) والنقطة T .

③ ارسم من T المماسين للدائرة (C) ولتكن A و B نقطتي التماس .

④ بين أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى الدائرة (C') التي قطرها $[\Omega T]$.

⑤ أعط معادلة الدائرة (C') .

⑥ عين احداثيي A و B ثم أعط معادلة لكل مماس.

التمرين 12

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر الدائرتين المعرفتين بمعادلتيهما الدكارتيتين التاليتين:

$(C)\quad x^2+y^2+4x-y-2=0$

$(C')\quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}-2x-2y-\frac{7}{3}=0$

① عين مركز ونصف قطر كل من (C) و (C') .

② برهن أنّ (C) و (C') متقاطعتين ثم عين احداثيي A و B نقطتي تقاطعهما.

③ برهن أنه في كل نقطة من النقطتين A و B المماسين للدائرتين (C) و (C') هما مستقيمان متعامدان.

التمرين 13

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط $B(0;1), A(-1;2)$ و $C(-2;0)$ و (C) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق :

$$x^2+y^2-2x-2y-8=0$$

① تأكد أنّ $C\in(C)$ ثم بين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $3x+y+6=0$ مماس للدائرة (C) في C .

② احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC .

③ حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C') المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين 14

✓ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $4x+3y=0$.

① عين مجموعة النقط M ولتكن (C)، ثم أرسم (C) و (Δ) .

② أنشىء (Δ_1) و (Δ_2) مماسي الدائرة (C) الموازيين للمستقيم (Δ) .

③ أكتب معادلة المستقيم (d) المار بمركز الدائرة (C) والعمودي على المستقيم (Δ) .

④ أثبت أنّ المستقيم (d) يقطع الدائرة (C) في نقطتين A و B تطلب إحداثياتهما (لتكن A ذات الإحداثيات الموجبة).

⑤ استنتج معادلة لكل من الماسين (Δ_1) و (Δ_2) .

⑥ أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

⑦ ليكن التحاكي h الذي مركزه $D(8,1)$ ونسبته -3 .

- أكتب معادلة المستقيم (d') صورة المستقيم (d) بالتحاكي h .
- أكتب معادلة الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بالتحاكي h .
- أحسب محيط ومساحة الدائرة (C') .

✓✓ لتكن النقطتان $B'(0,3), A'(6,0)$ و k عدد حقيقي ولتكن (Γ_k) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي بحيث:

$MA'^2+MB'^2+MO^2=k$ (O مبدأ المعلم).

أثبت أنّ $M(x,y)$ نقطة من (Γ_k) إذا كان

$x^2+y^2-4x-2y+15=\frac{k}{3}$

ثم ناقش حسب قيم k طبيعة (Γ_k) .

التمرين 15

m عدد حقيقي و (D_m) مستقيم معادلته

$$(2m+1)x-(m-3)y+1=0$$

✓ عين قيمة m بحيث:

- المستقيم (D_m) يشمل النقطة $A(-1;4)$.
- المسافة بين النقطة $H(2;-3)$ والمستقيم (D_m) معدومة.
- المستقيم (D_m) عمودي على المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x+y+2=0$.

التمرين 16

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق :

$$x^2+y^2-6x-6|y|=-2$$

① عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أرسمها في المعلم المذكور.

(حاول كتابة (Γ) دون رمز القيمة المطلقة)

التمرين 17

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقط $A(3;1)$, $B(1;-1)$ و $C(-1,1)$ و (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق :

$$x^2+y^2-2x-6y+2=0$$

① برهن أنّ مجموعة النقط (E) هي دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة .

② تأكد أنّ $A\in(E)$ ثم أكتب معادلة المماس (T) لـ (E) في A .

③ أكتب معادلة المستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (CB) .

④ أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $H(4,-4)$ ويعامد المستقيم ذو المعادلة $x+y=0$.

⑤ عين وضعية المستقيم (Δ) بالنسبة لـ (E) .

التمرين 18

ABC مثلث حيث $AB=20cm$, $AC=28cm$ و $BC=32cm$

① أوجد قياسات للزوايا $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ بالتقريب إلى 10^{-1} .

② أحسب طول الرتفاع المار من A .

③ أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين 19

ABC مثلث حيث $AC=4cm$, $\widehat{B}=45°$ و $\widehat{C}=75°$.

• أحسب AB و AC .

التمرين 20

① برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :
$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:
$\cos 2x-3\cos x+2=0$.

② ليكن α عدد حقيقي من المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ حيث

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

• تحقق أنّ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$، ثم أحسب $\cos 2\alpha$.

• استنتج قيمة α ثم عين القيمة المظبوطة للعددين $\cos(4\alpha-1356\pi)$ و $\sin(4\alpha+2019\pi)$.

② أثبت أنه من أجل كل $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$ فإنّ $\tan x=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ ،
ثم استنتج قيمة $\tan\dfrac{\pi}{8}$ و $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

التمرين 21

① بسط العبارة F حيث :
$F(x)=\cos 5x\cos 3x+\sin 5x\sin 3x$.

ثم استنتج $F(\dfrac{\pi}{8})$.

② أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ
$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{4})$.

③ أثبت أنه من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}$ فإنّ
$1+\cos\alpha+\sin\alpha=2\cos\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2})$.

④ أحسب $\cos 2x$ في كل حالة من الحالات التالية :

$\sin x=\dfrac{-1}{3}$ $\qquad$ $\cos x=\dfrac{3}{5}$ $\qquad$ $\cos x=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

التمرين 22

تحقق من صحة المساوايات التالية :

$$(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$$
$$\cos x+\cos(\frac{2\pi}{3}+x)+\cos(\frac{4\pi}{3}+x)=0$$
$$2\cos(a+b)\cos(a-b)=\sin 2a-\sin 2b$$
$$1+2\cos x+\cos 2x=2\cos x(1+\cos x)$$

التمرين 23

a و b عددان من المجال $[0;\frac{\pi}{2}]$ يحققان $\sin a=\dfrac{1}{2}$
$\sin b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

① أحسب $\cos a$ وتحقق أنّ $\cos b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

② أحسب $\cos(a+b)$ و $\sin(a+b)$.

③ استنتج قيمة $a+b$ ثم b .

التمرين 24

ليكن x عددا حقيقيا :

① أثبت أنّ $8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=8\sin x$.

② أثبت أنّ $\sin\dfrac{8\pi}{7}=-\sin\dfrac{\pi}{7}$ ثم استنتج أنّ :
$\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}=\dfrac{-1}{8}$.

② أثبت بأسلوب مماثل أنّ $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{1}{8}$.

التمرين 25

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقطتين $A(-3;-1)$ و $B(5;3)$ ولتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي يكون عندها الشعاعان $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ متعامدين.

معناه $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})=0$.

• أكتب بدلالة x و y مركبات الشعاعين $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$.

• عين طبيعة (Γ) وأعط عناصرها المميزة.