التمرين 1

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بعلاقة تراجعية u_{n+1} بدلالة u_n :

- أحسب الحدود u_2, u_1 و u_3 في كل حالة من الحالات التالية :

$u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 2$ ، $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

$u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 2} + 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{|2 - u_n| + 1}$

$u_{n+1} = \cos(\dfrac{(u_n - 3)\pi}{3})$ ، $u_{n+1} = 5u_n^2 - 3$

التمرين 2

أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية

$u_n = \dfrac{2+n}{n^2}$ ، $u_n = n^2 + 3$

$u_n = \dfrac{(\sqrt{3})^n}{n+1}$ ، $u_n = 3n - 5$

$u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2}$ ، $u_n = \dfrac{n+3}{2n+5}$

$u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n-3}}$ ، $u_n = 3^{n^{2n}}$

التمرين 3

لتكن (u_n) متتالية حسابية .

أوجد الحد الأول والأساس في كل حالة مما يلي :

✓① $u_7 = 24, u_3 = 12$ ② $u_{11} = -21, u_5 = -9$

③ $u_8 = 13, u_3 = \dfrac{11}{2}$

✓✓ أوجد ستة أعداد فردية متتابعة علما أنّ مجموعها يساوي 49

✓✓✓ أحسب مجموع مضاعفات العدد 3 المحصورة بين 330 و 939 .

التمرين 4

لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$u_0 = -2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ نضع $4u_{n+1} - 2u_n = 9$ ولتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2u_n - 9$.

① أحسب الحدود u_2, u_1 ثم v_1, v_0 و v_2 .

② بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

③ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ، ثم استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

④ أحسب بدلالة n المجموعين:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

التمرين 5

(u_n) متتالية معرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$

و (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

① مثل الحدود u_2, u_1, u_0 و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها.

② أعط تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) .

③ بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

④ عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

⑤ أدرس اتجاه تغيرات المتتالية v_n ثم u_n .

⑥ أحسب نهاية (v_n) ثم استنتج نهاية (u_n) .

التمرين 6

أوجد ثلاثة أعداد b, a و c متتابعة من متتالية حسابية بحيث:

$a + b + c = 15$ و $a^2 = b^2 + c^2 = 83$.

التمرين 7

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 وأساسها $q = 3$ حيث:

$$u_1.u_2.u_3 = 216$$

1. تأكد أنّ $6^3 = 216$ ثم أحسب u_2 ، استنتج قيمة u_1 .
2. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة u_1 .
3. أحسب S_n حيث $S_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$
4. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم كما يلي: $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$
   - أحسب v_3, v_2 و v_4
5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $w_n = \dfrac{v_n}{u_n} - \dfrac{2}{3}$
   - بين أنّ (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_1 .
   - أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين 8

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_n = 2^n$ ، $v_n = 3n - 7$.

1. أثبت أنّ (u_n) متتالية هندسية و (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيي الحد الأول وأساس كل منهما؛
2. أحسب بدلالة n المجاميع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S''_n = (-6) + (-2) + \dots\dots\dots\dots + (2^n + 3n - 7)$$
$$T_n = u_0.u_1.u_2 \dots\dots\dots\dots u_{n-1}.u_n$$
$$T'_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{u_n}$$
$$T''_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots\dots\dots\dots + u_n^2$$

التمرين 9

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها الأول $u_0 = -2$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{3}u_n - 2$.

1. بين أنّ (v_n) متتالية حسابية .

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n = 2u_n + 5v_n$.

2. بين أنّ (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

التمرين 10

لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ ،والمتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$.

1. بين أنّ (v_n) متتالية حسابية ثم أحسب حدها الأول v_0
2. أوجد عبارة الحد العام v_n ثم u_n بدلالة n .
3. أحسب نهاية (v_n) ثم (u_n) .

التمرين 11

أجرة أستاذ تزداد بإنتظام كل سنة بـ 5% .

فإذا كانت أجرته في سنة 2009 هي $15000DA$.

فكم عدد السنين حتى يتضاعف الأجر.

التمرين 12

لتكن (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بالعلاقة: $2nU_{n+1} = (n+1)U_n$ و $u_1 = 1$ بحيث حدودها موجبة.

① أحسب u_3, u_2 و u_4 .

② بين أنّ (u_n) متتالية متناقصة.

③ نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n}{n}$.

- بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q .
- أدرس نهاية المتتالية (v_n) .
- عبر عن u_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية (w_n) المعرفة بـ: $w_n = \frac{u_n}{n+1}$.

التمرين 13

✓ نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_3 = 8$ $\qquad$ $u_8 = 18$.

① عين الحد الأول وأساس المتتالية (u_n) ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

② هل العدد 7968 حد من حدود المتتالية.

③ أحسب المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_{n+1}$

ثم أوجد n بحيث $S_n = 460$.

✓✓ لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{3} + 2 \end{cases}$$

1. أرسم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المنصف الأول والتمثيل البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (v_n)، ثم مثل على محور الفواصل الحدود v_3, v_2, v_1, v_0 و v_4 دون حسابها.
2. ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (v_n) .

✓✓✓ نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = v_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

1.) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (w_n) متتالية هندسية وعين أساسها .

2.) نضع فيما يلي $\alpha = -3$

- بين أنّ (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم أكتب w_n بدلالة n .
- استنتج v_n بدلالة n
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .
- أحسب بدلالة n المجموعين:

$$S = w_1 + w_2 + \dots\dots\dots\dots + w_n$$
$$S = v_1 + v_2 + \dots\dots\dots\dots + v_n$$

التمرين 14

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \end{cases}$$

① أحسب u_3, u_2 و u_4 .

② نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم عبر عن v_n بدلالة n .
- استنتج نهاية (v_n) .

التمرين 15

لتكن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 وأساسها q حيث $q > 0$.

① عين الأساس q إذا علمت أنّ $v_0 = 3$ و $v_2 + v_4 = 60$.

② أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n+1}$

③ أحسب الجداء $P_n = v_0.v_1.........v_n.v_{n+1}$

التمرين 16

لتكن (v_n) متتالية معرفة كما يلي: $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3n + 2 \end{cases}$

ولتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_n = v_n - 3n - 1$.

① أثبت أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب u_n و v_n بدلالة n .

② أحسب المجاميع التالية بدلالة n :

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

$S''_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$

التمرين 17

أدرس تقارب المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

$u_n = \frac{3^n}{2^{n+2}}$ $\qquad u_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$

$u_n = 2(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}$ $\qquad u_n = 3 + (\frac{-2}{3})^n$

$u_n = \frac{3^n + 2^n}{5^n}$ $\qquad u_n = \frac{2^n + 7^n}{6^n}$

التمرين 18

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) بحيث من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n + 5)$.

① برهن أنه إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - 5)$.

② أكتب u_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n .

③ أحسب بدلالة n المجموعين:

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

التمرين 19

لتكن (v_n) متتالية معرفة كما يلي: $v_0 = 2$ و $v_1 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $\quad v_{n+2} = (\alpha + 1)v_{n+1} - \alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم

ولتكن (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي بالعبارة: $u_n = v_{n+1} - v_n$.

① برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية .

② أوجد عبارة u_n بدلالة n و α

③ أحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n و α

التمرين 20

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 6n \end{cases} \qquad u_n = v_n - 3n^2$

① أحسب v_1 و v_2 ثم استنتج أنّ (v_n) لا هي حسابية ولا هي هندسية.

② بين أنّ المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

③ أثبت أنّ (u_n) متتالية حسابية ثم عين أساسها وحدها الأول.

④ عين عبارة u_n ثم v_n بدلالة n .

⑤ أحسب بدلالة n المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ثم عين قيمة n حتى يكون $S = -90$.

التمرين 21

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 .

① عين الأساس r والحد الأول u_0 إذا علمت أنّ $u_{15} = 52$ و $u_0 + u_1 + ... + u_{15} = 472$

① عين عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم أحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{999}$.

التمرين 22

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ الدائرة (C_0) التي مركزها O ونصف قطرها $15\ cm$ والدائرة (C_1) التي مركزها O ونصف قطرها $\frac{1}{4}15\ cm$ والدائرة (C_2) التي مركزها O ونصف قطرها $(\frac{1}{4})^2 15\ cm$ وهكذا.

① أنشىء $(C_0), (C_1), (C_2)$ و (C_3) .

② نرمز ب p_n لمحيط الدائرة (C_n) .

- بين أنّ (p_n) متتالية هندسية يطلب تعيينها .
- ماهو محيط كل الدوائر المرسومة.(حتى (C_n))
- هل هذا المحيط له نهاية لما n يؤول إلى $+\infty$.

③ نرمز بـ A_n لمساحة الدائرة (C_n) .

- بين أنّ (A_n) متتالية هندسية يطلب تعيينها .
- ماهي مساحة كل الدوائر المرسومة.(حتى (C_n))
- هل هذه المساحة لها نهاية لما n يؤول إلى $+\infty$.

التمرين 23

a, b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{8} \qquad a.b.c = 64$

عين الأعداد الحقيقية a, b و c .