ثانوية ماطي أحسن

الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

من إعداد و تحضير: الأستاذة: لهليلي هاجرة

بسم الله الرحمن الرحيم

عناصر الدرس

1. الكفاءات المستهدفة
2. مقدمة
3. حلول الأنشطة ص210
4. الزوايا الموجهة
5. خواص الزوايا الموجهة
6. حساب المثلثات
7. جيب تمام و جيب الزوايا المرافقة
8. المعادلات المثلثية
9. الاحداثيات القطبية
10. أعمال تطبيقية (استعمال الالة الحاسبة البيانية)
11. تمارين محلولة
12. تمارين مقترحة
13. المراجع

الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

1. الكفاءات المستهدفة:

1. استعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا.
2. تعيين أقياس زاوية موجهة لشعاعين.
3. توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب تمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.
4. حل معادلات و متراجحات مثلثية.

2. مقدمة:

- ❖ يعتمد هذا الفصل على المعارف السابقة(الدائرة المثلثية, لف المجموعة R على الدائرة المثلثية, الراديان, الدالتين sin و cos.

أهم النقط التي تعالج خلال هذا الفصل هي:

- ❖ تعليم نقطة على الدائرة المثلثية بعدد معرف بتقريب مضاعف للعدد 2π.
- ❖ مفهوم الزاوية الموجهة(نعرف القياس إنطلاقا من التعليم على الدائرة دون اللجوء إلى الأقواس الموجهة).
- ❖ التعليم القطبي لنقطة M , OM=r(cosi+sini).

(الإنتقال من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية و العكس,حل معادلات مثلثية بسيطة).

- ❖ دساتير الجمع بلإستعمال التعليم القطبي.
- ❖ المتراجحات المثلثية البسيطة.
- ❖ أعمال تطبيقية :استعمال الحاسبة البيانية.

الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

نشاط 1 ص 210

الهدف من هذا النشاط تحويل الدرجات الى الراديان و العكس.

قيس بالدرجة	15	22.5	36	105	120	67.5	75	52.5	105	142.5
قيس بالرديان	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{24}$

نشاط 2 ص 210

الهدف هو تعيين صور أعداد حقيقية على الدائرة المثلثية.

1- C هي نظيرة A بالنسبة إلى O.

2- B هي نظيرة A بالنسبة إلى محور التراتيب (OJ).

3- D نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل (OI)

4- E نظيرة A بالنسبة إلى منتصف الزاوية $\widehat{IOA}$

5- F نظيرة E بالنسبة إلى محور التراتيب (OJ).

6- G نظيرة A بالنسبة إلىO .

7- H نظيرة E بالنسبة إلى محور الفواصل (OJ) .

قيس الزاوية	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$-x$	$\frac{3\pi}{2} -x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$x - \frac{\pi}{2}$
النقطة المرفقة	B	F	D	G	C	E	H

تعلم النقطة M صورة $\left(\pi - \frac{5}{2} x\right)$ على الدائرة المثلثية

$$\pi - \frac{5}{2} x = \pi - (2.5x)$$

M تقع في منتصف القوس $\widehat{FJ}$

الزوايا

تذكير

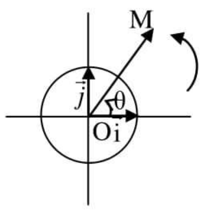
$(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ معلم متعامد و متجانس .

الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

-الدائرة المثلثية هي دائرة موجهة مركزها O و نصف قطرها 1 و طولها 2π.

- يمكن إختيار اتجاهها للحركة على هذه الدائرة , و هو إما الإتجاه المباشر (الموجب) و إما الإتجاه غير المباشر (السالب)

- النقطة M من هذه الدائرة يقابلها العدد الحقيقي α الذي يمثل طول القوس $\widehat{AM}$.



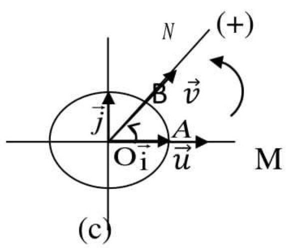
و هو أيضا القيس بالراديان للقوس الموجهة $\widehat{AM}$, أو قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM})$ أي $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}) = \theta\ (rad)$

توجيه المستوى

معناه إختيار إتجاه واحد للحركة على جميع دوائر هذا المستوى , اصطلاحا نختار الإتجاه المباشر.

1- الزاوية الموجهة لشعاعين غير معدومين

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين , (c) الدائرة المثلثية ذات المركز O , لتكن M و N لنقطتين من المستوى حيث : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$; $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$



المستقيم (OM) يقطع (c) في A.

و المستقيم (ON) يقطع (c) في B .

الثنائية $(\vec{u}\,,\vec{v})$ تسمى الزاوية الموجهة لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

تعريف

$(\vec{u}\,,\vec{v})$ هي نفسها الزاوية الموجهة بنصفي المستقيمين (OM ; ON) و أقياسها هي أقياس الزاوية الموجهة الزاوية $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$ على الدائرة (C).

اذا كان x قيس الزاوية $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$ بالراديان فإن أقياس الزاوية $(\vec{u}\,,\vec{v})$ هي $x+2k\pi$ حيث $(k\in Z)$ و نكتب $(\vec{u}\,,\vec{v}) = x + 2k\pi$

القيس الرئيسي

من أجل كل الأقياس من الشكل $x+2k\pi$ $(k\in Z)$ يوجد قيس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi\,,\pi]$ و يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}\,,\vec{v})$.

نتائج

1- القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u}\,,\vec{u})$ هو : 0 (الزاوية المعدومة) .

2- القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u}, -\vec{u})$ هو : π (الزاوية المستقيمة).

3- القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو : $\frac{\pi}{2}$.

4- القيس الرئيسي للزاوية القائمة غير المباشرة هو : $\frac{-\pi}{2}$.

5- اذا كان x القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$ فإن قيس الزاوية الهندسية المكونة من الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ هو $|x|$.

مثال1 أوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$ التي قيسها α (rad) في كل الحالتين :

1/ $\alpha = 2006$ rad

2/ $\alpha = \frac{65\pi}{3}$ rad

الحل

1/

لدينا $\alpha = 2006$ rad , ليكن القيس الرئيسي θ للزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ حيث : $\theta = \alpha + 2k\pi$

بالتعويض نجد : $\theta = 2006 + 2k\pi$ $\quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

إيجاد القيس الرئيسي :

$$-\pi < 2006 + 2k\pi \leq \pi$$

و منه :

$$\frac{-\pi-2006}{2\pi} < k \leq \frac{\pi-2006}{2\pi}$$

$$-319.92 < k \leq -318.92$$

و منه : $k = -319$

$$\theta = 2006 + 2(-319)\pi$$

$$= 2.68 \text{ rad}$$

و منه القيس الرئيسي هو : 2.68 rad

2/ $\alpha = \frac{65}{3}\pi$ rad

ليكن القيس الرئيسي θ_1 للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\theta_1 = \alpha + 2k\pi = \frac{65}{3}\pi + 2k\pi$$

لكن : $-\pi < \theta \leq \pi$

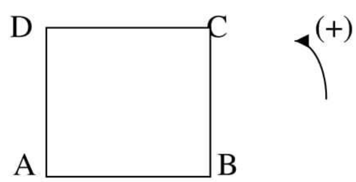
و منه : $-\pi < \frac{65}{3}\pi + 2k\pi \leq \pi$

$$-11.33 < k \leq -10.33$$

و منه : $k = -11$

$$\theta_1 = \frac{65}{3}\pi + 2(-11)\pi = \frac{-\pi}{3}$$

إذن : $\theta_1 = \frac{-\pi}{3}$



مثال 2

ABCDمربع مباشر .

1/ عين قيسا للزوايا الموجهة التالية :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}),\ (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}),\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$$

الحل

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\ (\text{rad})$$

$$(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}) = \frac{-\pi}{2}\ (\text{rad})$$

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -[\ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\ ]$$

$$= \frac{-3\pi}{4}\ (\text{rad}).$$

2- خواص الزوايا الموجهة

علاقة شال

مبرهنة : من أجل كل ثلاثة أشعة غير معدومة $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ لدينا :

$$(\vec{u},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$$

نتائج

1) $(\vec{u};\vec{v}) = -(\vec{v};\vec{u})$

2) $(-\vec{u}\,;\,-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v})$

3) $(-\vec{u}\,;\,\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi$

4) $(\vec{u}\,;\,-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi$

خاصية1:

$\vec{u}\,,\vec{v}\,,\overrightarrow{u'}$ و $\overrightarrow{v'}$ أشعة من المستوى غير معدومة , ليكن α القيس (بالراديان) للزاوية $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ و α'

قيس(بالراديان) للزاوية $(\overrightarrow{u'}\,,\,\overrightarrow{v'})$.

الزاويتان $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$, $(\overrightarrow{u'}\,,\,\overrightarrow{v'})$ متقايستان إذا و فقط إذا كان $\alpha' = \alpha + 2\,k\pi\,, k \in Z$

خاصية 2 : يكون الشعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان :

(1) $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = 2\,k\pi \qquad k \in Z$

(2) $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \pi + 2\,k\pi \qquad k \in Z$

يمكن كتابة العلاقتين (1) و (2) في علاقة واحدة هي :

$$(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = k\pi \quad (k \in Z)$$

نتيجة :

تكون النقط A , B , C من المستوى في إستقامية إذا و فقط إذا كان .

$$(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}) = k\pi \quad (k \in Z)$$

خاصية 03:

$\vec{u}\,,\,\vec{v}$ شعاعان غير معدومين k , k' عددان حقيقيان غير معدومان , إذا كان : k , k' من نفس الإشارة

$$(\overrightarrow{ku}\,,\overrightarrow{k'v}) = (\vec{u}\,,\,\vec{v})$$

إذا كان k , k' مختلفين في الإشارة :

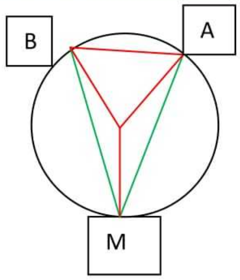
$$(\overrightarrow{ku}\,,\overrightarrow{k'v}) = (\vec{u}\,,\,\vec{v}) + \pi$$

خاصية الزاوية المحيطية

(C) دائرة مثلثية مركزها M,B,A,Oثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من(C)الزاوية الموجهة$(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB})$

الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

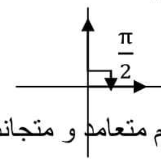
مبرهنة: إذا كانت A, B, M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها o و إذا كان α الموجهة للزاوية قيسا $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB})$. فإن $\frac{\alpha}{2}$ للزاوية قيس $(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB})$



3. الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

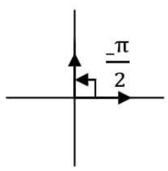
1- المعلم المتعامد و المتجانس المباشر و غير المباشر

يكون المعلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}\,)$ مباشر إذا كان :



$$(\vec{i}, \vec{j}\,) = \frac{\pi}{2}$$

يكون المعلم متعامد و متجانس غير مباشر إذا كان:



$$(\vec{i}, \vec{j}\,) = \frac{-\pi}{2}$$

2- جيب و جيب تمام زاوية موجهة

إذا كان α قيس (بالراديان) للزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\,)$ فإن أي قيس آخر يكتب على شكل

$\alpha + 2\pi k \ (k \in Z)$.

و منه α و $\alpha + 2\pi k$ يرفقان بنفس النقطة M أي أن :

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k) \qquad k \in Z$$

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k) \qquad k \in Z$$

جيب الزاوية الموجهة $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\,)$ هو جيب أحد أقياسها (بالراديان) و نكتب :

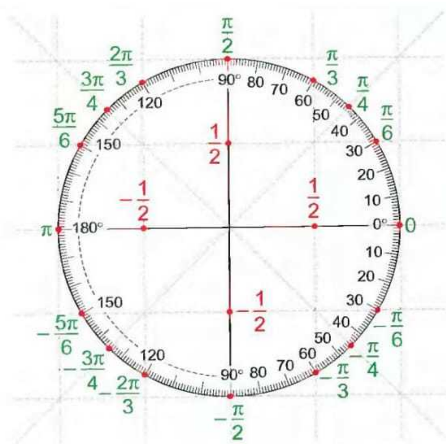
$$\sin(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\,) = \sin\alpha$$

3- جدول قيم جيب و جيب تمام أقياس الزوايا المألوفة

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	Π
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	///	0
cotanα	///	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	///

4/ تمثيل بعض النقاط الأساسية على الدائرة المثلثية



5-تذكير ببعض العلاقات المثلثية

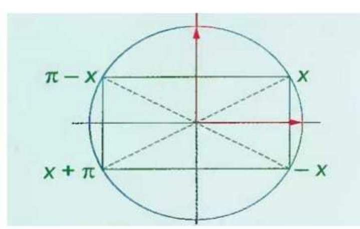
1.5.العلاقات الأساسية

x عدد حقيقي وk عدد صحيح.

- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ✍ — $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ✍
- $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ✍ — $(x \neq k\pi)\ \cot x = \frac{1}{\tan x}$ ✍
- $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ✍ — $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ✍
- $-1 \leq \text{six} \leq$ ✍ — $. -1 \leq \cos x \leq 1$ ✍

2.5.دساتير التحويل

ليكن x عدد حقيقي



$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \tan(\pi - x) = \tan x \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -cosx \\ \sin(\pi - x) = sinx \\ \tan(\pi - x) = -tanx \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \cos(-x) = cosx \\ \sin(-x) = -sinx \\ \tan(-x) = -tanx \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sinx \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cosx \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -cotanx \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cotanx \end{cases} \quad (5)$$

3.5.دساتير الجمع

- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- $\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x . \tan y}$
- $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y}$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$
- $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
- $\cos(2x) = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

4.5.تحويل المجموع إلى جداء

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y} \qquad \tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ حيث:

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6/ المعادلات المثلثية

1.6. معادلات من $\cos x = \alpha$

نعلم أن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

و منه نستنتج أن :

1/ لما $\alpha \notin [-1\,;1]$ فإن المعادلة $\cos x = \alpha$ ليس لها حلول في R .

2/ لما $\alpha \in [-1\,;1]$ فإنه يوجد عدد حقيقي b حيث :

$$\cos b = \alpha$$

بالتالي نجد :

معناه $\begin{cases} \cos x = \alpha \\ \alpha \in [-1\,;1] \end{cases}$ $\cos x = \cos b$

أي : $\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ x = -b + 2k\pi \end{cases}$ أو

مجموعة حلول المعادلة $\cos x = \alpha$ هي :

$S = \{b + 2k\pi\ ;\ -b + 2k\pi\ ; k \in Z\}$

صور حلول هذه المعادلة هما نقطتين متناظرتين بالنسبة لمحور الفواصل .

مثال

حل في R المعادلة $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

الحل

نعلم أن : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ معناه :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x' = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \qquad (k \in Z)$$

و منه :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ; \frac{-\pi}{6} + 2k\pi\ ; k \in Z\right\}$$

2.5. معادلات من الشكل $\sin x = \beta$

نعلم أن: $-1 \le \sin \le 1$ و منه:

1/ لما $\beta \notin [-1\ ;1]$ فإن المعادلة $\sin x = \beta$ ليس لها حلول في R.

2/ لما $\beta \in [-1\ ;1]$ فإنه يوجد عدد حقيقي a حيث $\sin a = \beta$ و منه :

$\begin{cases} \sin x = \beta \\ \beta \in [-1\ ;1] \end{cases}$ معناه $\sin x = \sin a$

و معناه $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - a + 2k\pi\ (k \in Z) \end{cases}$

مجموعة حلول هذه المعادلة هما نقطتان متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب .

مثال

حل في R المعادلة $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

نعلم أن: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه : $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

3.5. المعادلات cosu = sinv

مثال حل في Rالعادلة

$$\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

و مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية .

الحل

لدينا : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ (دساتير التحويل)

و منه : $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -x \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ -x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ -x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} - \frac{2k\pi}{3} \\ \text{أو} \\ x = \frac{2\pi}{3} - 2k\pi \end{cases}$$

$k \in Z$

تمثيل الحلول على الدائرة المثلثية

ا) تعيين صور حلول المعادلة

لما $k = 0$

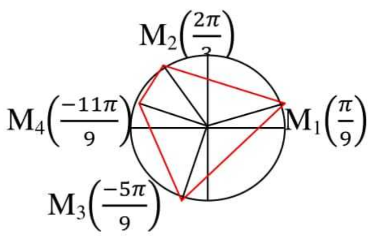
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

لما $k = 1$
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi - 6\pi}{9} = \frac{-5\pi}{9} \\ x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{-4\pi}{3} \end{cases}$$

لما $k = 2$
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} - \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{9} - \frac{12\pi}{9} = \frac{-11\pi}{9} \\ x = \frac{2\pi}{9} - 4\pi = \frac{10\pi}{3} \end{cases}$$

لما $k = 3$
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} - 2\pi = \frac{-17\pi}{9} \\ \text{أو} \\ x = \frac{2\pi}{3} - 6\pi = \frac{-16\pi}{3} \end{cases}$$

لتكن M_1 صورة $(\frac{\pi}{9} + 2k\pi)$



M_2 صورة $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$

M_3 صورة $(\frac{-5\pi}{9} + 2k\pi)$

M_4 صورة $(\frac{-11\pi}{9} + 2k\pi)$

و منه على الدائرة المثلثية صور حلول هذه المعادلة هي رؤوس الرباعي $(M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4)$

مجموعة حلول المعادلة $S = \left\{ \frac{\pi}{9} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{-5\pi}{9} + 2k\pi ; \frac{-11}{9}\pi + 2k\pi \right\}$

6/ حل متراجحات مثلثيه

1.6. متراجحات من الشكل $\cos x < a$; $\cos x > a$

مثال

حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المتراجحة $2\cos x < 1$ أي $\cos x < \frac{1}{2}$.

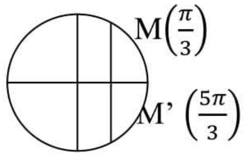
الطريقة 01

نعلم انه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث : $\cos a = \cos b = \frac{1}{2}$ و هما العددان $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

لتكن M صورة $\frac{\pi}{3}$ و ‘M صورة $\frac{5\pi}{3}$ و منه نستنتج أن النقط من الدائرة المثلّثية التي فواصلها أقل من

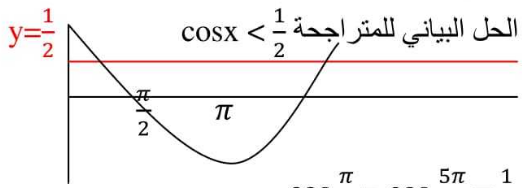
$\frac{1}{2}$ هي النقط الواقعة على القوس الكبيرة $\widehat{M\ M'}$



و منه مجموعة حلول المتراجحة هي : $S = \left]\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\right[$

الطريقة 02

بإستعمال الحل البياني للمتراجحة $\cos x < \frac{1}{2}$



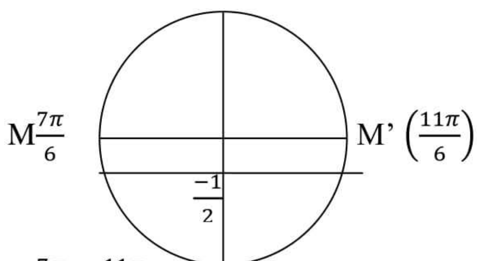
نعلم أن : $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

الحل البياني للمتراجحة $\cos < \frac{1}{2}$ هي خواص نقط منحنى الدالة $x \to \cos x$ الواقعة تحت المستقيم دو

المعادلة $J = \frac{1}{2}$ و منه $S = \left]\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\right[$

2.6. متراجحات من الشكل $\sin x < b$

مثال



حل في $]0.2\pi[$المتراجحة : $\sin x < \frac{-1}{2}$

الطريقة 1

نعلم أن يوجد عددان حقيقيان b و a حيث: $\sin a = \sin b = \frac{-1}{2}$ و هما العددان $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$ و منه:

$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6} = \frac{-1}{2}$ اذن النقط من الدائرة المثلثية التي تراتيبها أقل من $\frac{-1}{2}$ هي النقط الواقعة في

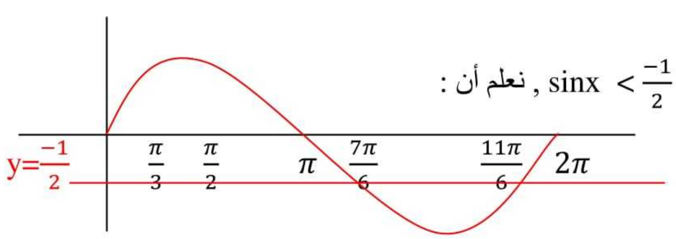
القوس الصغيرة $\widehat{M\ M'}$ حيث M صورة $\frac{7\pi}{6}$ و ‘M صورة $\frac{11\pi}{6}$و منه مجموعة حلول المتراجحة

هي $\left]\frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\right[$ = S .

الطريقة 2

باستعمال الحل البياني للمتراجحة $\sin x < \frac{-1}{2}$, نعلم أن :

$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6} = \frac{-1}{2}$



الحل البياني للمتراجحة $\sin x < \frac{-1}{2}$ هي فواصل نقط منحنى الدالة $u \to \sin x$ الواقعة تحت المستقيم

ذو المعادلة $y = \frac{-1}{2}$, و منه مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \left]\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right[$.

7/ الإحداثيات القطبية

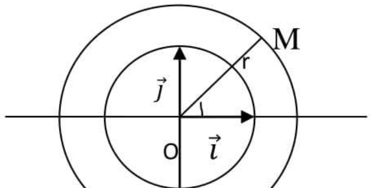
التعليم القطبي

تعريف ليكن $(O , \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد و متجانس و لتكن (c) الدائرة المثلثية التي مركزها O .

M نقطة من المستوى لا تنطبق على O , الإحداثيات القطبية للنقطة M هي الثنائية $M\ (r\ ;\ \theta)$ حيث :

θM = r

$\theta = (\vec{r}\ ;\ \overrightarrow{OM})$



r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي و نكتب $M(r\ ;\ \theta)$, النقطة تسمى θ القطب, المحور$(O , \vec{i})$

يسمى المحور القطبي ,θ تسمى الزاوية القطبية , r يسمى نصف القطر القطبي .

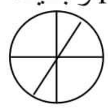
مثال

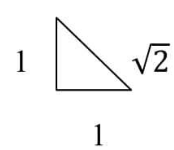
أنشئ النقطة M ذات الإحداثيات القطبية $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{4\pi}{3})$ في المستوى المنسوب إلى م . م . م $(O , \vec{i}, \vec{j})$.

الحل

النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها O , نصف قطرها $r = \sqrt{2}$ و بحيث $\theta\ (\vec{i}, \overrightarrow{OM}\ ) = \frac{4\pi}{3}$

$\frac{4\pi}{3}$





مبرهنة: في معلم مباشرم , م $(O , \vec{i}, \vec{j})$, لتكن(c) ,الدائرة المثلثية ذات المركز M, O نقطة من المستوى

لا تنطبق على O , إذا كانت احداثياها الديكارتية هي (x , y) و احداثياها القطبية (r , θ) فإن :

- $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x = r \cos\theta$
- $y = r \sin x\theta$

مثال المستوى م , م , م $(o , \vec{i}, \vec{j})$.

A(1) نقطة احداثياها القطبية $(2 , \frac{7\pi}{6})$ في المحور القطبي , عين احداثياها الديكارتية .

B(2) نقطة احداثياها الديكارتية $(-\sqrt{2} , \sqrt{2})$ عين احداثياها القطبية .

الحل 1/ تعيين الإحداثيات الديكارتية لدينا : $r = 2 \quad ; \quad \theta = \frac{7\pi}{6}$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

و $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

و منه : $\cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = \frac{-1}{2}$

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{7\pi}{6}$$

$$= 2(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$= 2\sin(\frac{-1}{2}) = -1$$

اذن $A(-\sqrt{3} ; -1)$.

2/ تعيين الإحداثيات القطبية

لدينا : $B(-\sqrt{2} ; \sqrt{2})$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اذن $B(2 , \frac{3\pi}{4})$ $\qquad \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

تمرين 88 ص 233

الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد و متجانس و $A(2, \frac{\pi}{3})$, OABC مربع حيث $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-\pi}{2}$

حساب هو التمرين من الهدف $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

1/ حساب : $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$

لدينا : $(\vec{i}, \overrightarrow{Oc}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi-3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$

و منه : $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-\pi}{2}$

2/ حساب الإحداثيات القطبية للنقطة C :

$C(OC, \alpha)$ حيث : $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-\pi}{6}$

$OC = OA = 2$

و منه : $C(2, \frac{-\pi}{6})$

* حساب الإحداثيات الديكارتية :

$\begin{cases} x = r\, cosx\theta \\ y = r\, sinx\theta \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} x = 2\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ y = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\,\frac{1}{2} = -1 \end{cases}$

و منه : $C(\sqrt{3}, -1)$

* حساب الإحداثيات الديكارتية للنقطة A :

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \\ y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$

أعمال تطبيقية

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس$(O; \vec{i}; \vec{j})$

الانتقال من الاحداثيات القطبية الى الاحداثيات الديكارتية

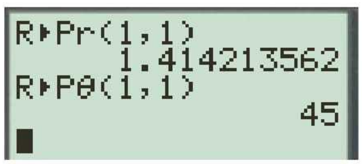
الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

لتعيين الحداثيات القطبية لنقطة علمت احداثياتها الديكارتية نختار في البداية الزاوية بالضغط على اللمسة MODE

ثم نختار الدرجة أو الراديان.

نضغط فيما بعد على 2nd ثم APPS و نختار 5 و نعيد العملية باختيار 6 ’ نحجز الإحداثيات ثم نصادق.

مثال

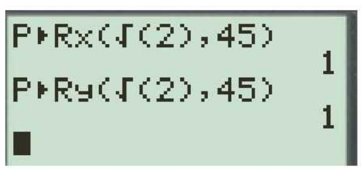


الاحداثيات القطبية للنقطة(1;1) هي (45; 1,45)

الانتقال من الاحداثيات الديكارتية الى الاحداثيات القطبية

بعد اختيار وحدة الزاوية نضغط على 2nd ثم APPS و نختار 7 و نعيد العملية باختيار 8’ نحجز الاحداثيات ثم نصادق.

مثال



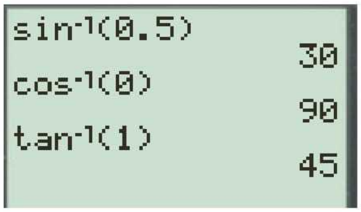
الاحداثيات القطبية للنقطة($\sqrt{2}$;45) هي (1;1).

تعيين زاوية علم جيبها,جيب تمامها أو ظلها

نختار في البداية وحدة الزاوية.

تعيين زاوية علم جيبها

نضغط على اللمسة 2nd ثم اللمسة sin و نحجز القيمة .



تعيين زاوية علم جيب تمامها

نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **cos** و نحجز القيمة.

تعيين زاوية علم ظلها

نضغط على اللمسة **2nd** ثم اللمسة **tan** و نحجز القيمة.

تمارين محلولة

التمرين الأول

حل في R المعادلات التالية:

① $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

② $2\sin x + \sqrt{2} = 0$

③ $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

④ $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$

التمرين الثاني

$f(x),g(x)$ عبارتان معرفتان كما يلي :

$f(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$

$g(x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$

اكتب $f(x),g(x)$ على شكل جداء ثم حل في R المعادلتين:

$f(x) = 0 \quad , \quad g(x) = 0$

التمرين الثالث

① احسب $\cos x$، $\tan x$ علما أن :

$\sin x = \dfrac{9}{41}$ و $\cos x < 0$.

② x,α عددان حقيقيان حيث: $\alpha = \sin x + \cos x$

احسب بدلالة α العبارتين:

$A = \sin x . \cos x$

$B = \cos^3 x + \sin^3 x$

التمرين الرابع

لتكن العبارة:

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin x} - \frac{\cos(5x)}{\cos x}$$

① عين D مجموعة تعريف العبارة $f(x)$.

② اكتب العبارة $f(x)$ بدلالة $\cos(2x)$ فقط.

③ * حل في R المعادلة $f(x) = -2$

* مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية.

التمرين الخامس

① حل في المجال $]-\pi,\pi]$ المتراجحة: $2\cos x - 1 \geq 0$.

② * احسب $(1+\sqrt{2})^2$

* حل في R المعادلة :

$$-4\sin^2 x + 4\cos x + 2 - 2\sqrt{2} = 0$$

التمرين السادس

① ليكن α عددا حقيقيا.

احسب $\cos(3\alpha)$ بدلالة $\cos \alpha$.

② حل المعادلة $8x^3 - 6x - \sqrt{3} = 0$ علما أنها تقبل ثلاث حلول من المجال $]-1,1[$.

التمرين السابع

حل في R المعادلات الآتية :

① $(6\cos^2 x + 8\cos x)(\cos(3x) - \sin x) = 0$

② $\tan(3x)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

③ $2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-3=0$

التمرين الثامن

x,y عددان حقيقيان موجبان يحققان: $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x.\tan y=3-2\sqrt{2} \end{cases}$

① احسب $\tan(x+y)$.

② استنتج :

أ/ $\tan x+\tan y$.

ب/ قيمتي $\tan x$, $\tan y$.

جـ/ قيمتي x,y.

التمرين التاسع

① نضع: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

* احسب $\cos(2\alpha)$.

* عين α علما أن $0<\alpha<\pi$.

② *حل المعادلة $\cos x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.ثم مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية.

التمرين العاشر

ليكن α,β,γ ثلاثة أعداد حقيقية.

① علما أن: $\tan\gamma=\dfrac{\sin\alpha+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\beta}$.

احسب γ بدلالة α و β.

② استخدم النتيجة السابقة لحل المعادلة:

$$\frac{\sin(3x)+\sin(5x)+\sin(7x)}{\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)}=\sqrt{3}$$

حلول التمارين

حل التمرين الأول

حل المعادلات :

① $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ معناه $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ أي $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

ومنه $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح.

مجموعة الحلول هي $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ حيث $k \in Z$: .

② $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ معناه $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. أي $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح

مجموعة الحلول هي : $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ حيث $k \in Z$: .

③ $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

نضع $t = \cos x$ فتصبح هذه المعادلة مكافئة للمعادلة :

$2t^2 - 5t - 3 = 0$ والتي حلولها $t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{2}$

ومنه $\cos x = 3$ (وهذا مستحيل) أو $\cos x = \frac{1}{2}$

cos x = $\frac{1}{2}$ معناه cos x = $\cos\frac{\pi}{3}$ومنه $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح.

مجموعة الحلول هي : $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ حيث $k \in Z$.

④ $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$

نضع t = sin x فتصبح هذه المعادلة مكافئة للمعادلة :

$t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0$ والتي حلولها $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 1$,

ومنه sin x = 1 أو sin x = $\frac{1}{2}$

sin x = 1 معناه sin x = $\sin\frac{\pi}{2}$ومنه $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح.

نلاحظ أن $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ و منه $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

sin x = $\frac{1}{2}$ معناه sin x = $\sin\frac{\pi}{6}$ ومنه $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

مجموعة الحلول هي : $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ حيث $k \in Z$: .

حل التمرين الثاني

① كتابة العبارتين على شكل جداء عاملين :

f(x) = sin x + sin(2x) + sin(3x) = sin(3x) + sin x + sin(2x)

$= 2\sin\left(\frac{3x + x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - x}{2}\right)$ +sin (2x)

$=2\sin(2x)\cos x+\sin(2x)$

$f(x)=\sin 2x\,(2\cos x+1)$.

$g(x)=\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)=\cos(3x)+\cos x+\cos 2x$

$+\cos(2x)\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)\quad=2$

$=2\cos(2x)\cos x+\cos(2x)$

$g(x)=\cos 2x\,(2\cos x+1)$.

② حل المعادلتين $f(x)=0$, $g(x)=0$.

لدينا $f(x)=0$ معناه $\sin(2x)(2\cos x+1)=0$ أي :

$\sin 2x=0$ أو $\cos x=-\frac{1}{2}$. $\sin(2x)=0$ معناه $x=k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$\cos x=-\frac{1}{2}$ معناه $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

مجموعة الحلول هي : $\left\{k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$ حيث : $k\in Z$

$g(x)=0$ معناه $\cos(2x)=0$ أو $\cos x=-\frac{1}{2}$.

$\cos(2x)=0$ معناه $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

$\cos x=-\frac{1}{2}$ معناه $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

مجموعة الحلول هي : $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$ حيث : $k\in Z$

حل التمرين الثالث

① حساب $\cos x$، $\tan x$:

لدينا $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ومنه $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ أو $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}$

وبما أن $\cos x$ سالب فإن $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}$ أي $\cos x=-\sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2}$

ومنه $\cos x = -\frac{40}{41}$.

لدينا $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ومنه $\tan x = -\frac{9}{40}$.

② كتابة A,B بدلالة α.

لدينا $\alpha^2 = (\sin x+\cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ ومنه $\alpha^2 = 1+2A$

أي: $A = \frac{\alpha^2-1}{2}$. كذلك :

$\alpha^3 = (\sin x+\cos x)^3 = \sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x$

$= B + 3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$

$= B + 3A\alpha$

$= B + 3\frac{\alpha^2-1}{2}\alpha.$

ومنه: $B = \alpha^3 - 3\alpha\frac{\alpha^2-1}{2} = \frac{-\alpha^3+3\alpha}{2}$.

حل التمرين الرابع

① تعيين مجموعة التعريف D:

D = {x∈R/sin x ☏ 0 , cos x ☏ 0}

$= \mathbb{R} - \{k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$

② كتابة f(x) بدلالة cos 2x:

$f(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin x} - \frac{\cos(5x)}{\cos x}$

$= \frac{\sin(5x)\cos x - \cos(5x)\sin x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin(5x-x)}{\sin x\cos x}$

$= \frac{\sin(4x)}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2\sin(2x)\cos(2x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)}$

$= 4\cos(2x).$

ومنه: $f(x) = 4\cos(2x)$.

③ حل المعادلة: $f(x) = -2$

$f(x) = -2$ معناه $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ أي $\cos 2x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ وبالتالي:

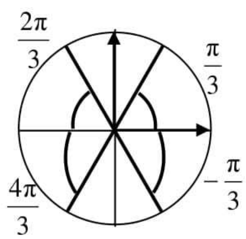
$\begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح .

* $k = 0$: $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{\pi}{3}$.

* $k = 1$: $x = \frac{4\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$.

بقية الحلول ناتجة عن هذه الحلول بإضافة $2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

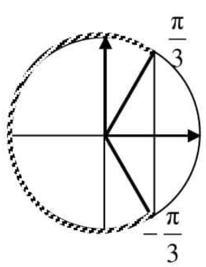
صور الحلول :



حل التمرين الخامس

① حل المتراجحة: $2\cos x - 1 \geq 0$. في المجال $]-\pi,\pi]$

$2\cos x - 1 \geq 0$ معناه $\cos x \geq \cos\frac{\pi}{3}$ ومنه $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ [انظر الشكل].



② حساب $(1+\sqrt{2})^2$: $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

حل المعادلة $-4\sin^2 x + 4\cos x + 2 - 2\sqrt{2} = 0$

معناه $-4\sin^2 x + 4\cos x + 2 - 2\sqrt{2} = 0$

$= 0\ \sqrt{2} - 4(1-\cos^2 x) + 4\cos x + 2 - 2$

ومنه $2 + 2 = 4\cos^2 x + 4\cos x\ \sqrt{2}$ أي $\sqrt{2}\ (2\cos x + 1)^2 = 3 + 2$

ومنه $+1)^2 = (1 + \sqrt{2}\ (2\cos x+1)^2$.أي $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$

نلاحظ أن القيمة الأخيرة أقل من -1 ومنه $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

مجموعة الحلول هي $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$.حيث k عدد صحيح.

حل التمرين السادس

① حساب $\cos(3\alpha)$ بدلالة $\cos\alpha$.

$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

② حل المعادلة $8x^3 - 6x - \sqrt{3} = 0$:

بما أن الحلول من المجال $]-1,1[$ فإنه يمكن وضع $x = \cos\alpha$.

ومنه: $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha - \sqrt{3} = 0$.

ومن السؤال السابق: $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3}{4}\cos\alpha$.

تصبح المعادلة: $8(\frac{1}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3}{4}\cos\alpha) - 6\cos\alpha - \sqrt{3} = 0$. أي: $\cos(3\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ومنه: $(k \in Z)$ $\begin{cases} 3\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ 3\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$. أي: $(k \in Z)$ $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \\ \text{أو} \\ \alpha = -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$.

* $k = 0$: $\alpha = \frac{\pi}{18}$ أو $\alpha = -\frac{\pi}{18}$. ومنه: $x = \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

* k = 1 : $\alpha = \frac{13\pi}{18}$ أو $\alpha = \frac{11\pi}{18}$. ومنه: $x = \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)$ أو $x = \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)$.

* k = 2 : $\alpha = \frac{25\pi}{18}$ أو $\alpha = \frac{23\pi}{18}$. ومنه:

$x = \cos\left(\frac{25\pi}{18}\right) = \cos\left(\frac{25\pi}{18} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{11\pi}{18}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)$.

أو $x = \cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) = \cos\left(\frac{23\pi}{18} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{13\pi}{18}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)$.

حلول المعادلة هي: $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$ ، $\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)$ ، $\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)$.

حل التمرين السابع

حل المعادلات:

① $(6\cos^2 x + 8\cos x)(\cos(3x) - \sin x) = 0$.........(1)

(1) معناه: $2\cos x(3\cos x + 4)(\cos(3x) - \sin x) = 0$.

ومنه: $\cos x = 0$، أو $\cos x = -\frac{4}{3}$ ، أو $\cos(3x) = \sin x$.

أي: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ أو $\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ معناه: $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases}$.

ومنه: $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$.

مجموعة الحلول هي: $(k \in \mathbb{Z})$ $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

② $\tan(3x) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.........(2)

مجموعة التعريف: $\cos(3x) \neq 0$ و $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$.

أي: $x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k}{3}\pi\ (k \in Z)$ و $x = \frac{\pi}{6}+k\pi\ (k \in Z)$. أي: $x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k}{3}\pi\ (k \in Z)$.

(2) معناه: $\tan(3x) = \tan\left(-x-\frac{\pi}{3}\right)$. أي: $3x = -x-\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k \in Z)$.

ومنه: $x = -\frac{\pi}{12}+\frac{k}{4}\pi\ (k \in Z)$ و $x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k}{3}\pi\ (k \in Z)$.

③ $2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-3=0.........(3)$

نضع: $z = \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. ومنه: $2z^2 + z - 3 = 0$.

المعادلة تقبل حلين: $-\frac{3}{2}$ (مرفوض)، 1 (مقبول).

ومنه: $2x-\frac{\pi}{3} = 2k\pi\ (k \in Z)$. ومنه: $x = \frac{\pi}{6}+k\pi\ (k \in Z)$.

حل التمرين الثامن

① $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x.\tan y = 3-2\sqrt{2} \end{cases}$. ومنه: $\tan(x + y) = 1$.

② أ/ استنتاج $\tan x + \tan y$:

لدينا: $\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$. ومنه: $1 = \frac{\tan x+\tan y}{-2+2\sqrt{2}}$.

أي: $\tan x+\tan y = -2+2\sqrt{2}$.

ب/ استنتاج قيمتي $\tan x , \tan y$:

$$\begin{cases} \tan x+\tan y = -2+2\sqrt{2} \\ \tan x.\tan y = 3-2\sqrt{2} \end{cases}.$$

ومنه: $\tan x , \tan y$ هما حلا المعادلة

$$z^2 - 2(1-\sqrt{2})z + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

ومنه: $\tan x = \tan y = 1-\sqrt{2}$.

جـ/ استنتاج قيمتي x,y:

$\tan x = \tan y$ معناه: $x = y + k\pi(k \in Z)$.

وبما أن $x+y = \frac{\pi}{4}$ فإن $2y+k\pi = \frac{\pi}{4}$.

ومنه: $y = \frac{\pi}{8} - \frac{k}{2}\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

ومنه: : $(k \in \mathbb{Z}^-)$ $y = \frac{\pi}{8} - \frac{k}{2}\pi$.(لأن y موجب).

وبالتالي: $(k \in \mathbb{Z}^+)$ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi$.

حل التمرين التاسع

① * حساب $\cos(2\alpha)$:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

* تعيين α:

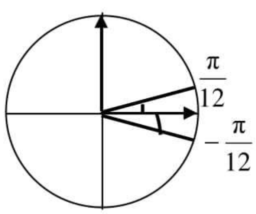
$\cos(2\alpha) = \cos\frac{\pi}{6}$. ومنه: $\alpha = \frac{\pi}{12}$ (لاحظ أن $0 < \alpha < \pi$).

② *حل المعادلة $\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$:

$\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ معناه: $\cos x = \cos\frac{\pi}{12}$.

ومنه: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$.

* تمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية:



حل التمرين العاشر

① $\dfrac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\beta} = \tan\gamma$.

ومنه: $\tan\gamma = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$.

أي: $\tan\gamma = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$.

ومنه: $\tan\gamma = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}(2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1)}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}(2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+1)}$. أي: $\tan\gamma = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

ومنه: $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}+k\pi\ (k\in Z)$.

② لدينا: $5x = \dfrac{3x+7x}{2}$ و $\sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3}$. ومنه: المعادلة من الشكل:

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin(3x)+\sin(\dfrac{3x+7x}{2})+\sin(7x)}{\cos(3x)+\cos(\dfrac{3x+7x}{2})+\cos(7x)}.$$

وبالتالي: $\dfrac{\pi}{3} = 5x+k\pi\ (k\in Z)$. أي: $x = \dfrac{\pi}{15}-k\pi\ (k\in Z)$.

يمكننا أن نكتب: $x = \dfrac{\pi}{15}+k\pi\ (k\in Z)$.

تمارين مقترحة

التمرين الأول

حل في R المعادلات التالية ثم مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية:

الزوايا الموجهة و حساب المثلثات

① $\sin(2x) = \cos x$

② $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

③ $\sin x = \cos(2x)$

④ $\tan(3x) = \tan(\pi - x)$

التمرين الثاني

x عدد حقيقي من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

① احسب $\cos x$, $\sin x$ مع العلم أن : $\tan x = \frac{3}{2}$

② بسط العبارة التالية:

$$A = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(x + 7\pi) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$$

استنتج قيمة A من أجل $x = \frac{\pi 5}{3}$.

التمرين الثالث

$$f(x) = 3\cos^2 x + \sin^2 x - 3\cos(2x)$$

① اكتب $f(x)$ بدلالة $\cos x$.

② ادرس إشارة $f(x)$.

③ حل في المجال $]0,2\pi]$ المتراجحة : $2\cos x - \sqrt{3} > 0$.

التمرين الرابع

$$f(x) = \cos^2 x + 2\cos x \cdot \sin x - \sin^2 x$$

① اكتب $f(x)$ بدلالة $\sin(2x)$ و$\cos(2x)$

② حل في R المعادلة : $f(x) = (\sqrt{3} - 1)\sin(2x) - 2$.

التمرين الخامس

① بسط العبارتين :

$$A = \cos\left(\frac{\pi 9}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) - \sin\left(x - \frac{31\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{19\pi}{2} - x\right)$$

$$B = 2\cos^4 x + 2\sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x$$

② حل في R المعادلة : $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$.

التمرين السادس

α عدد حقيقي، نعتبر الجملة ذات المجهول (x,y):

$$\begin{cases}(-\cos\alpha)x+(\sin\alpha)y=0\\(\sin\alpha)x+(\cos\alpha)y+1=0\end{cases}$$

① أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي α فإن الجملة تقبل حلا وحيدا.

② أوجد حل الجملة بدلالة α

③ M نقطة من المستوي إحداثياها هما حل الجملة.

أوجد قيم α التي من أجلها تكون النقطة M تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته

$y = x$ ثم مثل صور α على الدائرة المثلثية.

التمرين السابع

α عدد حقيقي من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

① احسب $\cos(2\alpha)$ ثم استنتج قيمة العددα.

② اكتب بدلالة $\sin(2\alpha)$ و$\cos(2\alpha)$ العبارة A حيث:

$A = \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 5\sin^2\alpha$

③ x_1,x_2 هما حلا المعادلة : $25x^2 - 35x + 12 = 0$.

نضع $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\beta$ حيث $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

احسب: $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$.

④ بسط العبارة :

$$B=\frac{\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)}{\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)}$$

التمرين الثامن

① عين E مجموعة النقط M(x,y) من المستوي التي تحقق : $x^2 + y^2 - x = 0$.

ارسم المجموعة E (نأخذ وحدة القياس هي 4cm).

② α عدد حقيقي من المجال $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ ، M(x,y) نقطة من المستوي حيث:

$$\begin{cases}x=\cos^2\alpha\\y=\sin\alpha.\cos\alpha\end{cases}$$

* احسب $x^2 + y^2$.

* عين مجموعة النقط M(x,y) عندما ما يتغير α في المجال $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

* I نقطة إحداثياها (1,0). برهن أن: $OI^2 + IM^2 = 1$.

③ لتكن النقاط: $A(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})$ ، $B(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})$ ، $C(\frac{1}{2},0)$ ما نوع المثلث ABC ؟

④ احسب $(\sqrt{3}+1)^2$ ثم حل في R المعادلة:

$$4\sin^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x - \sqrt{3} = 0$$

التمرين التاسع

لتكن العبارة: $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos(2x)$.

① برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = 2\sin^2 x$.

② حل في R المعادلة : $f(x) = \sin x$.

③ * عين مجموعة تعريف الدالة g حيث:

$$g(x) = \frac{\sin(2x) - \cos x}{1 - \cos(2x) - \sin x}$$

* بسط العبارة g(x)

التمرين العاشر

① x عدد حقيقي من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

احسب cos(2x) واستنتج أن $\cos(4x) = \sin x$.

② حل الجملة:
$$\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{4} \\ \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

المراجع

1. الكتاب المدرسي (سنة ثانية ثانوي: علوم تجريبية-رياضيات-تقني رياضي).2011-2012.
2. كتاب الأستاذ: سنة ثانية من التعليم الثانوي. الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية.
3. كتاب الوثائق المرافقة لبرامج الرياضيات' سنة ثانية ثانوي. ديسمبر 2005.
4. كتاب de Mathématiques 2éme « Déclic , 2004.
5. كتاب: برنامج الرياضيات للسنة الثانية من التعليم الثانوي للشعبة:علوم تجريبية. سبتمبر 2005.

مع تحيات مجموعة رياضيات التعليم الثانوي في الجزائر

الأستاذة لهليلي هاجرة