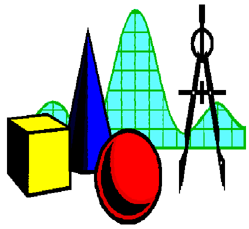
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تيارت

ثانوية بن براهيم زهرة – تخمارت – * تازقة*



كتاب المُثابر في الرياضيات

الشعب :– 01 جذع مشترك علوم وتكنولوجيا .

المحور رقم 04: الدوال المرجعية .

طبعة : 2016م/2017م.

إعداد الأستاذ : بوعزة مصطفى .

" اللهم عَلِمْنِي عِلماً يَنفعني وانفعني بما علمتني ، وزدني علماً على علم "

لا تنسونا بصالح الدعاء لي ولوالديا .

صدقة جارية.

الفهرس

المحور رقم 04 : الدّوال المرجعية (00ساعة)

مذكرة رقم: 01

المدة: 02ساعة	المحور: الدّوال المرجعية.	التاريخ: ربيع الأول 1438هـ الموافق لـ ديسمبر2016م
الأستاذ: بوعزة مصطفى	الموضوع: الدّالة "مربع" .	القسم: 01ج م ع تك

الكفاءات المستهدفة:

- تحديد اتجاه التغيّر والتمثيل البياني للدّالة $x \overset{f}{\mapsto} x^2$.
- توظيفها لدراسة بعض الدوال الأخرى.

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
الانطلاق بناء المفاهيم التقويم	(انظر أدناه)		

نشاط01: (نشاط رقم 01 ص84)

1. تعريف:

الدّالة "مربع" هي الدّالة التي تُرفق بكل عدد حقيقي x بمربعه x^2 .

ترميز: إذا رمزنا إليها بالرمز f ، نكتب: $f(x)=x^2$ و $D_f=\mathbb{R}$

أو $x \overset{f}{\mapsto} x^2$ أو $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \to f(x)=x^2$

أمثلة:

2 و-2 لهما نفس الصّورة بالدّالة مربع: $2^2=(-2)^2=4$.

2. اتجاه التغيّر:

نشاط02: أدرس اتجاه تغير الدالة "مربع" على $\mathbb{R}$.

الحل: دراسة اتجاه تغير الدالة "مربع" على $\mathbb{R}$:

ليكن a و b عددان حقيقيان.

نعلم أنّ(حسب قواعد ترتيب الأعداد) –إذا كان $a<b\leq 0$ فإنّ $a^2>b^2$ أي: $f(a)>f(b)$.

–إذا كان $0\leq a<b$ فإنّ $a^2<b^2$ أي: $f(a)<f(b)$.

الخلاصة:

الدالة "مربع" متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. جدول التغيّرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

حسب جدول التغيرات، الدّالة "مربع" تقبل قيمة حدية صغرى $f(0)=0$ تبلغها عند $x=0$.

تمرين 06، 10 ص106 .

4. دراسة شفعية الدالة "مربع":

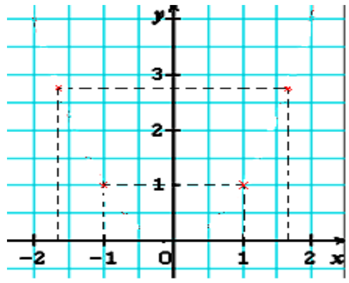
1/لدينا $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 .

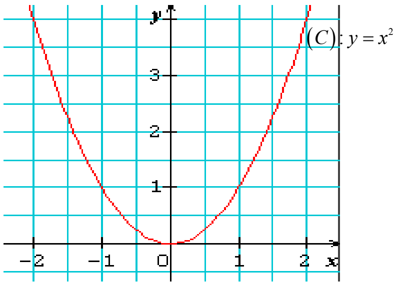
2/ولدينا $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

إذن:الدّالة "مربع" دالة زوجية، وبالتالي: منحناها متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

5. التمثيل البياني:

نحصل على التمثيل البياني للدالة "مربع" ليكن (C) في معلم متعامد $(O;I;J)$ وذلك بتمثيل بعض النقط ذات الإحداثيات $(x;x^2)$ كما هو موضح في الشكل:





ملاحظة:يسمى منحنى الدالة "مربع" بقطع مكافئ "parabole" معادلته $y=x^2$ ذروته O مبدأ المعلم.

تمرين 08 ص 106 .

6. إيجاد حصر للعدد x^2 إنطلاقا من حصر العدد x :

طريقة01 ص92:

يُمكن حصر مربع عدد حقيقي مُعطى *باستعمال اتجاه تغير الدالة "مربع"
*أو باستغلال تمثيلها البياني.

تمرين محلول من الكتاب المدرسي ص92 .

تطبيق01: جِد حصرا للعدد x^2 في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) $\frac{1}{2} \le x \le 1$ ؛ ب) $-4 < x \le -2$ ؛ جـ) $x \in [-3;1[$.

الحل: إيجاد حصرا للعدد x^2 :

أ) $\frac{1}{2} \le x \le 1$:

لدينا الدالة "مربع" متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ (لأنّ $\left[\frac{1}{2};1\right] \subset [0;+\infty[$)

ومنه: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le x^2 \le 1^2$ إذن: $\boxed{\frac{1}{4} \le x^2 \le 1}$.

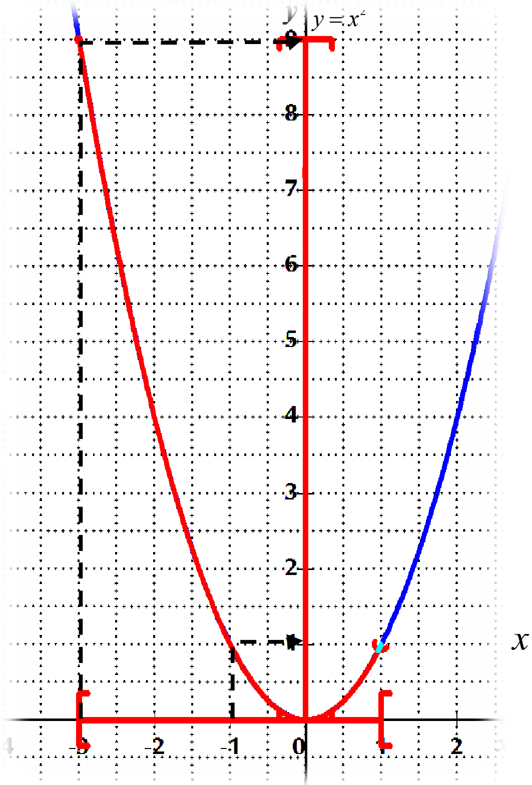
ب) $-4 < x \le -2$:

لدينا الدالة "مربع" متناقصة تماما على المجال $]-4;-2]$ (لأنّ $]-4;-2] \subset]-\infty;0]$)

ومنه: $(-2)^2 \le x^2 < (-4)^2$ إذن: $\boxed{4 \le x^2 < 16}$.

جـ) $x \in [-3;1[$:

باستعمال التمثيل البياني للدالة "مربع"



نلاحظ أنه إذا كان $-3 \le x < 1$ فإنّ: $\boxed{0 \le x^2 \le 9}$.

تمرين 12 ص107 .

7. حل معادلات ومتراجحات باستعمال التمثيل البياني للدالة "مربع":

طريقة02 ص92:

لحل المعادلة $x^2 = m$ أو المتراجحة $x^2 < m$ بيانياً:

ﻫنُنشئ التّمثيل البياني (C) للدّالة "مربع"، والمستقيم (D) الذي معادلته $y = m$ (الموازي لحامل محور الفواصل)

أ)حلول المعادلة بيانيا في حالة وجودها، هي فواصل نقط تقاطع المنحنيين (C) و (D).

ب)حلول المتراجحة بيانيا في حالة وجودها، هي فواصل نقط (C) الواقعة تحت المستقيم (D) باستثناء فواصل نقط التقاطع.

تمرين محلول من الكتاب المدرسي ص92-93 .

تطبيق02:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$ ؛ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I;J)$ حيث $OI = 02cm$ و $OJ = 01cm$.

1)أنشئ التمثيل البياني للدالة f .

2)بإستعمال التمثيل البياني للدالة f عيّن حلول كل من المعادلات والمتراجحات التالية:

أ/ $x^2 = -2$ ؛ $x^2 = 0$ ؛ $x^2 = 3$.

ب/ $x^2 \le -1$ ؛ $x^2 \ge 1$ ؛ $x^2 > 0$ ؛ $x^2 < 3$.

الحل:

تمرين 09 ص106 .

8. توظيف الدالة "مربع" لدراسة اتجاه تغير الدالة $x \overset{g}{\mapsto} (x+a)^2 + b$ وتمثيلها البياني:

طريقة ص93: لدراسة تغيرات الدالة $g : x \mapsto (x+a)^2 + b$:

⊲نُحدّد اتجاه تغيّر الدالة التآلفية $x \mapsto x+a$ وإشارتها على المجالين $]-\infty;-a]$ و $[-a;+\infty[$.

⊲نُحدّد اتجاه تغيّر الدالة $x \mapsto (x+a)^2$ على المجالين $]-\infty;-a]$ و $[-a;+\infty[$ ثمّ نستنتج جدول تغيّرات الدالة g .

⊲يمكن تمثيل g بيانيا كالآتي:

(C') هو التمثيل البياني للدالة g و (C) هو القطع المكافئ الذي يمثل الدّالة "مربع" .

– نُبين أنّ نقطة $M'(x-a;y+b)$ تنتمي إلى (C') إذا و فقط إذا كانت النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (C) .

– نُعين شعاع الانسحاب الذي يسمح بالمرور من (C) إلى (C') وهكذا نستنتج إنشاء (C') .

تمرين محلول من الكتاب المدرسي ص93–94 .

حل التمرين 19 ص 107 .

حل التمرين 14 ص 107 .

ملاحظات حول سير الحصة: ....

....

انتهى.

مذكرة رقم: 02

المدة: 02 ساعة	المحور: الدّوال المرجعية.	التاريخ: ربيع الأول 1438هـ الموافق لـ ديسمبر 2016م
الأستاذ: بوعزة مصطفى	الموضوع: الدّالة "مقلوب".	القسم: 01 ج م ع تك

الكفاءات المستهدفة:

- تحديد اتجاه التغيّر والتمثيل البياني للدّالة $x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x}$.
- توظيفها لدراسة بعض الدوال الأخرى.

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
الانطلاق بناء المفاهيم التقويم	(انظر أدناه)		

المراحل: الانطلاق — بناء المفاهيم — التقويم

1. تعريف:

الدّالة "مقلوب" هي الدّالة المعرفة على $]0;+\infty[\cup]-\infty;0[$ والتي تُرفق بكل عدد حقيقي غير معدوم x بمقلوبه $\frac{1}{x}$.

ترميز: إذا رمزنا إليها بالرمز f ، نكتب: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $D_f=\mathbb{R}^*$

أو $x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x}$ أو $f:\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x)=\frac{1}{x}$$

أمثلة: 2 و -2 صوّرتاهما بالدّالة "مقلوب" متعاكستان.

2. اتجاه التغيّر:

نشاط: أدرس اتجاه تغير الدالة "مقلوب" على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

الحل: دراسة اتجاه تغير الدالة "مقلوب" على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$:

ليكن a و b عددان حقيقيان غير معدومان.

نعلم أنّ (حسب قواعد ترتيب الأعداد) -إذا كان $a<b<0$ فإنّ $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ أي: $f(a)>f(b)$.

-إذا كان $0<a<b$ فإنّ $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ أي: $f(a)>f(b)$.

الخلاصة:

الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

3. جدول التغيّرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

تمرين 23، 24 ص108 .

4. دراسة شفعية الدالة "مقلوب":

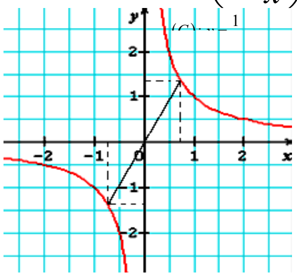
1/لدينا $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0 .

2/ولدينا $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$

إذن:الدّالة "مقلوب" دالة فردية، وبالتالي: منحناها متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

5. التمثيل البياني:

نحصل على التمثيل البياني للدالة "مقلوب" ليكن (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$ وذلك بتمثيل بعض النقط ذات الإحداثيات $\left(x;\frac{1}{x}\right)$، كما هو موضح في الشكل:



ملاحظة:يسمى منحنى الدالة "مقلوب" بقطع زائد "hyperbole"معادلته $y=\frac{1}{x}$.

تمرين 26 +27 ص 108 .

6. إيجاد حصر للعدد $\frac{1}{x}$ إنطلاقا من حصر العدد x :

طريقة01 ص95:

يُمكن حصر مقلوبات أعداد حقيقية لها نفس الإشارة، *باستعمال تناقص الدّالة "مقلوب" على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

تمرين محلول من الكتاب المدرسي ص95 .

تطبيق01: جِد حصرا للعدد $\frac{1}{x}$ في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) $-\frac{1}{2}\leq x<0$؛ ب) $2<x\leq 4$.

الحل: إيجاد حصرا للعدد $\frac{1}{x}$:

أ) $-\frac{1}{2}\leq x<0$:

لدينا الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right[$ (لأنّ $\left[-\frac{1}{2};0\right[\subset]-\infty;0[$)

ومنه: $0<-2\leq\frac{1}{x}$ (مقلوب عددين سالبين هما عددين سالبين) .

ب) $2<x\leq 4$:

لدينا الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على المجال $]2;4]$ (لأنّ $]2;4]\subset]0;+\infty[$)

ومنه: $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

تمرين 22 ص108 .

7. حل معادلات ومتراجحات باستعمال التمثيل البياني للدالة "مقلوب":

طريقة:

لحل المعادلة $\frac{1}{x}=m$ أو المتراجحة $\frac{1}{x}<m$ بيانياً:

⊲نُنشئ التّمثيل البياني (C) للدّالة "مقلوب"، والمستقيم (D) الذي معادلته $y=m$ (الموازي لحامل محور الفواصل)

أ)حلول المعادلة بيانيا في حالة وجودها، هي فواصل نقط تقاطع المنحنيين (C) و (D).

ب)حلول المتراجحة بيانيا في حالة وجودها، هي فواصل نقط (C) الواقعة تحت المستقيم (D) باستثناء فواصل نقط التقاطع.

تطبيق02:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$ ؛ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$.

1)أنشئ التمثيل البياني للدالة f .

2)بإستعمال التمثيل البياني للدالة f عيّن حلول كل من المعادلات والمتراجحات التالية:

أ/ $\frac{1}{x}=-2$ ؛ $\frac{1}{x}=0$ ؛ $\frac{1}{x}=3$.

ب/ $\frac{1}{x}\leq -1$ ؛ $\frac{1}{x}\geq 1$ ؛ $\frac{1}{x}>0$ ؛ $\frac{1}{x}<3$.

الحل:

8. توظيف الدالة "مقلوب" لدراسة اتجاه تغير الدالة $x\overset{g}{\mapsto}\frac{1}{x+a}+b$ وتمثيلها البياني:

طريقة02 ص95: لدراسة تغيرات الدالة $x\overset{g}{\mapsto}\frac{1}{x+a}+b$:

⊲نُحدّد اتجاه تغيّر الدالة التّآلفية $x\mapsto x+a$ وإشارتها على المجالين $]-\infty;-a[$ و $]-a;+\infty[$.

⊲نُحدّد اتجاه تغيّر الدالة $x\mapsto\frac{1}{x+a}$ على المجالين $]-\infty;-a[$ و $]-a;+\infty[$ ثمّ نستنتج جدول تغيّرات الدالة g .

⊲يمكن تمثيل g بيانيا كالآتي:

(C') هو التمثيل البياني للدالة g و (C) هو القطع الزائد الذي يمثل الدّالة "مقلوب".

– نُبين أنّ نقطة $M'(x-a;y+b)$ تنتمي إلى (C') إذا و فقط إذا كانت النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (C).

– نُعين شعاع الانسحاب الذي يسمح بالمرور من (C) إلى (C') وهكذا نستنتج إنشاء (C').

التمثيل البياني لهذه الدّالة يكون متناظر بالنسبة إلى النقطة ذات الإحداثيات $(-a;b)$.

تمرين محلول من الكتاب المدرسي ص95–96 .

حل التمرين 32 ص 107 .

حل التمرين 33 ص 107 .			

ملاحظات حول سير الحصة: ....

....

انتهى.

مذكرة رقم: 03

التاريخ: ربيع الأول 1438هـ الموافق لـ ديسمبر 2016م	**المحور:** الدّوال المرجعية.	**المدة:** 02 ساعة
القسم: 01ج م ع تك	**الموضوع:** الدّالة "الجذر التّربيعي" .	**الأستاذ:** بوعزة مصطفى

الكفاءات المستهدفة:

- تحديد اتجاه التغيّر والتمثيل البياني للدّالة $x \overset{f}{\mapsto} \sqrt{x}$.
- توظيفها لدراسة بعض الدوال الأخرى.

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

الانطلاق

بناء المفاهيم

التقويم

1. تعريف:

الدّالة "الجذر التربيعي" هي الدّالة المعرفة على $[0;+\infty[$ والتي تُرفق بكل عدد حقيقي موجب x بجذره التربيعي $\sqrt{x}$.

ترميز: إذا رمزنا إليها بالرمز f ، نكتب: $f(x)=\sqrt{x}$ و $D_f=\mathbb{R}^+$

أو $x \overset{f}{\mapsto} \sqrt{x}$ أو $f:[0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to f(x)=\sqrt{x}$

أمثلة: صورة العدد 7 بالدالة "الجذر التربيعي" هي $\sqrt{7}$.

2. اتجاه التغيّر:

نشاط: أدرس اتجاه تغير الدالة "الجذر التربيعي" على المجال $[0;+\infty[$، ثم شكّل جدول تغيراتها .

الحل: دراسة اتجاه تغير الدالة "الجذر التربيعي" على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن a و b عددان حقيقيان موجبان.

نعلم أنّ(حسب قواعد ترتيب الأعداد) – إذا كان $0 \le a < b$ فإنّ $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ أي: $f(a) < f(b)$.

الخلاصة:

الدالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماما تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. جدول التغيّرات:

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

تمرين 36، 39 ص109 .

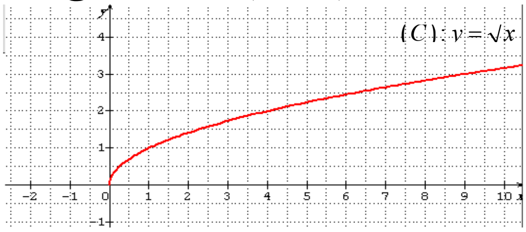
4. دراسة شفعية الدالة "الجذر التربيعي":

الدالة "الجذر التربيعي" ليست فردية ولا زوجية لأنّ مجموعة تعريفها $[0;+\infty[$ ليست متناظرة بالنسبة إلى 0 .

5. التمثيل البياني:

نحصل على التمثيل البياني للدالة "الجذر التربيعي" ليكن (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$

وذلك بتمثيل بعض النقط ذات الإحداثيات $\left(x;\sqrt{x}\right)$، كما هو موضح في الشكل:



تمرين 38 +39 +40ص 109 .

6. إيجاد حصر للعدد $\sqrt{x}$ إنطلاقا من حصر العدد x :

طريقة:

يُمكن حصر الجذور التربيعي لعدد حقيقي موجب، *باستعمال تزايد الدّالة "الجذر التربيعي" على المجالين $[0;+\infty[$.

تطبيق01: جِد حصرا للعدد $\sqrt{x}$ في كل حالة من الحالات الآتية:أ) $0 \le x < 2$ ؛ ب) $2 < x \le 4$.

الحل: إيجاد حصرا للعدد $\sqrt{x}$:

أ) $0 \le x < 2$:

لدينا الدالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماما على المجال $[0;2[$ (لأنّ $[0;2[\subset [0;+\infty[$)

ومنه: $0 \le \sqrt{x} < \sqrt{2}$.

ب) $2 < x \le 4$:

لدينا الدالة " الجذر التربيعي" متزايدة تماما على المجال $]2;4]$ (لأنّ $]2;4] \subset [0;+\infty[$)

ومنه: $\sqrt{2} < \sqrt{x} \le 2$.

تمرين 34 ص109 .

7. حل معادلات ومتراجحات باستعمال التمثيل البياني للدالة "الجذر التربيعي":

طريقة:

لحل المعادلة $\sqrt{x}=m$ أو المتراجحة $\sqrt{x}<m$ بيانياً:

➢نُنشئ التّمثيل البياني (C) للدّالة "الجذر التربيعي"، والمستقيم (D) الذي معادلته $y=m$ (الموازي لحامل محور الفواصل)

أ)حلول المعادلة بيانيا في حالة وجودها، هي فواصل نقط تقاطع المنحنيين (C) و (D) .

ب)حلول المتراجحة بيانيا في حالة وجودها، هي فواصل نقط (C) الواقعة تحت المستقيم (D) باستثناء فواصل نقط التقاطع.

تطبيق02:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$.

1) أنشئ التمثيل البياني للدالة f.

2) بإستعمال التمثيل البياني للدالة f عيّن حلول كل من المعادلات والمتراجحات التالية:

أ/ $\sqrt{x}=-2$ ؛ $\sqrt{x}=0$ ؛ $\sqrt{x}=3$.

ب/ $\sqrt{x}\leq -1$ ؛ $\sqrt{x}\geq 1$ ؛ $\sqrt{x}>0$ ؛ $\sqrt{x}<3$.

الحل:

8. توظيف الدالة "الجذر التربيعي" لدراسة اتجاه تغير الدالة $x\overset{g}{\mapsto}\sqrt{x+a}+b$ وتمثيلها البياني:

طريقة02 ص95: لدراسة تغيرات الدالة $x\overset{g}{\mapsto}\sqrt{x+a}+b$:

⊲نُحدّد اتجاه تغيّر الدالة التآلفية $x\mapsto x+a$ وإشارتها على المجال $[-a;+\infty[$.

⊲نُحدّد اتجاه تغيّر الدالة $x\mapsto\sqrt{x+a}$ على المجال $[-a;+\infty[$ ثمّ نستنتج جدول تغيّرات الدالة g.

⊲يمكن تمثيل g بيانيا كالآتي:

(C') هو التمثيل البياني للدالة g و (C) هو المنحنى الممثّل للدّالة "الجذر التربيعي".

– نُبين أنّ نقطة $M'(x-a;y+b)$ تنتمي إلى (C') إذا و فقط إذا كانت النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (C).

– نُعين شعاع الانسحاب الذي يسمح بالمرور من (C) إلى (C') وهكذا نستنتج إنشاء (C').

حل التمرين 41 ص 109 .

مقارنة x و x^2 و x^3 و $\sqrt{x}$ من أجل $x\geq 0$:

طريقة ص96 :

لمقارنة الأعداد x و x^2 و x^3 و $\sqrt{x}$ من أجل $x\geq 0$ ،

–نُخمن النتيجة بواسطة الحاسبة البيانية أو بواسطة برمجية.

–نستعمل قواعد الترتيب أو تغيرات دوال مرجعية.

تمرين محلول ص96 .

حل التمرين 42 ص 109 .

ملاحظات حول سير الحصة: ....

....

انتهى.

مذكرة رقم: 04

المدة: 04 ساعة	المحور: الدّوال المرجعية.	التاريخ: ربيع الثاني 1438هـ الموافق لـ جانفي 2017م
الأستاذ: بوعزة مصطفى	الموضوع: الدّالة "جيب تمام"، الدّالة "جيب".	القسم: 01ج م ع تك

الكفاءات المستهدفة:

- معرفة الدائرة المثلثية.
- معرفة تحويل من وإلى الدرجة، الرديان والغراد.
- تعليم نقطة على الدائرة المثلثية.
- معرفة العددين $\cos x$ و $\sin x$.
- تحديد اتجاه تغيّر الدالة "جيب تمام"، والدّالة "جيب" على مجال مُعطى.
- تمثيل الدالة "جيب تمام"، والدّالة "جيب" على مجال مُعطى.

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

الانطلاق

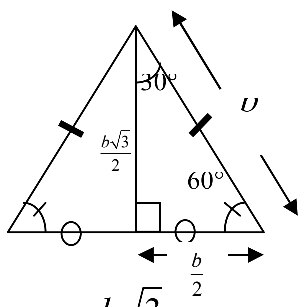
بناء المفاهيم

التقويم

حل النشاط 02 ص84:

تعيين "جيب تمام" و"جيب" كل من $30°$، $45°$ و$60°$ باستعمال الشكلين:

أ) بإستعمال الشكل:

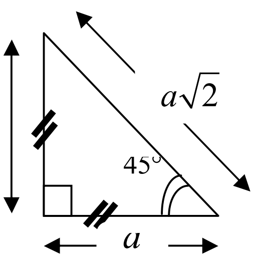


نجد:

$\cos 60° = \dfrac{\frac{b}{2}}{b} = \dfrac{1}{2}$ ، $\sin 60° = \dfrac{\frac{b\sqrt{3}}{2}}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ،

$\cos 30° = \dfrac{\frac{b\sqrt{3}}{2}}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin 30° = \dfrac{\frac{b}{2}}{b} = \dfrac{1}{2}$.

ب) بإستعمال الشكل:



نجد:

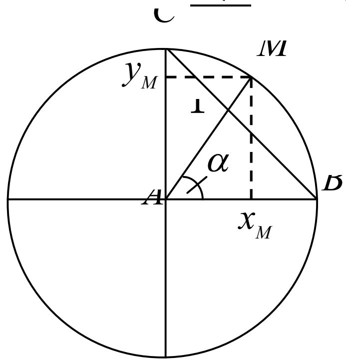
$\cos 45° = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin 45° = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ،

حل النشاط03 ص84:

لدينا: ABC مثلث قائم في A ومتقايس الساقين حيث AB=AC = 1 .

(C) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AB .

M هي نقطة من القوس الصغيرة $\overset{\frown}{BC}$ حيث $\widehat{BAM} = \alpha$.



1)تعيين إحداثيي النقطة M في المعلم $(A;B;C)$:

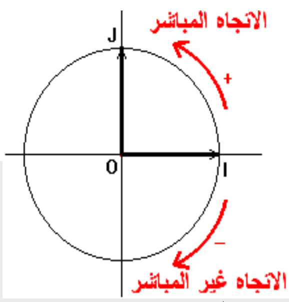
لدينا: $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_M}{1} = x_M \\ \sin\alpha = \dfrac{y_M}{1} = y_M \end{cases}$ إذن: $\boxed{M(\cos\alpha;\sin\alpha)}$.

2)بفرض أنّ M تتحرك من B نحو C .

–تتغير α: من 0° إلى 90° .

–تتغير فاصلة M $(\cos\alpha)$: من 1 إلى 0 .

–تتغير ترتيبة M $(\sin\alpha)$: من 0 إلى 1 .



الدائرة المثلثية:

◁نقول عن دائرة (C) إنها موجّهة إذا اخترنا عليها اتجاها للحركة.

نصطلح على أنّ

الاتجاه المباشر (أو الموجب) هو الاتجاه المخالف لاتجاه دوران عقارب الساعة،

والاتجاه غير المباشر (أو السالب) هو الاتجاه الموافق لاتجاه عقارب الساعة.

◁ $(O;I;J)$ م معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

الدائرة الموجّهة التي مركزها المبدأ O و نصف قطرها 1 تسمى "دائرة مثلّثية" .

حل النشاط04 ص85:

لدينا: في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I;J)$ الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 1 .

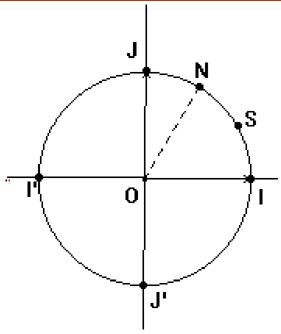
M نقطة متحركة على (C) كالآتي:

–إما في الاتجاه المباشر أو الموجب (أي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة) .

–إما في الاتجاه غير المباشر أو السالب (أي اتجاه دوران عقارب الساعة) .

تسمى هذه الدائرة : دائرة مثلثية.

النقط $I(1;0)$ ؛ $J(0;1)$ ؛ $I'(-1;0)$ و $J'(0;-1)$.



1)القيمة المضبوطة لطول الدائرة (C)هو: $2\pi r = 2\pi$ (المحيط) .

2)طول القوس الصغيرة $\widehat{IJ}$هو: $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$.

طول القوس الكبيرة $\widehat{IJ}$ هو: $\frac{3\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2} = 3 \times \frac{\pi}{2}$.

طول القوس $\widehat{II'}$هو: $\pi = \frac{2\pi}{2}$.

3) S نقطة تقع في ثلث القوس الصغيرة $\widehat{IJ}$، طول القوس الصغيرة $\widehat{IS}$هو: $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3}$.

4) N هي النقطة من القوس الصغيرة $\widehat{IJ}$ حيث $\widehat{ION} = 60°$،

حساب طول القوس الصغيرة $\widehat{IN}$: $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \times 2$ أو $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3}$.

5)نتوجه الآن من I نحو N في الاتجاه غير المباشر،

طول القوس $\widehat{IN}$هو: $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$.

قيس الزاوية $\widehat{ION}$هو: $360° - 60° = 300°$.

حل النشاط05 ص85:

(C)دائرة مثلثية في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I;J)$. (D)هو المماس للدائرة (C)في I .

$A \in (D)$ حيث $\vec{IA} = \vec{OJ}$.

(D)مدرّج وفق المعلم $(I;A)$. (معناه:أي نقطة تنتمي إلى (D)لها فاصلة معينة مثلا فاصلة I هي0 فاصلة A هي 1)، A' نظيرة A بالنسبة للنقطة I .

⊲نقوم بلفّ نصف المستقيم $[IA)$على (C)في الاتجاه المباشر
وبلفّ نصف المستقيم $[IA')$على (C)في الاتجاه غير المباشر .

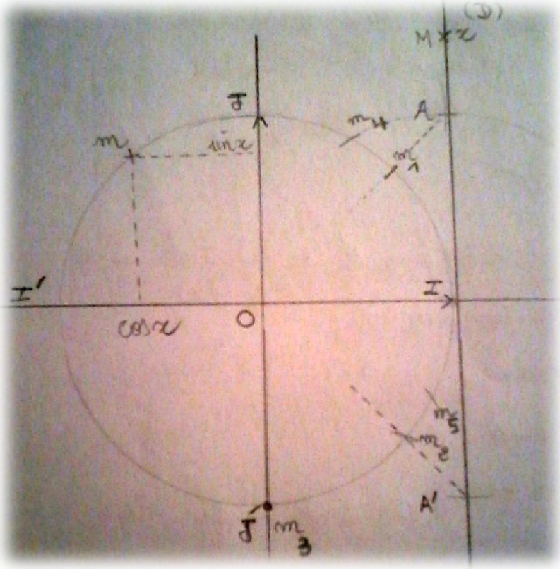
كل نقطة M_i من (D) تنطبق على نقطة m_i من (C) .

1)انشاء النقط m_1 ؛ m_2 ؛ m_3 ؛ m_4 ؛ m_5 من (C)التي تنطبق عليها النقط $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ $M_2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ $M_3\left(\frac{15\pi}{2}\right)$ ؛ $M_4\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ ؛ $M_5\left(\frac{-13\pi}{6}\right)$ من (D)على الترتيب:

الإنشاء يكون بالمدور . ولدينا . $\frac{15\pi}{2} = \frac{12\pi + 3\pi}{2} = 6\pi + \frac{3\pi}{2} = 3(2\pi) + 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi + \pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{-13\pi}{6} = \frac{-12\pi - \pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$



2) M نقطة من (D) فاصلتها α ، تنطبق على نقطة m من (C) .

تعيين بدلالة α ، فواصل نقط أخرى من (D) تنطبق على m :

فواصل النقط الأخرى تكون من الشكل $\boxed{\alpha + 2\pi k}$ حيث (k عدد صحيح نسبي) .

3) M نقطة من (D) فاصلتها x ، تنطبق على نقطة m من (C) .

فاصلة m في المعلم $(O;I;J)$ تسمى "جيب تمام" العدد x و نرمز لها $\cos x$.

ترتيب m في المعلم $(O;I;J)$ تسمى "جيب" العدد x و نرمز لها $\sin x$.

أ–في حالة $x=0$ فإنّ M تنطبق على I ومنه: $I(\cos 0;\sin 0)$

ولدينا من جهة أخرى: $I(1;0)$ إذن: $\boxed{\begin{cases}\cos 0 = 1\\ \sin 0 = 0\end{cases}}$.

في حالة $x=\dfrac{\pi}{2}$ فإنّ M تنطبق على J ومنه: $J\left(\cos\dfrac{\pi}{2};\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

ولدينا من جهة أخرى: $J(0;1)$ إذن: $\boxed{\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0\\ \sin\dfrac{\pi}{2} = 1\end{cases}}$.

في حالة $x=\dfrac{3\pi}{2}$ فإنّ M تنطبق على J' ومنه: $J'\left(\cos\dfrac{3\pi}{2};\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$

ولدينا من جهة أخرى: $J'(0;-1)$ إذن: $\boxed{\begin{cases}\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0\\ \sin\dfrac{3\pi}{2} = -1\end{cases}}$.

في حالة $x=-\dfrac{\pi}{2}$ فإنّ M تنطبق على J' ومنه: $J'\left(\cos\dfrac{-\pi}{2};\sin\dfrac{-\pi}{2}\right)$

ولدينا من جهة أخرى: $J'(0;-1)$ إذن: $\boxed{\begin{cases}\cos\dfrac{-\pi}{2} = 0\\ \sin\dfrac{-\pi}{2} = -1\end{cases}}$.

في حالة $x=-2\pi$ فإنّ M تنطبق على I ومنه: $I(\cos(-2\pi);\sin(-2\pi))$

ولدينا من جهة أخرى: $I(1;0)$ إذن: $\begin{cases}\cos(-2\pi)=1\\ \sin(-2\pi)=0\end{cases}$.

في حالة $x=3\pi$ فإنّ M تنطبق على I' ومنه: $I'(\cos(3\pi);\sin(3\pi))$

ولدينا من جهة أخرى: $I'(-1;0)$ إذن: $\begin{cases}\cos(3\pi)=-1\\ \sin(3\pi)=0\end{cases}$.

ب-تعيين في كل حالة من الحالات الآتية ثلاث قيم للعدد x :

المساواة	قيمة أولى	قيمة ثانية	قيمة ثالثة
$\cos x=0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$
$\cos x=1$	4π	-2π	6π
$\cos x=-1$	2017π	$-\pi$	-3π
$\sin x=0$	-98π	2016π	0
$\sin x=1$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$
$\sin x=-1$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{-5\pi}{2}$

المستقيم العددي والدائرة المثلثية:

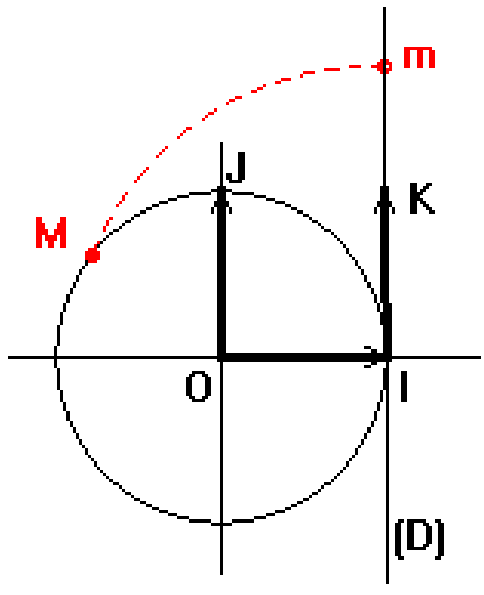
(C) دّائرة مثلثية في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I;J)$، (D) هو المماس للدائرة (C) في I .
K هي النقطة من (D) حيث $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{OJ}$.

⊲نُرفق بكل عدد حقيقي x النقطة m من (D) التي فاصلتها x في المعلم الخطي $(I;K)$،
وبلفّ (D) على (C)، تنطبق النّقطة m على نقطة M من (C) .

⊲كلّ عدد حقيقي x تقابله نقطة وحيدة M على (C)،

*نقول إنّ M هي صورة x، ونقول كذلك إنّ x هو قيس للزّاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$

*العدد الحقيقي x يسمى قيسا بالرّديان للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ ونكتب: $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})=x rad$.

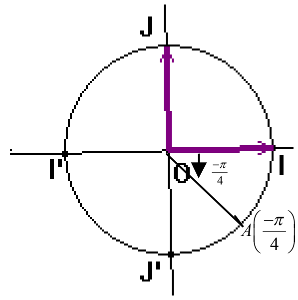


ملاحظات:

- طول القوس $\overset{\frown}{IM}$ هو طول القطعة $[\mathrm{Im}]$ وهو $|x|$.
- عندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{IK}$ (فاصلتها موجبة):
M تتحرك على (C) في الاتجاه المباشر (هنا x عدد موجب) .
- عندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في الاتجاه المعاكس لاتجاه الشعاع $\overrightarrow{IK}$ (فاصلتها سالبة):
M تتحرك على (C) في الاتجاه غير المباشر (هنا x عدد سالب) .
- نُعبّر عن قيس القوس $\overset{\frown}{IM}$ وقيس الزّاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ بنفس العدد الحقيقي x .
- كلّ موضع للنّقطة M من الدّائرة المثلّثية (C) يُقابله لانهاية من الأعداد الحقيقية x من الشّكل:
$x=\alpha+(2\pi)k$ مع (k عدد صحيح نسبي)، حيث: $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})=\alpha rad$.

مثال:

لتكن (C) دائرة مثلثية في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I;J)$ كما هو موضح في الشكل التالي:



◅ النقط I ؛ J ؛ I' و J' هي صور الأعداد 0؛ $\frac{\pi}{2}$ ؛ π ؛ $\frac{3\pi}{2}$ على الترتيب.

◅ للعددين $\frac{-\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ نفس الصورة J' ، كذالك للعددين π و $-\pi$ نفس الصورة I' .
الأعداد التي من الشكل $2\pi k$ حيث (k عدد صحيح نسبي) لهم نفس الصورة I .

◅ $\frac{-\pi}{4}$ هو قيس بالرّديان للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$ أي: $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})=\frac{-\pi}{4}rad$ وهو كذلك قيس للقوس الصغيرة $\overset{\frown}{IA}$.

ملاحظة: طول القوس الصغيرة $\overset{\frown}{IA}$ هو $\left|\frac{-\pi}{4}\right|$.

تحويل الرّديان الى الدرجة والدرجة الى الرّديان:

طريقة01 ص97:

التحويل من وإلى الدرجة والرّديان تتم باستعمال التناسبية و $\pi rad=180°$.

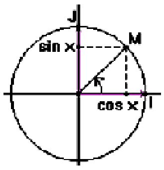
أي: $\begin{matrix}\pi rad \to 180° \to 200grad\\ \beta rad \to \alpha° \to \gamma grad\end{matrix}$ إذن: $\boxed{\frac{\beta rad}{\pi rad}=\frac{\alpha°}{180°}=\frac{\gamma grad}{200grad}}$.

تمرين محلول ص 97 من الكتاب المدرسي.

حل التمرين 50 ص110 .

ملاحظة: للتحويل من الرّديان إلى الدرجة يكفي تعويض π بـ 180 .

تعريف:



x عدد حقيقي، M النقطة المرفقة بالعدد x من الدائرة المثلثية (C) في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I;J)$.

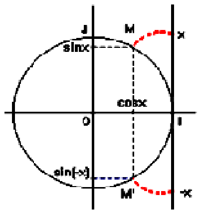
⊲ نسمي "جيب تمام" العدد الحقيقي x، فاصلة النقطة M ونرمز إليها بالرمز $\cos x$.

الدّالة "$\cos$" هي الدّالة التي تُرفق بكل عدد حقيقي x العدد $\cos x$.

⊲ نسمي "جيب" العدد الحقيقي x، ترتيب النقطة M ونرمز إليها بالرمز $\sin x$.

الدّالة "$\sin$" هي الدّالة التي تُرفق بكل عدد حقيقي x العدد $\sin x$.

مبرهنة:



من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ؛ $-1 \leq \cos x \leq 1$ ؛ $-1 \leq \sin x \leq 1$.

2) $\cos(-x) = \cos x$ (أي أنّ الدّالة "$\cos$" هي دّالة "زوجية")

$\sin(-x) = -\sin x$ (أي أنّ الدّالة "$\sin$" هي دّالة "فردية")

البرهان:

حل التمرين 55 ص 110 .

وضع نقط على الدائرة المثلثية:

طريقة 02 ص 98:

نُعين الصورة M لعدد حقيقي x على الدائرة المثلثية (C) كالآتي:

⊲ إذا كان $x \geq 0$: M تقطع قوسا طوله x في الاتجاه المباشر وفي الحالة $x \geq 2\pi$، نكتب x على الشكل $x = \alpha + (2\pi)k$ باستعمال القسمة (k عدد دورات و α عدد حقيقي ينتمي إلى $[0;\pi]$).

⊲ إذا كان $x \leq 0$: M تقطع قوساً طوله $|x|$ في الاتجاه غير المباشر وفي الحالة $|x| \geq 2\pi$، نكتب $|x|$ على الشكل $|x| = \alpha + (2\pi)k$ باستعمال القسمة (k عدد دورات و α عدد حقيقي ينتمي إلى $[0;\pi]$).

تمرين محلول ص 97-98 من الكتاب المدرسي.

حل التمرين 51 ص 110 .

"جيب تمام" و"جيب" قيم شهيرة:

طريقة ص98:

لحساب $\cos x$ و $\sin x$ نقرأ إحداثيي الصورة M للعدد x .

$x(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

مع $\boxed{\begin{cases}\cos\pi=-1\\ \sin\pi=0\end{cases}}$.

حساب "جيب تمام" و"جيب" لقيم مستنتجة من قيم شهيرة:

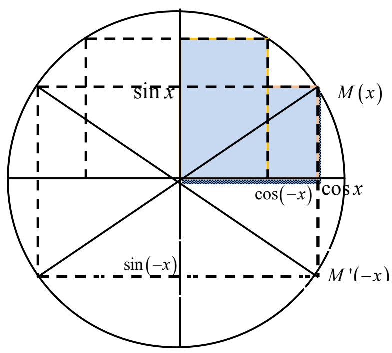
طريقة ص100:

⊲حساب "جيب تماما" و"جيب" قيمة x يؤول إلى حساب "جيب تمام" و "جيب" عدد حقيقي محصور بين 0 و $\frac{\pi}{2}$.

−صورة x وصورة $-x$ متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل أي:

لهما نفس الفاصلة $(\cos(-x)=\cos x)$ وترتيبان متعاكسان $(\sin(-x)=-\sin x)$.

بنفس الطريقة نُكمل البقية.

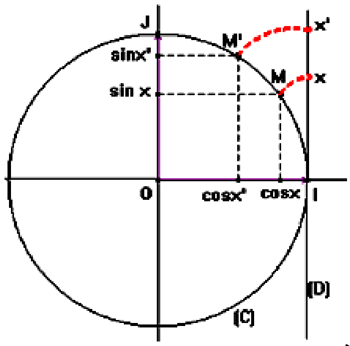


	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$x+(2\pi)k\ \ (k\in\mathbb{Z})$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$

تمرين محلول ص100 من الكتاب المدرسي .

حل التمرين 52 ص 110 .

1. اتجاه تغيّر الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $[0;\pi]$:



أ-على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

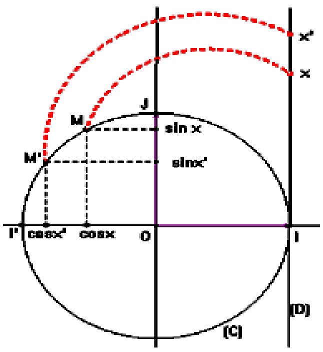
خاصية:

العددان الحقيقيان x وx'ينتميان إلى المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

وصورتاهما M وM' تتغيران على ربع الدائرة (الأول) من I إلى J .

إذا كان$x < x'$ فإن$\cos x > \cos x'$ و $\sin x < \sin x'$.

⊲الدّالة" cos "متناقصة تماماً على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ، ⊲الدّالة" sin "متزايدة تماماً على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



ب-على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$:

خاصية:

العددان الحقيقيان x وx'ينتميان إلى المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

وصورتاهما M وM' تتغيران على ربع الدّائرة (الثاني) من J إلىI' .

إذا كان$x < x'$ فإن$\cos x > \cos x'$ و $\sin x > \sin x'$.

⊲الدّالة" cos "متناقصة تماماً على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ ، ⊲الدّالة" sin "متناقصة تماماً على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

2. جدول تغيّرات الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $[0;\pi]$:

نستنتج من الخاصية (1) ومن الخاصة(2):

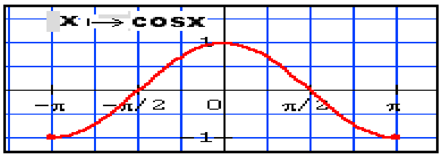
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0

4. التمثيل البياني:

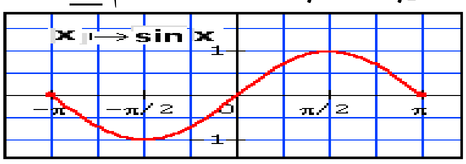
⊲نُنشئ التمثيل البياني للدالة " cos " على المجال $[0;\pi]$ انطلاقا من جدول تغيّراتها .

نُتمم هذا الرسم على المجال $[-\pi;0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأنّ الدالة " cos "دّالة زوجية .



⊲نُنشئ التمثيل البياني للدالة " sin " على المجال $[0;\pi]$ انطلاقا من جدول تغيّراتها .

نُتمم هذا الرسم على المجال $[-\pi;0]$ بالتناظر بالنسبة لمبدأ المعلم لأنّ الدالة " sin "دّالة فردية .



ملاحظة:

يُمكن إنشاء التمثيل البياني للدالة" cos " و" sin "على $\mathbb{R}$ ، وذلك بانجاز "دوريا" مثيلات له

لأنّ:من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ و $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ ،

ونقول أن الدالة" cos " و" sin "دورية ودورها 2π .

تمارين من 53 إلى غاية 59 ص 110–11 .

ملاحظات حول سير الحصة: ....

....

انتهى.