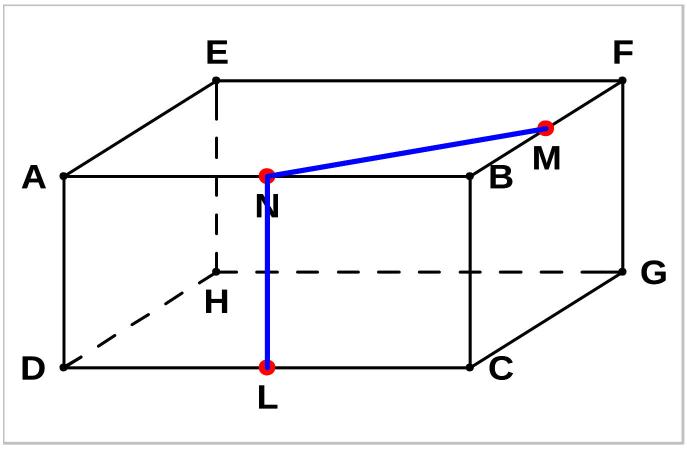
تمارين تطبيقية:

تطـــبيق1:الشكل المقابل هو لمتوازي مستطيلات $ABCDEFGH$

النقط M ، N ، L منتصفات أضلاعه $[BF]$ ، $[AB]$ و $[DC]$. بين أن :

1. المستقيم (MN) يوازي المستقيم (DG)
2. المستوي (NLM) يوازي المستوي (ADF)
3. المستقيم (AL) يوازي المستوي (MNC)



الحـــل:

1. المستقيمان (MN) و (DG) متوازيان . لأن $(MN)//(AF)$ و $(DG)//(AF)$
2. $(LN)//(AD)$ ، و منه كل من (MN) و (LN) يوازي المستوي (AFD)، ومنه المستوي (NLM) يوازي المستوي (AFD).
3. المستقيم (AL) يوازي المستقيم (NC) و منه المستقيم (AL) يوازي المستوي (MNC) .

تطبيق 2:

قطعة نحاس على شكل متوازي المستطيلات ، طول قاعدتها 140cm و عرضها 86cm و ارتفاع القطعة هو 58cm .

1) أحسب حجم القطعة .

2) نمدد القطعة بالتسخين لنحصل على خيط أسطواني نصف قطر قاعدته 1,5cm . **أحسب طول** الخيط (تعطى القيمة المدورة ذات رقمين)

الحل :

1) **حجم القطعة** :

$V = L \times \ell \times h = \mathbf{140 \times 86 \times 58 = 698320\ cm^3}$

2) مساحة قاعدة الخيط :

$A = \pi \times R^2 = 3{,}14 \times (1{,}5)^2 = 7{,}065\ cm^2$

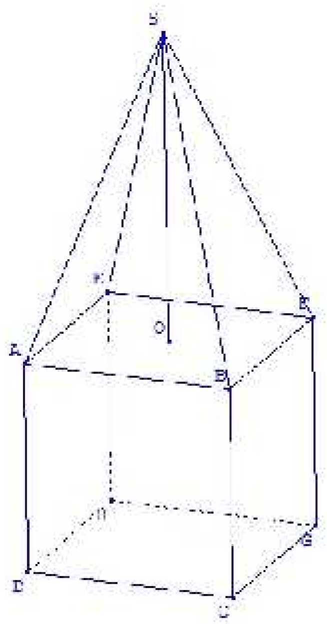
طول الخيط :

$$H = \frac{698320}{7{,}065} = \frac{V}{A} = 98842{,}18\ cm$$

تطبيق 3:

مكعب ABCDEFGH إليك الشكل **المقابل** :

- أحسب حجم هذا الشكل إذا علمت أن : AB=2,55cm و OS = 3,78 cm



الحل:

- حجم المكعب هو : $V_1 = (2,55\ cm)^3$

$V_1 = 16,58\ cm^3$

- حجم الهرم هو : $V2 = \frac{2,55 \times 2,55 \times 3,78}{3}\ cm^3$

و منه : $V2 = 8,19\ cm^3$

حجم الشكل هو : $V = V1 + V2$

أي : $V = (16,58 + 8,19)\ cm^3$

و منه :

$$\boxed{V = 24,77\ cm^3}$$

تطبيق 4:

في المستوي (®) نعتبر المثلث ABC القائم في A

D نقطة لا تنتمي إلى المستوي (®) بحيث يكون المستقيم (DC) عموديا على المستوي (ABC) .

برهن أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ADC) .

الحل :

المثلث ABC قائم في A . و عليه (AB) عمودي على (AC) .

المستقيم (DC) عمودي على المستوي (ABC) ، و عليه فإن (DC) عمودي على كل مستقيمات هذا المستوي ، و بالتالي (DC) عمودي على (AC)

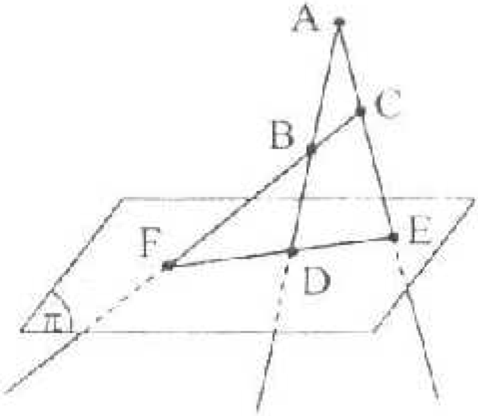
بما أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (AC) و (DC) من المستوي (ADC) فإن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ADC) .

التمرين 1 :

(π) مستو في الفضاء . A ، B ، C ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة و لا تنتمي إلى المستوي (π). المستقيم (AB) يقطع (π) في D والمستقيم (AC) يقطع (π) في E و المستقيم (BC) يقطع (π) في F .

- بين أن النقط F ، E ، D على استقامة واحدة .

الحل



* لدينا $E \in (AC)$ و $(AC) \subset (ABC)$

ومنه : $E \in (ABC)$.

* لدينا $D \in (AB)$ و $(AB) \subset (ABC)$

ومنه : $D \in (ABC)$.

* لدينا $F \in (BC)$ و $(BC) \subset (ABC)$

ومنه : $F \in (ABC)$.

وعليه : النقط F ، E ، D تنتمي إلى مستويين مختلفين هما (π) و (ABC) ومنه فهي تنتمي إلى مستقيم تقاطعهما ، إذن F ، E ، D على استقامة واحدة .

التمرين 2 :

SABCDهرم . قاعدته على شكل مستطيل طوله $L = 30\ Cm$ وعرضه $\ell = 20\ Cm$. ارتفاع الهرم $H = 50\ Cm$.

E نقطة من (SD) بحيث : $\frac{SE}{SD} = \frac{1}{2}$.

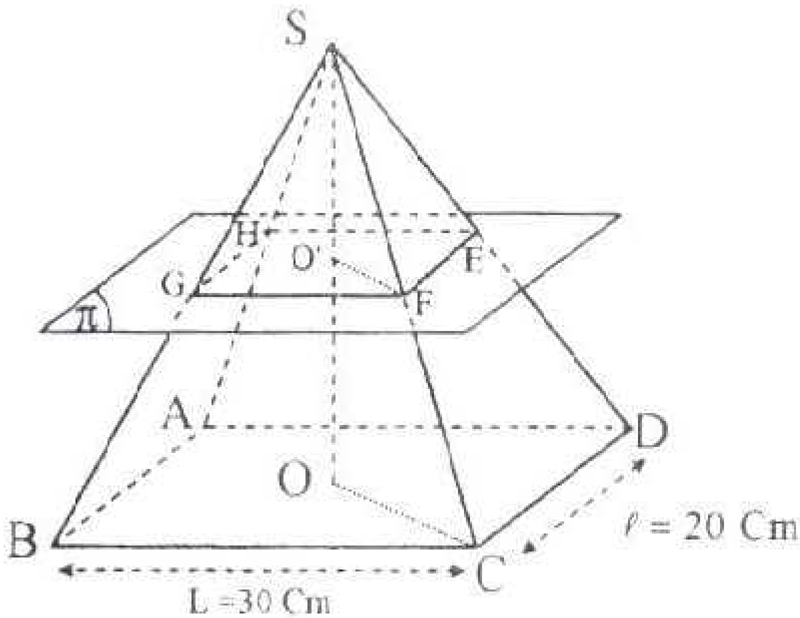
ليكن (π) المستوي الذي يشمل E ويوازي قاعدة الهرم .

(π) يقطع (S C) , (S B) , (S A)في النقطة F , G , H على الترتيب .

1) ما هي طبيعة الشكل SEFGH ؟ احسب حجمه .

2) احسب حجم الهرم SABCD .

3) احسب حجم الجزء المحصور بين الهرمين .



الحل

بما أن النقط H , G , F , E تنتمي إلى المستوي (π) الذي يوازي قاعدة الهرم SABCD فإن : SEFGH هو هرم أيضا .

لحساب حجم هذا الهرم فإننا نحسب : GF , FE .

في المثلث SCD لدينا : $\frac{SE}{SD} = \frac{SF}{SC} = \frac{FE}{CD}$

وعليه : $\frac{1}{2} = \frac{SF}{SC} = \frac{FE}{20}$ ومنه : $FE = \frac{20 \times 1}{2} = 10 \text{ Cm}$

في المثلث SBC لدينا : $\frac{SG}{SB} = \frac{GF}{BC} = \frac{SF}{SC}$

وعليه : $\frac{SG}{SB} = \frac{GF}{30} = \frac{1}{2}$ ومنه : $GF = \frac{30 \times 1}{2} = 15 \text{ Cm}$

ليكن : SO ارتفاع الهرم $SABCD$ و SO' ارتفاع الهرم $SEFGH$

لدينا في المثلث SOC : $\frac{SO'}{SO} = \frac{SF}{SC}$ وعليه : $\frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2}$

ومنه : $SO' = 25 \text{ Cm}$

حجم الهرم $SEFGH$:

لدينا : $V_1 = \frac{1}{3} \times 15 \times 10 \times 25$ أي : $V_1 = 1250 \text{ Cm}^3$

حجم الهرم $SABCD$:

لدينا : $V_2 = \frac{1}{3} \times 30 \times 20 \times 50$ أي : $V_2 = 10\,000 \text{ Cm}^3$

حجم الجزء المحصور بين الهرمين :

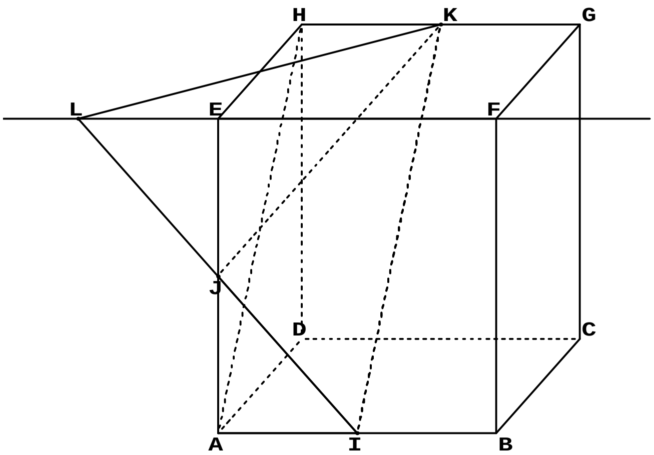
$$V_3 = V_2 - V_1 = 8750 \text{ Cm}^3$$

<u>تطبيق</u>:(الإستعانة ببرمجية للهندسة الديناميكية من أجل التخمين ثم البرهنة)

$ABCDEFGH$ مكعب، بحيث طول حرفه يساوي وحدة الطول.

I ، J ، K هي منتصفات القطع $[GH]$ ، $[AE]$ و $[AB]$.

حسب رأيك، ما هي طبيعة المثلث IJK ؟



<u>التخمين:</u>

رسم الشكل المقترح بواسطة برمجية

GEOSPACE .

رؤية الشكل وفق واجهة المستوي (IJK).

يتضح في الشكل أن المثلث قائم في J

<u>البرهان :</u>

نرسم النقطة K تقاطع (IJ) مع المستوي (HEF)

نبرهن أن الرباعي $ILEB$ متوازي أضلاع ، ينتج

عن ذلك : أن $LI = EB$ .....(1)

نبرهن أن الرباعي $ELKG$ متوازي أضلاع ، ينتج

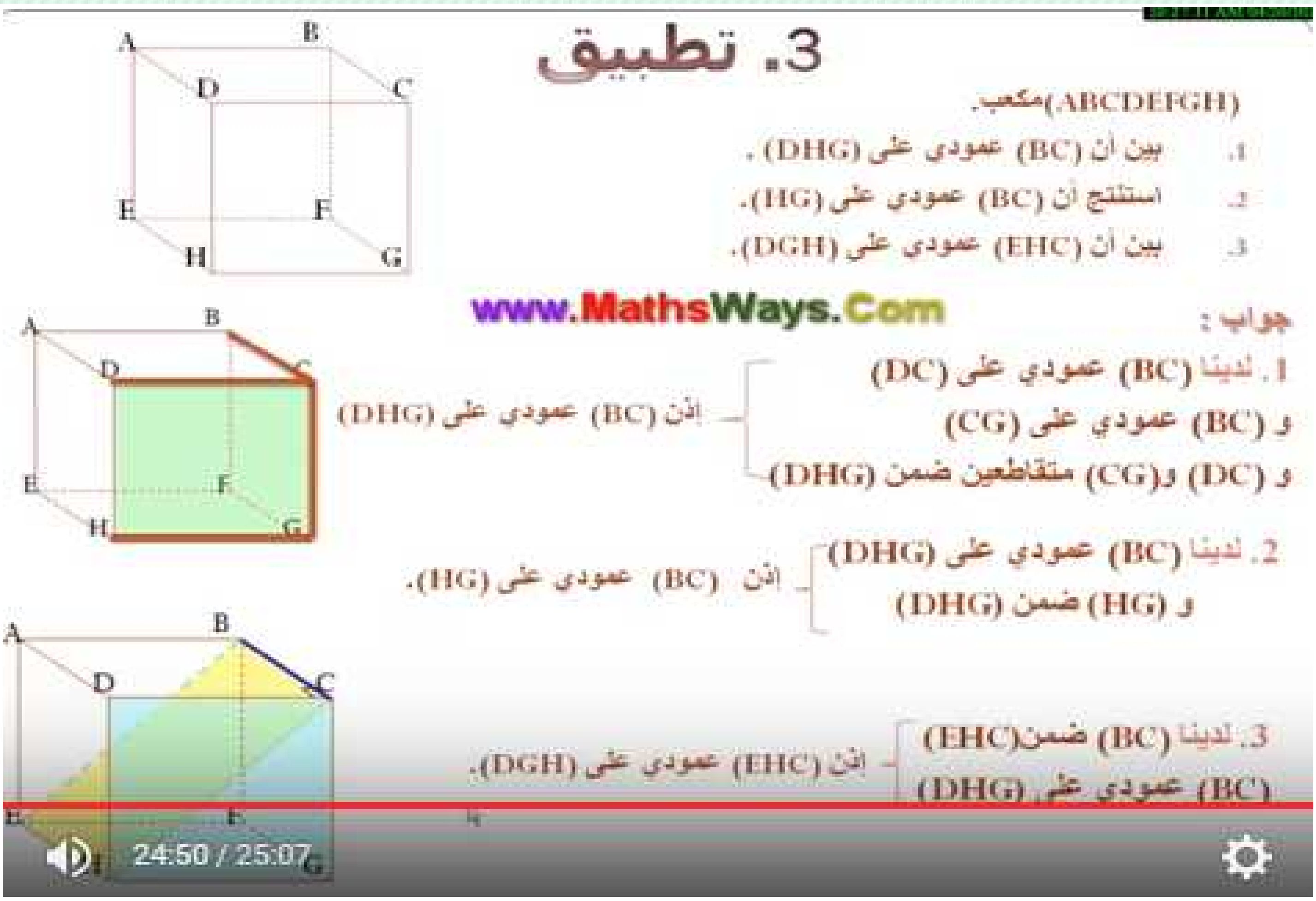
عن ذلك : أن $LK = EG$ ......(2)

نبرهن أن الرباعي $AIKH$ متوازي أضلاع ، ينتج

عن ذلك : أن $AH = IK$ .....(3)

من (1) و (2) و (3) و اعتبار $AH = EB = EG$. فإن $LI = LK = IK$، ومنه المثلث LIK متقايس الأضلاع .

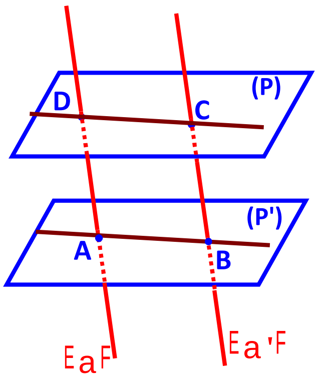
نبرهن أن $[IL]$و منه (KJ) ارتفاع في المثلث KLI ، فهو إذا عمودي على (IJ).



تمرين 4

نمين متوازيين تماما (Δ) و (Δ') يقطعان مستويين متوازيين تماما (P) و (P') في أربع نقط A ، B ، C و D .

برهن أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .



الحل :

لدينا (Δ) و (Δ') مستقيمين متوازيين إذن (AD) و (BC) مستقيمين متوازيين ويعينان مستو $(ABCD)$

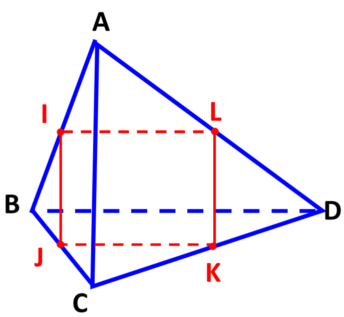
المستوي $(ABCD)$ يقطع كل من المستويان المتوازيان (P) و (P') في مستقيمين متوازيين وهما (AB) و (DC) .

إذن في المستوي $(ABCD)$ لدينا $(AD)//(BC)$ و $(AB)//(DC)$ ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

تمرين 5

$ABCD$ رباعي وجوه ؛

I ، J ، K و L منتصفات $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ و $[DA]$ على الترتيب .



1. برهن أن الرباعي $IJKL$ متوازي الأضلاع .
2. النقطتان M و N منتصفا $[AC]$ و $[BD]$ على الترتيب .

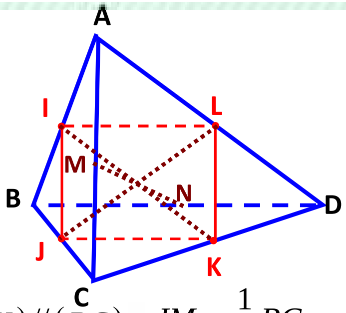
برهن أن للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة .

الحل :

1. في المثلث ABC نطبق نتيجة مبرهنة طاليس الخاصة بالمنتصفات

ونحصل على $(IJ)//(AC)$ و $AC = 2IJ$.

ونطبق نفس النتيجة في المثلث ACD ونحصل على $(LK)//(AC)$ و $AC = 2LK$.



ومنه : $(IJ)//(LK)$ و $IJ = LK$

بالتالي : المستقيمان (IJ) و (LK) يعينان مستو وهو $(IJKL)$

والرباعي $IJKL$ هو متوازي الأضلاع .

2. من السؤال السابق نستنتج أن القطرين $[IK]$ و $[JL]$ متناصفان .

لنبرهن أن $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان . (أو $[JL]$ و $[MN]$ متناصفان)

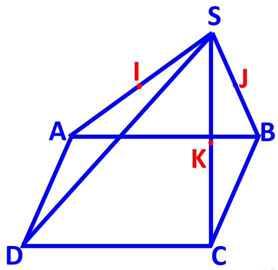
بتطبيق نتيجة مبرهنة طاليس في كل من المثلثين ABC و BCD نجد : $(IM)//(BC)$ ، $IM = \frac{1}{2}BC$ و $(NK)//(BC)$ ،

$NK = \frac{1}{2}BC$. ومنه : $(IM)//(NK)$ إذن هذين المستقيمين يعينان مستو $(IMKN)$ ولدينا $IM = NK$ وبالتالي الرباعي

$IMKN$ متوازي أضلاع ومنه قطريه $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان .

خلاصة القطع $[IK]$ ، $[JL]$ و $[MN]$ لها نفس المنتصف ومنه للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة .

تمرين 6



$ABCD$ متوازي أضلاع في مستو (P) و S نقطة خارج المستوي (P) .

نعين النقط I ، J ، K منتصفات $[SA]$ ، $[SB]$ و $[SC]$ على الترتيب .

1. ما هو تقاطع المستوي (CIJ) مع المستويين (P) و (SDA) ؟

2. برهن أن المستوي (IJK) يقطع القطعة $[SD]$ في منتصفها .

الحل :

1. المستويان (CIJ) و (P) متمايزان ولهما نقطة مشتركة C إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة C .

في المثلث SAB لدينا I و J منتصفي القطعتين $[SA]$ و $[SB]$ على الترتيب إذن حسب نتيجة طاليس (IJ) يوازي (AB) .

في المستوي (P) لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن (AB) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (DC) .

إذن المستيمين (IJ) و (DC) يعينان مستو الذي هو (CIJ) .

خلاصة : تقاطع المستويين (CIJ) و (P) هو المستقيم (DC) .

نستنتج أنالمستوي (CIJ) يشمل النقطتين I و D

بما أن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (SA) فإن I تنتمي إلى المستوي (SDA)

وبالتالي المستويين (CIJ) و (SDA) متمايزان ويشتركان في نقطتين متمايزتين I و D إذن تقاطعهما هو المستقيم (ID) .

2. في ما سبق لدينا (IJ) يوازي (DC) ؛ وفي المثلث SDC نعين L منتصف (SD) وبما أن K منتصف (SC) فإن

المستقيم (KL) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (KL) إذن النقطة L تنتمي إلى المستوي (IJK) .

بما أن المستقيم (SD) لا يوازي المستوي (IJK) فإنهما يتقاطعان في نقطة وحيدة وهي L منتصف القطعة $[SD]$.