

واجب منزلي في مادة الرياضيات

المستوى: أولى جنع مشترك علوم و تكنولوجيا

رقم الواجب: 01

التمرين الأول

(1) أثبت أن العدد $\sqrt{\frac{n}{n+2}}$ ليس عدداً ناطقاً حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث $a > b$. أثبت أن $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ ليس عدداً طبيعياً.

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $3n^3 + n$ عدداً طبيعياً زوجياً.

(4) أثبت أن العدد $\frac{679}{800}$ عشري (دون استعمال الآلة الحاسبة).

التمرين الثاني

(1) أكتب كلاً من العددين $x = 7,23$ و $y = 5,243$ على شكل كسر.

(2) استنتج الكسر الذي كتابته العشريّة $w = 59,66$ و الكسر الذي كتابته العشريّة $z = 45,20$.

التمرين الثالث

(1) ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين تماماً حيث $x < y$ و $xy = 2016$. أثبت أن $x < \sqrt{2016} < y$.

(2) أحسب المجموع: $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2016}}$

التمرين الرابع

ليكن n عدداً طبيعياً. نضع $p = n(n + 3)$.

(1) أكتب $(n + 1)(n + 2)$ بدلالة p .

(2) أكتب $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ بدلالة p .

(3) استنتج أن $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ مربع تام.

(4) تطبيق عددي: ما هو العدد الذي مُربّعه $2014 \times 2015 \times 2016 \times 2017 + 1$.

الإجابة النموذجية

التمرين الأول

(1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا $\sqrt{\frac{n}{n+2}} = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+2}$. العدد $n+2$ طبيعي موجب تماماً،

لكن العدد $n(n+2)$ ليس مربعاً تاماً لأن $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$ وعليه يكون العدد $\sqrt{n(n+2)}$ عدداً أصمماً، ومنه يكون العدد $\sqrt{\frac{n}{n+2}}$ غير ناطق.

(2) بالخلف، نرض أن $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \in \mathbb{N}$ ومنه $a^2 - b^2$ يقسم $a^2 + b^2$ ، أي أنه يوجد عدد طبيعي غير معدوم k

بحيث $a^2 + b^2 = k(a^2 - b^2)$ أي $(k-1)a^2 = (k+1)b^2$ ومنه $b^2 = \frac{k-1}{k+1}a^2$ ، نُميّز الحالات الآتية:

(أ) إذا كان $k = 1$ فإن $b^2 = 0$ ومنه $b = 0$ ، وهذا تناقض مع كون العدد b غير معدوم، ومنه يكون العدد $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ غير طبيعي.

(ب) إذا كان $k > 1$ فإن $b^2 = \frac{k-1}{k+1}a^2$ تعني أن $b = a\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ وبما أن $\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ عدد أصم فإن b

كذلك، وهذا تناقض مع كون العدد b طبيعي، ومنه يكون العدد $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ غير طبيعي.

(3) نُميّز حالتين للعدد الطبيعي n :

(أ) إذا كان n فردياً أي $n = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي.

لدينا $3n^3 + n = 3(2k+1)^3 + (2k+1) = 2(12k^3 + 18k^2 + 10k + 2)$ ومنه يكون العدد $3n^3 + n$ زوجياً.

(ب) إذا كان n زوجياً أي $n = 2k$ حيث k عدد طبيعي.

لدينا $3n^3 + n = 3(2k)^3 + (2k) = 24k^3 + 2k = 2(12k^2 + k)$ ومنه يكون العدد $3n^3 + n$ زوجياً.

(4) لدينا $\frac{679}{2^5 \times 5^2} = \frac{679}{800}$ ومنه العدد $\frac{679}{800}$ عشري.

التمرين الثاني

(1) لدينا $x = 7, \underline{23} = 7 + 0, \underline{23}$ نضع $a = 0, \underline{23}$ ومنه $100a = 23 + 0, \underline{23} = 23 + a$ ومنه

$$99a = 23 \text{ ومنه } a = \frac{23}{99}, \text{ ومنه نستنتج أن } x = 7 + a = \frac{716}{99}.$$

لدينا $y = 5, \underline{243} = 52 + 0, \underline{43} = 52 + a$ ومنه $Y = 10y = 52, \underline{43}$. بنفس الطريقة، نجد أن $a = \frac{43}{99}$ ، ومنه

$$Y = 10y = 52 + a = \frac{5191}{99} \text{ ومنه } y = \frac{5191}{990}.$$

$$(2) \text{ لدينا } w = 59,66 = x + 10y = \frac{5907}{99} \text{ و لدينا } z = 45,20 = 10y - x = \frac{4475}{99}$$

التمرين الثالث:

(1) ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين تماماً حيث $x < y$ ومنه $xy < y^2$ وكذلك $x^2 < xy$ ومنه $x^2 < xy < y^2$ ومنه $\sqrt{x^2} < \sqrt{xy} < \sqrt{y^2}$ ومنه $x < \sqrt{2016} < y$

$$(2) \text{ نضع } S = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2016}}$$

$$\text{ ومنه } S = \frac{1 - \sqrt{2}}{[1 + \sqrt{2}][1 - \sqrt{2}]} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{[\sqrt{2} + \sqrt{3}][\sqrt{2} - \sqrt{3}]} + \dots + \frac{\sqrt{2015} - \sqrt{2016}}{[\sqrt{2015} + \sqrt{2016}][\sqrt{2015} - \sqrt{2016}]}$$

$$.S = \sqrt{2016} - 1 \text{ ومنه } S = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{2015} - \sqrt{2016}}{-1}$$

التمرين الرابع:

$$(1) \text{ لدينا } (n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2 = p + 2$$

$$(2) \text{ لدينا } n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = p(p + 2)$$

$$(3) \text{ لدينا } n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = p(p + 2) + 1 = (p + 1)^2 \text{ ومنه } n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 \text{ مربع تام.}$$

$$(4) \text{ لدينا } 2014 \times 2015 \times 2016 \times 2017 + 1 \text{ يكتب على الشكل } (p + 1)^2 \text{ إذن جذره هو } p \text{ حيث } p = 2014 \times 2017 = 4062238$$