التمرين الأول : - حساب $(1+4i)^2$: لدينا $(1+4i)^2 = -15+8i$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(3+2i)z+5+i=0$ لدينا $\Delta = -15+8i = (1+4i)^2$

إذن إما $z = 1-i$ أو $z = 2+3i$ و بما أن $|z_2| > |z_1|$ فإن $z_1 = 1-i$ و $z_2 = 2+3i$.

. حساب العدد $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ ، لدينا $z_1 = \left[\sqrt{2}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]$ إذن $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left(\frac{\left[\sqrt{2}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]}{[\sqrt{2}\ ,\ 0]}\right)^{2008} = \left[1\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]^{2008}$

$= \left[1\ ,\ -\frac{2008\,\pi}{4}\right] = [1\ ,\ -504\,\pi] = 1$

2. A ، B و C صور الأعداد z_1 ، z_2 و $-2+2i$ على الترتيب لدينا :

$|z_1-z_2| = \sqrt{17}$ ، $|z_1-(-2+2i)| = \sqrt{18}$ ، $|z_2-(-2+2i)| = \sqrt{17}$ أي المثلث ABC متساوي الساقين.

3. تعيين H مرجح النقط النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 , -2 , 3 على الترتيب

لدينا $z_H = \frac{2z_1-2z_2+3(-2+2i)}{3} = -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}i$ أي $H(-\frac{8}{3}\ ,\ -\frac{2}{3})$

4. تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $2MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 16$ ....(1)

المساواة (1) تكافئ $2(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA})^2 - 2(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MB})^2 + 3(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC})^2 = 16$ **يعني** $MH^2 = \frac{110}{9}$ أي $MH = \frac{\sqrt{110}}{3}$

إذن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها H و نصف قطرها $\frac{\sqrt{110}}{3}$.

التمرين الثاني : (U_n) متتالية عددية معرفة بـ $U_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = \frac{4U_n+3}{U_n+6}$

1. البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $-3 < U_n < 1$

نسمي p(n) هذه الخاصية . من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = -1$ و $-3<-1<1$ إذن p(0) صحيحة

نفرض أن p(n) صحيحة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أي $-3 < U_n < 1$

و نبرهن صحة p(n+1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أي $-3 < U_{n+1} < 1$ و لهذا لدينا $U_{n+1} = 4 - \frac{21}{U_n+6}$

لدينا من (فرضية التراجع) $-3 < U_n < 1$ و منه $3 < U_n+6 < 7$ ومنه $-3 < -\frac{21}{U_n+6} < -7$ إذن $-3 < 4-\frac{21}{U_n+6} < 1$

و بالتالي $-3 < U_n < 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

2. إثبات أن (U_n) متزايدة تماما : بعد الحساب نجد $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n-1)(U_n+3)}{U_n+6}$

من نتيجة السؤال 1) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n $U_n - 1 < 0$ ، $U_n+3 > 0$ و $U_n+6 > 0$

إذن $U_{n+1} - U_n > 0$ وبالتالي (U_n) متزايدة تماما .

3. إثبات أن (V_n) متتالية هندسية : لدينا $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} = \frac{3}{7}V_n$ أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{7}$

و حدها الأول $V_0 = -1$ إذن $V_n = -\left(\frac{3}{7}\right)^n$ و منه نجد أن $U_n = \frac{3V_n+1}{1-V_n} = \frac{1-3\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}$

تقارب المتتالية (U_n) لدينا: $\lim U_n = \lim \frac{1-3\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n} = 1$ أي (U_n) متقاربة نحو 1 .

التمرين الثالث : التأكيدات الصحيحة هي :

1/ (جـ) ؛ 2/ (ب) ؛ 3/ (جـ) ؛ 4/ (ب) ؛ 5/ (ب) ؛ 6/ (أ) .

التمرين الرابع : I) h دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث : $h(x) = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^x$

تعيين قيمة كل من الأعداد α ، β ، λ علما أن المنحنى الممثل للدالة h يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1 ، و يشمـــل النقطة $A(2\ ;\ -e^2)$ و يقبل في النقطة A مماسا يوازي محور الفواصل .

يعني $h(1) = 0$ ؛ $h(2) = -e^2$ و $h'(2) = 0$ و $h'(x) = (\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta+\gamma)e^x$

و بعد حل الجملة نجد $\alpha = 2$ ؛ $\beta = -7$ و $\gamma = 5$

II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = (2x^2-7x+5)e^x$

1 . $D_f = \mathbb{R}$ ؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2 . دراسة تغيرات الدالة f : لدينا $f'(x) = (2x^2-3x-2)e^x$

$f'(x) = 0$ معناه $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = 2$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	$\frac{9}{\sqrt{e}}$	↘	$-e^2$	↗	$+\infty$

المستقيمات المقاربة :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ يعني حامل محور الفواصل مستقيم مقارب لـ (C)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (2x^2-7x+5)e^x = +\infty$ إذن (C) يقبل فرع قطع مكافئ بإتجاه (yy') .

3 . معادلة لمماس (Δ) لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = -2x+5$

4 . إثبات أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يكون $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$

لدينا $f''(x) = (2x^2+x-5)e^x$

$4e^x + 2f'(x) - f''(x) = 4e^x + 2(2x^2-3x-2)e^x - (2x^2+x-5)e^x$

$= (4+4x^2-6x-4-2x^2-x+5)e^x = (2x^2-7x+5)e^x = f(x)$

إستنتاج الدالة الأصلية للدالة f :

$\int f(x)dx = \int (4e^x+2f'(x)-f''(x))dx \quad 4e^x+2f(x)-f'(x) \quad (4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^x = (2x^2-11x+16)e^x$

5 . حساب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x = \lambda$ ، $x = 1$ و $y = 0$

$$A(\lambda) = \left[(2x^2-11x+16)e^x\right]_\lambda^1$$

$$= 7e - (2\lambda^2-11\lambda+16)e^\lambda \quad U.A$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda) = 7e \quad U.A$$