

الموضوع الرابع

المدة : 3 ساعات

شعبة : 3 علوم و تكنولوجيا

إختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول : (04 نقط)

الجزء أ) : نعتبر المعادلة : $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$ حيث z عدد مركب

1. برهن أن العدد المركب i حل للمعادلة (E)

2. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z يكون :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$$

3. إستنتج حلول المعادلة (E)

الجزء ب) : في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق i ، $2 + 3i$ و $2 - 3i$ على الترتيب .

1. ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$. عين لاحقة A' صورة A بـ r .

2. بين أن A' ، B و C في إستقامة و عين الكتابة المركبة للتحاكي الذي مركزه B و يحول C إلى A'

التمرين الثاني : (04 نقط) ليكن α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; 1[$

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{(1 + \alpha)U_n - \alpha}{U_n}$

1) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : U_n \geq 1$

ب - بين أن المتتالية (U_n) متناقصة .

ج - إستنتج أن (U_n) متقاربة و أحسب نهايتها .

2) لتكن (V_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$

أ - بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α

ب - أكتب عبارة V_n بدلالة n و α و إستنتج عبارة U_n بدلالة n و α .

ج - تحقق من نتيجة السؤال 1) ج) و ذلك بحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث : (04 نقط)

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نرسم بـ S لمجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$$

(1) بين أن S هو سطح كرة مركزها $\Omega(0, 2, 0)$ و نصف قطرها 3 .

(2) ليكن P المستوي ذو المعادلة الديكارتيّة $2x - 2y + z - 2 = 0$.

أدرس الوضعية النسبية لـ S و P . عين $S \cap P$.

(3) ليكن P_m المستوي ذو المعادلة الديكارتيّة $2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$.

(أ) ليكن Δ المستقيم ذو التمثيل الوسيطى : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \\ z = -2\lambda \end{cases}$: $\lambda \in \mathbb{R}$ تحقق أن Δ محتوى في P

(ب) أحسب المسافة $d(\Omega, P_m)$ للنقطة Ω إلى المستوي P_m

(ج) عين m حتى يكون P_m مماس لسطح الكرة S .

التمرين الرابع : (08 نقط)

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

(الجزء أ) لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$

(1) عين نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

(2) أحسب $g'(x)$ و بين أن $g'(x)$ و $(3 - x^2)$ لهما نفس الإشارة .

(3) إستنتج جدول تغيرات الدالة g

(4) (أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في \mathbb{R} . تحقق أن $g(0) = 0$ و نسمي α الحل غير المعلوم .

(ب) بين أن $-2.4 < \alpha < -2.3$

(5) إستنتج إشارة $g(x)$ تبعاً لقيم x

(الجزء ب)

(1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x . $f'(x) = g(x)$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) برهن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب للمنحني (C) .

(4) (أ) بين أن المستقيم (D) و المنحني (C) يتقاطعان في نقطتين A و B حيث يطلب تعيين إحداثياتهما .

(ب) أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (D) و المنحني (C)

(5) أنشئ المنحني (C) و المستقيم (D) .

(الجزء ج)

(1) لتكن الدالة H المعرفة على \mathbb{R} بـ : $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث H دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ $h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

(2) عين المساحة ، بوحدة المساحات ، للجزء المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيم (D) .

(3) ليكن m عدد حقيقي أكبر من -1 . نعتبر الحيز المستوي (D_m) المحدد بالمنحني (C) و المستقيم (D) و المستقيمتان

التي معادلتهما على الترتيب $x = -1$ و $x = m$.

(أ) أحسب المساحة A_m للحيز (D_m) بوحدة المساحات .

(ب) عين نهاية A_m لما يؤول m على $+\infty$

إنتهى