الموضوع الثاني

تمرين1 : $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$

1. حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -\left(-2x\,e^{-2x}\right)+e^{-2x}=0$ ، المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ عند $-\infty$

2.نهاية الدالة f عند $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-2x}=-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. حساب $f'(x)$: $f'(x)=-4x\,e^{-2x}$

في المجال $]-\infty;0[$ الدالة f متزايدة تماما .

في المجال $]0;+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما .

4. جدول التغيرات :

x	-∞		$-\frac{1}{2}$		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	-∞	↗	0	↘	0

5.تعيين إحداثيي النقطة A نقطة تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل: $f(x)=0$ تكافئ $x=-\frac{1}{2}$ ، $A\left(\frac{-1}{2};0\right)$

6. دراسة إشارة $f(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1. لنبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f''(x)=4(2x-1)e^{-2x}$ ، من $f''=(f')'$ نجد المطلوب

2.حل المعادلة $f''(x)=0$: $4(2x-1)e^{-2x}=0$ ومنه $x=\frac{1}{2}$

3. معادلة للمماس T للمنحني (C) عند النقطة B التي فاصلتها $\frac{1}{2}$: $y=-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}$

III) . لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(x)-\left(-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}\right)$

1. حساب $g'(x)$ و $g''(x)$: $g'(x)=f'(x)+\frac{2}{e}=-4x\,e^{-2x}+\frac{2}{e}$ ، $g''(x)=f''(x)=4(2x-1)e^{-2x}$

2. دراسة إشارة $g''(x)$ حسب قيم x

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3.استنتاج اتجاه تغير الدالة g' على $\mathbb{R}$:

في المجال $]-\infty;\frac{1}{2}[$ الدالة f متناقصة تماما .

في المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما

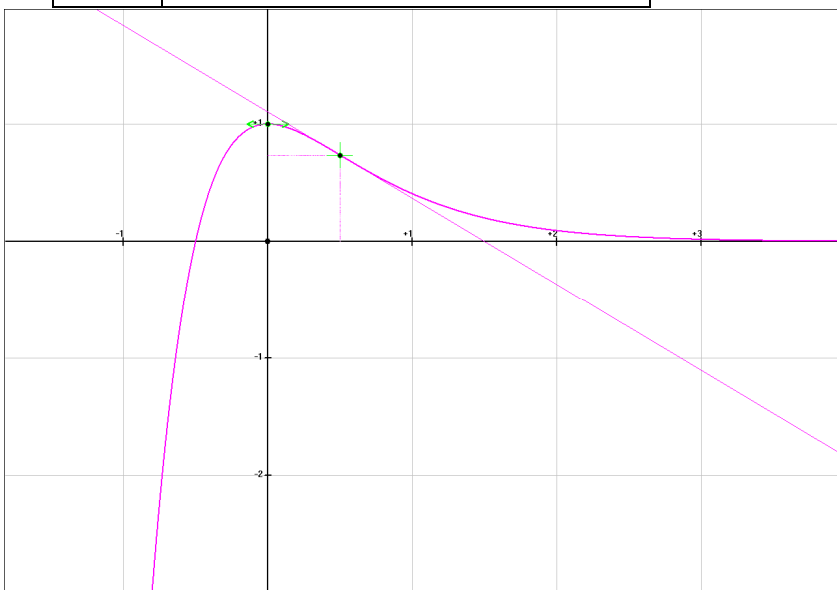
4.استنتج إشارة $g'(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x :

$g'(x)\geq g'(\frac{1}{2})$

أي $g'(x)\geq -\frac{2}{e^2}+\frac{2}{e}\geq 0$ (قيمة حدية صغرى)

اتجاه تغير g على $\mathbb{R}$:

$g'(x)\geq 0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.



5. وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس T :

في المجال $]-\infty;\frac{1}{2}[$ ، (C) يقع تحت T

في المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$ ، (C) يقع فوق T

6. رسم المماس T و المنحني (C) :

تمرين2: $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

1) خاطئ ، $z^2=-8\sqrt{3}+8i$

2) خاطئ ، $\left|z^2\right|=16$

3) صحيح ، $\arg\left(z^2\right)=\frac{5\pi}{6}$ و $\left|z^2\right|=16$ ومنه $z^2=16e^{\frac{5i\pi}{6}}$ فيكون $\frac{z^2}{16}=e^{\frac{5i\pi}{6}}$

4) صحيح ، $z^{2004}=\left(z^2\right)^{1002}=\left(16e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{1002}=e^{\frac{5i\pi 1002}{6}}=16^{1002}e^{835\pi}=16^{1002}(-1)$

5) صحيح ، $z^{2010}=\left(z^2\right)^{1005}=\left(16e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{1005}=16^{1002}e^{\frac{1575i\pi}{2}}=16^{1002}e^{\frac{-i\pi}{2}}=16^{1002}(-i)$.

تمرين3 : $A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$

1. لنبين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا :الشعاعان $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$ غير متوازيين إذن النقط A ، B ، C ليست على استقامية فهي تعين مستويا وحيدا ..

كتابة معادلة للمستوي (ABC): ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظمي للمستوي (ABC) إذن $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ ومنه $\begin{cases}2a-c=0\\b+c=0\end{cases}$

من أجل $a=1$ مثلا نجد : $b=-2$ و $c=2$ ، $\vec{n}(1,-2,2)$ فتكون معادلة لـ (ABC) : $x-2y+2z+d=0$

A تنتمي إلى (ABC) ومنه $0=d+4+4-1$ ومنه $d=-1$ فنتحصل على معادلة لـ (ABC) : $x-2y+2z-1=0$

أ.2) لنبين أن المستويين (P) ، (P') متقاطعان: $\vec{n}(1,-2,2)$ هو ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'(1,-3,2)$ هو ناظمي لـ (P') وهما غير متوازيين إذن (P) ، (P') متقاطعان

ب) لنبين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) ، (P')

C تنتمي إلى(P) لأن (P) هو (ABC) و C تنتمي إلى(P') لأن $1-9+6+2=0$ إذن C تنتمي إلى تقاطعهما .

ج) لنبين أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ): $\vec{n}\,\vec{u}=0$ و $\vec{n}'\vec{u}=0$ إذن $\vec{u}$ عمودي على $\vec{n}$ وعلى $\vec{n}'$ فهو يوازي (Δ)

د) تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $x=1+2t$ ، $y=3$ ، $z=3-t$ $(t\in\mathbb{R})$.

3.لتكن النقطة M من المستقيم (Δ) المعرف بـ : $x=1+2k$ ، $y=3$ ، $z=3-k$ $(k\in\mathbb{R})$.

أ) تعيين العدد الحقيقي k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين : $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2,z-2)$ و $\vec{u}(2;0;-1)$

متعامدين إذا وفقط إذا كان $2(x-1)-(z-2)=0$ أي $2(2k-1-1)-(-k+3-2)=0$ فنجد $k=\frac{1}{5}$.

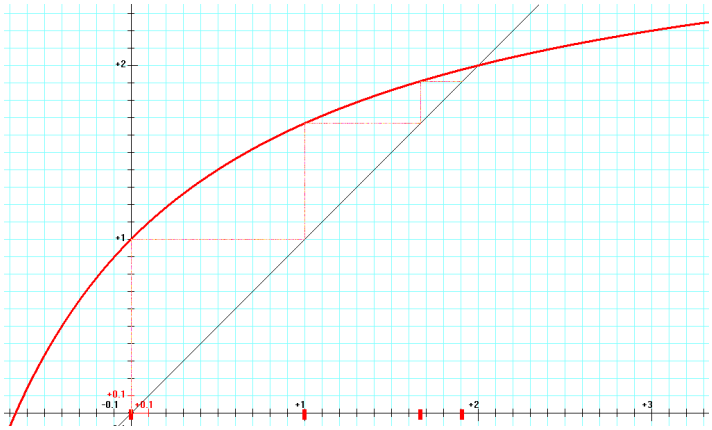
ب) استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ): مماسبق نستنتج أن النقطة M هي المسقط العمودي للنقطة A على (Δ) فتكون المسافة المطلوبة هي : $AM=\sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2+(3-2)^2+\left(\frac{7}{5}-1\right)^2}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$

تمرين4: f دالة معرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{3x+2}{x+2}$

I) دراسة تغيرات الدالة f : $f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}$ ، $f'(x)\rangle 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0\ ;+\infty[$

*حصرلـ $f(x)$ في المجال $[0\ ;2]$: f متزايدة تماما على المجال $[0\ ;2]$ إذن $f(0)\langle f(x)\langle f(2)$ أي $1\langle f(x)\langle 2$

المنحني (C)



II) $u_0=0$ ، $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+2}$.

1) تعيين الحدود : $u_1=1$ ، $u_2=\frac{5}{3}$ ، $u_3=\frac{21}{11}$

2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 2$

المرحلة الأولى : من أجل $n=0$: $0\le u_0\le 2$ صحيحة لأن $u_0=0$

المرحلة الثانية: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $0\le u_n\le 2$

ولنبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $0\le u_{n+1}\le 2$

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ ومماسبق $u_n\in[0\ ;2]$ يستلزم $u_{n+1}\in[1\ ;2]$ أي $u_{n+1}\in[0\ ;2]$ (الحصر)

3) لنبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما . $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{u_n+2}-u_n=\frac{-u_n{}^2+u_n+2}{u_n+2}=\frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$

لدينا $0\le u_n\le 2$ ومنه $u_{n+1}-u_n\ge 0$

هل (u_n) متقاربة : المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى فهي متقاربة ..

4) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-2}=4v_n$ أساسها 4 ، (V_n) ليست متقاربة.

5) كتابة V_n و u_n بدلالة n : $V_n=V_0\ r^n=\frac{-1}{2}\times 4^n$ ،

$$u_n=\frac{2v_n+1}{v_n-1}=\frac{2\left(\frac{-1}{2}\times 4^n\right)+1}{\left(\frac{-1}{2}\times 4^n\right)-1}=2\frac{1-4^n}{2+4^n}$$

6) حساب المجموع : $S_n=v_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=-\frac{1}{2}\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{1}{6}\left(1-4^n\right)$

III) $w_n=\ln\left(\frac{1}{2}4^n\right)=-\ln 2+n\ln 4$ ، (w_n) حسابية متزايدة أساسها $\ln 4$ (أساسها موجب)

انتهى