الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية الشهيد محمد بوعيسي

الإختبار الثاني في مادة الرياضيات

القسم :3ع ت + 3ر + 3 ت ر — 2010 / 03 /15 — المدة:3ساعات

الموضوع الأول

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1,1,0)$ ، $B(1,2,1)$ و $C(3,-1,2)$

1.أ) برهن أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

ب) برهن أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x+y-z-3=0$.

2. ليكن (P) و (Q) اللذين معادلتيهما : $x+2y-z-4=0$, $2x+3y-2z-5=0$ على الترتيب

برهن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي $(t\in IR)$
$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$$

3. ما هو تقاطع المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q) ؟

4. عين المسافة بين النقطة A و المستقيم (D) .

التمرين الثاني

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر الأعداد المركبة التالية:

$$z_1=\frac{10+4i}{3+7i} \quad ; \quad z_2=(1+i)(1-i) \quad ; \quad z_3=\frac{7+3i}{5-2i}$$

1)أ- اكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة z_1 ; z_2 ; z_3 .

ب- اكتب على الشكل المثلثي كل من z_1 ; z_2 ; z_3 وكذا الشكل الأسي .

2)أ- مثل النقط A ، B ، C ذات اللواحق $z_A=1-i$; $z_B=2$; $z_C=1+i$. اثبت أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين ، ثم حدد طبيعة الرباعي OABC .

ب- حدد ثم مثل (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون : $\left|\frac{z}{z-2}\right|=1$.

3) نرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي ذات اللاحقة z حيث ($z\neq 2$) ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{-2}{z-2}$.

أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z'=z$.

ب   أثبت أن لكل عدد مركب Z حيث ($z \neq 2$) فإن : $|z'-1| = \frac{|z|}{|z-2|}$ ثم استنتج علاقة بين المسافات

OM ، BM ، IM' حيث : I منتصف القطعة $[OB]$.

ج) استنتج أنه عندما تتحرك النقطة M على (Δ) فإن M' تتحرك على دائرة (Γ) يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

التمرين الثالث :

1)أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

2)تعطى في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية:

$225x-180y=90$ (1) عين حلا خاصا للمعادلة (1) ثم استنتج حلها العام .

3)عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق. $|x-y+1|<2$

4) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α

ويكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس β. عين α و β ثم a وb .

التمرين الرابع :

1.نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-xe^{2x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ) أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$.

ب) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم انشئ جدول تغيراتها.

2. نسمي (Γ) التمثيل البياني للدالة g المعرفة بـ : $g(x)=e^x$ في معلم متعامد و متجانس

أ) بين أن للمنحنين (C_f) و (Γ) نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة (-1) .

ب) أرسم (T) ، (C_f) و (Γ) .

3.نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1+xe^{x+1}$

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة h و برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)\geq 0$

ب) أستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (Γ) .

4 . m عدد حقيقي كيفي ، M نقطة من المنحني (Γ) ذات الفاصلة m .

أ) أكتب معادلة للمماس (D) للمنحني (Γ) عند النقطة M .

ب) المماس (D) يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين A و B . أكتب بدلالة m إحداثيات النقطة J منتصف $[AB]$.

ج) أثبت أن J تنتمي إلى (C_f) . د) ارسم (D) و J من أجل $m=0$.

تصحيح اختبار الفصل الثاني

التمرين الأول

1) أ) لدينا : $\overrightarrow{AB}(0;1;1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-2;2)$ شعاعين غير مرتبطين خطيا و منه النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة

ب) ليكن $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي لـ : $2x+y-z-3=0$,

لدينا: $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0+1-1=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4-2-2=0$ و النقطة A تحقق المعادلة $2x+y-z-3=0$ إذن للمستوي (ABC) معادلة من الشكل : $2x+y-z-3=0$

2) $\begin{cases} x+2y-t-4=0 \\ 2x+3y-2t-5=0 \\ z=t \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x+2y=t+4 \\ 2x+3y=2t+5 \\ z=t \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=-2y+t+4 \\ -4y+2t+8+3y=2t+5 \\ z=t \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$ و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) .

1) بالتعويض في $2x+y-z-3=0$ تكافئ $2(-2+t)+3-t-3=0$ أي : $t=4$

المستويات الثلاث تتقاطع في النقطة $D(2;3;4)$

2) نلاحظ أن النقطة A تنتمي إلى المستوي (Q) لكن هذا غير كاف ، لذلك يجب تعيين المستوي المار بالنقطة A و العمودي على (D) ثم نقطة التقاطع E بين هذا المستوي والمستقيم (D)

لدينا : $\overrightarrow{u_D}(1;0;1)$ ، $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_D}=0$ يكافئ $(x-1).1+(y-1).0+(z-0).1=0$

أي: $x+z-1=0$

بالتقاطع مع (D) : $(-2+t)+t-1=0$ تكافئ $t=\frac{3}{2}$ و منه: $E(-\frac{1}{2};3;\frac{3}{2})$

و $AE=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(3-1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{34}{4}}$

التمرين الثاني في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر الأعداد المركبة : $z_1=\frac{10+4i}{3+7i}$ ، $z_2=(1+i)(1-i)$, $z_3=\frac{7+3i}{5-2i}$

1/ أ/ كتابة z_1 , z_2 , z_3 على الشكل الجبري

$z_1=\frac{10+4i}{3+7i}=\frac{(10+4i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)}=\frac{(30+28)+(-70+12)i}{9+49}=1-i$, $z_2=(1+i)(1-i)=2$

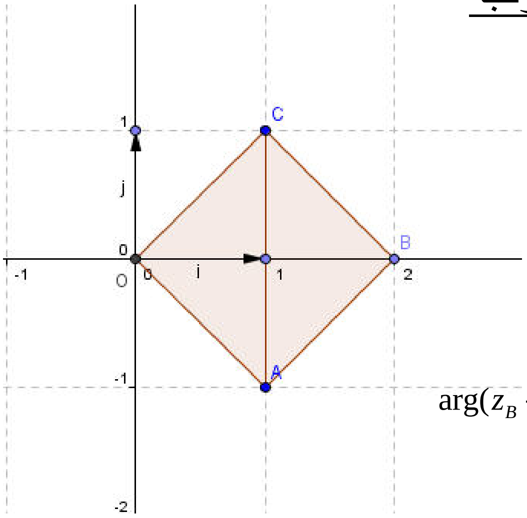
$z_3=\frac{3+7i}{5-2i}=\frac{(3+7i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{(35-6)+(14+15)i}{25+4}=1+i$

ب/ كتابة z_1 , z_2 , z_3 على الشكل المثلثي ثم ألأسي

$$z_3=(1+i)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\;e^{\frac{\pi}{4}i}\;;\quad z_2=2=[2;0]=2\;;\quad z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\;e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

2/ ا/ تمثيل كل من C ,B,A صور كل من الأعداد المركبة

$z_C=1+i$, $z_B=2$, $z_A=1-i$



إثبات أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين

لدينا $\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_C}=\frac{2-(1-i)}{2-(1-i)}=\frac{1+i}{1-i}=i$ إذن $\left|\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_C}\right|=1$

و منه $|Z_B-Z_A|=|Z_B-Z_C|$

ولدينا

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_c}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $\arg(z_B-z_A)-\arg(z_B-z_c)=\frac{\pi}{2}$

ومنه $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$

إذن المثلث ABC قائم في B ولدينا كذالك $OA=OC=AB=BC=\sqrt{2}$ إذن الرباعيOABC مربع

ب/تحديد مجموعة النقط M(z) في المستوي حتي يكون $\left|\frac{z}{z-2}\right|=1$

لدينا $\left|\frac{z}{z-2}\right|=1$ معناه $|z|=|z-2|$ و $z\neq 2$

معناه $x^2+y^2=(x-2)^2+y^2$ و $(x,y)\neq(2,0)$

معناه $x^2+y^2=x^2+y^2-4x+4$, و $(x,y)\neq(2,0)$

و منه $x=1$

إذن المجموعة النقط M(z) حتى يكون $\left|\frac{z}{z-2}\right|=1$ هي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=1$

3/ ا/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z'=z$: $z'=z$ يكافئ في $\frac{-2}{z-2}=z$ يكافئ $\begin{cases} z^2-2z+2=0 \\ z\neq 2 \end{cases}$

حل المعادلة $z^2-2z+2=0$, $\Delta'=1-2=-1=i^2$ إذن $z=1-i$ او $z=1+i$

و منه مجموع الحلول هي S حيث $S=\{1-i\;;\;1+i\}$

ب/ إثبات انه من اجل كل عدد مركب $z\,(z\neq 2)$ فان $|z'-1|=\frac{|z|}{|z-2|}$

لدينا $|z'-1|=\left|\frac{-2}{z-2}-1\right|=\left|\frac{-2-(z-2)}{z-2}\right|=\left|\frac{-z}{z-2}\right|=\left|\frac{-z}{z-2}\right|=\left|\frac{z}{z-2}\right|$

استنتاج علاقة بين المسافات IM' ,BM, OM حيث I منتصف $[OB]$ إذن $Z_1=\frac{Z_B}{2}=1$

يعني $\overrightarrow{OM}$ صورة z و منه $oM=|z|$

$\overrightarrow{BM}$ صورة z - 2 و منه $BM=|z-2|$

$\overrightarrow{IM}$ صورة z' - 1 و منه $IM'=|z'-1|$

وبما أن $|z'-1|=\frac{|z|}{|z-2|}$ فان $IM'=\frac{OM}{BM}$ ومنه $OM=IM'\times BM$

جـ) M تتحرك على (Δ) معناه $\frac{|z|}{|z-2|}=1$ و منه $|z'-1|=1$ $(x'-1)^2\ y'^2=1$

اذن M' تتحرك على الدائرة (Γ) مركزها I ونصف قطرها 1

التمرين الثالث

1. $p\gcd(180,225)=45$.

2. $225x-180y=90$ معناه $5x-4y=2$ (2)

وحل خاص لهذه المعادلة هو $(2,2)$ لأن: $5\times2-4\times2=2$ (3)

بطرح (3) من (2) نجد : $5(x-2)=4(y-2)$ وحسب نظرية غوص:

4 يقسم الجداء $5(x-2)$ و4 أولي مع 5 إذن 4 يقسم $(x-2)$.

أي $(x-2)=4k$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ومنه $(y-2)=5k$ ، $k\in\mathbb{Z}$ إذن : $x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$

3. لدينا $x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$ و $|x-y+1|<2$ ومنه : $x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$ و $|k|<2$

$x=4k+2$ ، $k\in\mathbb{Z}$ $y=5k+2$ و $k\in\{-1,0,1\}$

وبالتالي : $(x,y)\in\{(-2,-3),(2,2),(6,7)\}$.

3. لدينا : $a=5\alpha+2=4\beta+4$ و $b=2\alpha^2+5\alpha+2=2\beta^2+6$ ومنه : $5\alpha-4\beta=2$ و $2(\alpha^2-\beta^2)+5\alpha=4$

أي : $\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $2(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)+5\alpha=4$

$\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $2(-k).(9k+4)+5(4k+2)=4$

$\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $-3k^2+2k+1=0$ إذن : $\alpha=4k+2$ ، $k\in\mathbb{N}$ $\beta=5k+2$ و $k=1$

وبالتالي : $\alpha=6$ و $\beta=7$ $a=32$. و $b=104$

التمرين الرابع

.1 أ) نعلم أن أسية أي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب تماما و منه إشارة f من إشارة $(-x)$

f موجبة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و معدومة عند 0 و سالبة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) الدالة f هي جداء دوال قابلة للاشتقاق على IR و بالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على IR حيث :

$$f'(x)=-e^{2x+1}-2xe^{2x+1}=-(2x+1)e^{2x+1}$$

ان إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $2x+1$ لأن $e^{2x+1}\succ 0$

x	$-\infty$	-05	$+\infty$
f'	$+$		$-$
$f(x)$	0 ↗	05	↘ $-$

2 أ) معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-1) هي : $y=\frac{1}{e}(x+1)+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$

ب) معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-1) هي : $y=\frac{1}{e}(x+1)+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$

.3أ) الدالة h قابلة للاشتقاق على IR و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=(x+1)e^{x+1}$

h متزايدة على المجال $]-\infty;-1]$ و متناقصة على المجال $[-1;+\infty[$ و $h(-1)=0$ ، إذن $h(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ب) لدينا : $g(x)-f(x)=h(x)e^{x}$ إذن : $g(x)\geq f(x)$ من أجل عدد حقيقي x و منه المنحني (Γ) يقع فوق (C_f) .

4. أ) معادلة المماس (D) للمنحني (Γ) عند النقطة M ذات الفاصلة m هي :

$y=e^{m}(x-m)+e^{m}=e^{m}x+e^{m}(1-m)$

ب) نسمي $(x_m;0)$ احداثيي النقطة A و $(0;y_m)$ احداثيي النقطة B

لدينا : $x_A=m-1$ لأن : $e^{m}\neq 0$ و $y_B=e^{m}(1-m)$ إذن: $J\left(\dfrac{m-1}{2};\dfrac{e^{m}(1-m)}{2}\right)$

ج) لتكن : $J(x_J;y_J)$ نلاحظ أن : $y_J=f(x_J)$ و بالفعل $f(\dfrac{m-1}{2})=-\dfrac{m-1}{2}e^{m}=y_J$

و بالتالي النقطة J تنتمي إلى (C_f)