الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية　　　　ثانوية الشهيد محمد بوعيسي

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

القسم :3ع ت +3 ر+3 ت ر　　　2010/03/15　　　المدة 3 ساعات

التمرين الاول

I نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^3-12z^2+48z-128=0 \rightarrow E$

1 تحقق أن 8 حل للمعادلة E

2 حدد العددين α , β حيث لكل عدد مركب Z: $Z^3-12Z^2+48Z-128=(Z-8)(Z^2+\alpha Z+\beta)$

3 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة E

II المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط A وB وC التي لواحقها على الترتيب $Z_1=2+2\sqrt{3}$, $Z_2=2-2\sqrt{3}$, $Z_3=8$

1- اكتب z_1 على الشكل المثلثي ثم أنشئ النقط A , B و C

2- عين الشكل المثلثي للعدد المركب : $L=\dfrac{Z_1-Z_3}{Z_1-Z_3}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC

3- حدد لاحقة النقطة D مرجح الجملة, $(A\ ,\ |Z_1|)\ ;\ (B\ ,\ |Z_2|)\ ;\ (C\ ,\ |Z_3|)$ ثم أنشئها

4- عين مجموعة النقطة M من المستوي ذات اللاحقة بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

التمرين الثاني :

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ نعتبر النقط $A(2,1,2)$; $B(3,0,-2)$; $C(1,-1,1)$

1 أ) تحقق أن النقط A و B و C تعيين مستويا

ب) تحقق أن $\vec{n}(-7\ ,\ 5\ ,\ -3)$ شعاع نظامي للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له

2 ليكن المستوي (P) ذو المعادلة $x - y + 3 = 0$

أ) احسب بعد النقطة $\omega(1,0,1)$ عن المستوي (P)

ب)استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها ω والمماسة للمستوي (P)

3 – أ) بين أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

ت) عين تمثيلا وسطيا للمستقيم (Δ)

ج) ادرس وضعية المستقيم (Δ) إلى سطح الكرة .

التمرين الثالث

I . لكل عدد طبيعي n نعتبر النسبة : $A=\dfrac{2n+7}{n^2+7n+12}$

1 بين ان كل العددين n+3 , n+4 أولي مع العدد 2n + 7

2 استنتج ان النسبة غير قابلة للاختزال

II . 1 أ) باستعمال خوارزمية اقليدس أوجد حلا للمعادلة $19x+29y=1$ (x ,y عددان صحيحان)

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة $19x+29y=818$

2- حل في $\mathbb{Z}X\mathbb{Z}$ المعادلة $19x+29y=818$ (x ,y عددان صحيحان)

التمرين الرابع

الجزء 1.. دراسة دالة مساعدة g

الدالة g معرفة على $]0.+\infty[$ بالشكل : $g(x)=x-2+lnx$

1- احسب نهايات g عند 0^+ . $+\infty$

2- ادرس اتجاه تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3- برهن ان المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا α حيث $1.55\le\alpha\le1.56$

4- استنتج إشارة g على المجال $]0.+\infty[$

الجزء 2 ..دراسة الدالة f

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x)=(1-\dfrac{1}{x})(lnx-1)$

نرمز ب (C_f) للمنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$، $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$=2cm

1 ادرس إشارة f على المجال $]0.+\infty[$

2 احسب نهايات f عند0 . $+\infty$

3 تحقق انه لكل من المجال $]0.+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4 برهن ان $f(\alpha)=-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

– استنتج اعتمادا على حصر في الجزء 1 حصرا للعدد $f(\alpha)$

5 اكتب معادلة لمماس للمنحني عند النقطة ذات الفاصلة 1

6 ارسم (Δ) و (C_f)

7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عند حلول المعادلة $(m+1)x+(1-x)\ln(x)-1=0$

تصحيح الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

.I

.1 $z^3-12z^2+48z-128=0 \quad \to E$

لدينا

$$8^3-12\times 8^2+48\times 8-128=512-768+384-128$$
$$=0$$

ومنه 8 حل للمعادلة $\left(E\right)$

.2 لدينا

$$\begin{aligned} z^3-12z^2+48z-128 &= \left(z-8\right)\left(z^2+\alpha z+\beta\right) \\ &= z^3+\alpha z^2+\beta z-8z^2-8\alpha z-8\beta \\ &= z^3+(\alpha-8)z^2+(\beta-8\alpha)z-8\beta \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}\alpha-8=-12\\ \beta-8\alpha=48\\ -8\beta=-128\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=16\end{cases}$

.3 المعادلة $\left(E\right)$ تكافئ $\left(z-8\right)\left(z^2-4z+16\right)=0$

ومنه $\begin{cases}z-8=0\\ z^2-4z+16=0\end{cases}$

* $z-8=0$ تكافئ $z=8$
* $z^2-4z+16=0$

$$\Delta=(-4)^2-4\times 16=16-64=-48$$
$$=(4\sqrt{3})^2 i^2=(4\sqrt{3}\,i)^2$$

ومنه للمعادلة حلان :

$$z_1=\frac{4+4\sqrt{3}\,i}{2}=2+2\sqrt{3}\,i$$
$$z_2=\frac{4-4\sqrt{3}\,i}{2}=2-2\sqrt{3}\,i$$

إذن للمعادلة $\left(E\right)$ ثلاثة حلول هي

$$2-2\sqrt{3}\,i \ \ , \ \ 2+2\sqrt{3}\,i \ \ , \ \ 8$$

.II

.1

$$z_1=2+2\sqrt{3}\,i$$

ومنه

$$\left|z_1\right|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \to \theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$$

ومنه $z_1=4(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$

.2

$$L=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{-6+2\sqrt{3}\,i}{-6-2\sqrt{3}\,i}=\frac{-3+\sqrt{3}\,i}{-3-\sqrt{3}\,i}$$
$$=\frac{(-3+\sqrt{3}\,i)(-3-\sqrt{3}\,i)}{(-3-\sqrt{3}\,i)(-3-\sqrt{3}\,i)}$$
$$=\frac{9-3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i-3}{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{6-6\sqrt{3}\,i}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\left|L\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases} \to \theta=\frac{-\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$$

ومنه $L=\cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)$

$\left|L\right|=1$ معناه $\dfrac{\left|z_1-z_3\right|}{\left|z_2-z_3\right|}=1$ ومنه $\dfrac{CA}{CB}=1$

أي أن $CA=CB$............(1)

ولدينا $Arg(L)=Arg(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3})=\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi$..............(2)

إذن من (1)و (2)نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

.3 لدينا $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=4 \quad , \left|z_3\right|=8$

$$z_D=\frac{4z_1+4z_2+8z_3}{4+4+8}=\frac{z_1+z_2+2z_3}{4}=5$$

.4 لدينا :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(1+1+2)\overrightarrow{MD}$$
$$=4\overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{MC}$$
$$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$$

ومنه : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

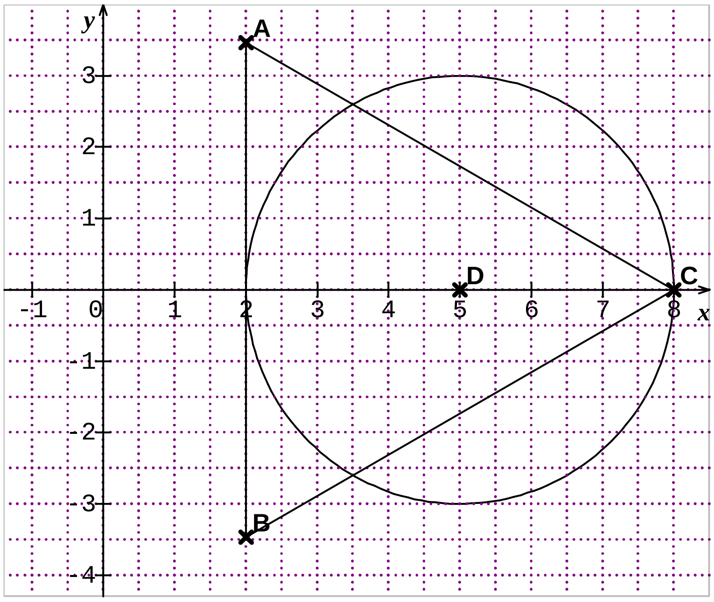
تكافئ $\left\|4\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$

ومنه $MD=\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها D

ونصف قطرها $\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$

الشكل



التمرين الثاني :

1. أ) لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\0-1\\-2-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-2\\-1-1\\1-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\frac{-1}{-2}\neq\frac{1}{-1}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

إذن النقط A , B , C تعين مستويا

ب) لدينا

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(-7)\times1+5(-1)-3(-4)$$
$$=-7-5+12=0$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(-7)\times(-1)+5(-2)-3(-1)$$
$$=7-10+3=0$$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

إذن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

معادلة المستوي (ABC) من الشكل :

$$-7x+5y-3z+d=0 \quad / \quad d\in\mathbb{R}$$

لكن $A\in(ABC)$ ومنه $-7(2)+5(1)-3(2)+d=0$

إذن $d=15$

ومنه $-7x+5y-3z+15=0$ معادلة للمستوي (ABC)

2. لدينا $(P): x-y+3=0$

أ) بعد النقطة ω عن المستوي (P)

$$d=\frac{\left|1-0+3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

ب) ليكن (S) سطح الكرة التي مركزها ω و المماسة للمستوي (P)

$M(x,y,z)\in(S)$ معناه $\omega M=2\sqrt{2}$

ومنه $\omega M^2=8$ إذن $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=8$

أي أن $x^2+y^2+z^2-2x-2z-6=0$

وهي معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)

3. أ) $(ABC): -7x+5y-3z+15=0$

$(P): x-y+3=0$

$\vec{n}_1\begin{pmatrix}-7\\5\\-3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)، $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

$\frac{5}{-1}\neq\frac{-7}{1}$ ومنه $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ غير مرتبطين خطيا

إذن المستويان (ABC) و (P) متقاطعين وفق مستقيم (Δ)

ب) لتكن $M(x,y,z)\in(\Delta)$ ومنه

$$\begin{cases}-7x+5y-3z+15=0\\ x-y+3=0\end{cases}$$

إذن

$$\begin{cases}-7x+5y=3z-15\\ x-y=-3 \qquad / \ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

بضرب العادلة الأولى في 5 وجمعها مع المعادلة الثانية نجد :

$$-2x=3z-30$$
$$x=\frac{-3}{2}z-15$$
$$x=\frac{-3}{2}t-15$$

بالتعويض في المعادلة الثانية نجد : $y=\frac{-3}{2}t-12$

ومنه $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{-3}{2}t-15\\ y=\frac{-3}{2}t-12 \quad / \ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

التمرين الثالث :

I. $A = \dfrac{2n+7}{n^2+7n+12}$

أ – لدينا $-2(n+3)+1(2n+7)=1$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين $n+3$, $2n+7$ أوليان فيما بينهما

ولدينا $2(n+4)-1(2n+7)=1$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين $n+4$, $2n+7$ أوليان فيما بينهما

ب – لدينا العدد $2n+7$ أولي مع كل من العددين $n+4$, $n+3$

فهو أولي مع الجداء $(n+4)(n+3)$

إذن $2n+7$ أولي مع $n^2+7n+12$

ومنه النسبة A غير قابلة للاختزال

II. 1°/ أ) لدينا الجدول

	1	1	1	9
29	19	10	9	1
	10	9	1	0

29=19+10 ومنه 10=29-19

19=10+9 ومنه 9=19-9

10=9+1 ومنه 1=10-9

$$1 = 10-9 = (29-19)-(19-10)$$
$$= 29-19-19+10$$
$$= 29-2\times19+29-19$$
$$= 29\times2-3\times19$$

ومنه $19\times(-3)+29\times(2)=1$

إذن $(-3,2)$ حل خاص للمعادلة $19x+29y=1$

ب) لدينا $19\times(-3)+29\times(2)=1$

ومنه $19\times818(-3)+29\times818(2)=818$

إذن $19\times(-2454)+29\times(1636)=818$

ومنه $(-2454,1636)$ حل خاص للمعادلة $19x+29y=818$

2°/ لدينا $\begin{cases}19x+29y=818\\19(-2454)+29(1636)=818\end{cases}$

بالطرح نجد : $19(x+2454)+29(y-1636)=818$

ومنه $19(x+2454)=29(-y+1636)$

29 يقسم $19(x+2454)$ و 29 أولي مع 19 ومنه حسب مبرهنة غوص فإن

29 يقسم $(x+2454)$ ومنه $x+2454=29k \quad / \ k\in\mathbb{Z}$

إذن $x=29k-2454 \quad / \ k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض نجد $19(29k)=29(-y+1636)$

أي $19k=-y+1636$ إذن $y=-19k+1636$

أي $\begin{cases}x=29k-2454\\y=-19k+1636\end{cases} \ / \ k\in\mathbb{Z}$

التمرين الرابع :

I. $g(x)=x-2+\ln x$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=-\infty$

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

$$g'(x)=1+\frac{1}{x}$$

لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $g'(x)>0$

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$

x	$0 \qquad\qquad \alpha \qquad\qquad +\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

3. الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1,55;1,56]$

و $g(1,55)\simeq-0,01$

$g(1,56)\simeq0,005$

$$g(1,55)\times g(1,56)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1,55<\alpha<1,56$

4. من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج :

$g(x)<0$ معناه $x\in]0,\alpha[$

$g(x)=0$ معناه $x=\alpha$

$g(x)>0$ معناه $x\in]\alpha,+\infty[$

II. $f(x)=(1-\dfrac{1}{x})(\ln x-1)$

1. $f(x)=0$ يكافئ $(\dfrac{x-1}{x})(\ln x-1)=0$

ومنه $\begin{cases}x-1=0\\\ln x-1=0\end{cases}$ أي أن $\begin{cases}x=1\\\ln x=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=1\\x=e\end{cases}$

x	0		1		e		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\ln x-1$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

إذن $f(x)<0$ يكافئ $x\in]1,e[$

$f(x)>0$ معناه $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

$f(x)=0$ معناه $x=1$ أو $x=e$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

3. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-1)+\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})$$

$$f'(x)=\frac{\ln x-1+x-1}{x^2}=\frac{x-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

.4 لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha-2+\ln\alpha=0$

إذن $\ln\alpha=-\alpha+2$

ولدينا $f(\alpha)=(1-\frac{1}{\alpha})(\ln\alpha-1)=\frac{\alpha-1}{\alpha}(-\alpha+2-1)$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}(1-\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

حصر $f(\alpha)$

لدينا $1,55<\alpha<1,56$ ومنه $0,55<\alpha-1<0,56$

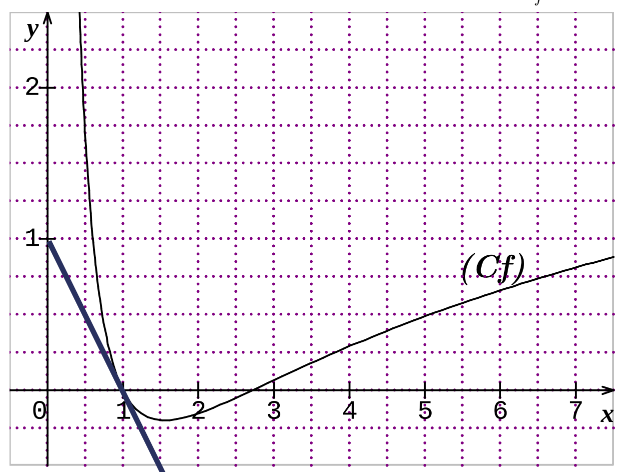
أي أن $(0,55)^2<(\alpha-1)^2<(0,56)^2$

ومنه $\frac{(0,55)^2}{1,56}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{(0,56)^2}{1,55}$

إذن $-\frac{(0,56)^2}{1,55}<-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<-\frac{(0,55)^2}{1,56}$

ومنه $-0,20<f(\alpha)<-0,19$

.6 رسم (C_f) و (Δ) .5 معادلة لمماس (Δ) للمنحني (C) هي : y = -x + 1



.7 المناقشة البيانية و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة

(m+1)x + (1-x)ln(x) – 1 = 0 ………(E)

(E) يكافئ $f(x)$ = m و منه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة y = m

من أجل m< f(α) المعادلة (E) لاتقبل حل في ℜ

من أجل m = f(α) المعادلة (E) تقبل حل مضاعف

من أجل m> f(α) المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين