تصحيح الواجب المنزلي رقم 02

مسالة رقم 76ص 32:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$

1) $D_f=]-\infty,+\infty[$

2) **كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة**

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1} & ; \ x\in]-\infty\ ,-1]\cup[1\ ,\ +\infty[\\ f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{1-x^2} & ; \ x\in[-1\ ,\ 1] \end{cases}$$

3) **حساب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$

4) **استمرارية f عند -1**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{1}{2} \end{cases} \quad , \quad f(-1)=\frac{1}{2}$$

إذن: f مستمرة عند -1

استمرارية f عند 1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{1-x^2}\right)=-\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right)=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad , \quad f(1)=-\frac{1}{2}$$

إذن: f مستمرة عند 1

5) **اشتقاقية f عند -1**

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{-\frac{1}{2}(h-1)+\sqrt{h^2-2h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{-\frac{1}{2}h+\sqrt{h^2-2h}}{h}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{h\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{-1-\frac{2}{h}}\right)}{h}=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{-\frac{1}{2}h+\sqrt{-h^2+2h}}{h}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{h\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{-1+\frac{2}{h}}\right)}{h}=+\infty$$

إذن: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1

وبنفس الطريقة الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1

6) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالات $]-\infty,-1[\ ;\ ]-1,1[$ و $]1,+\infty[$ ولدينا

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}} & ; \ x\in]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[\\ \frac{-2x-\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}} & ; \ x\in]-1\ ;\ 1[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$

من اجل $x\in]-\infty;-1[$ هي إشارة $2x-\sqrt{x^2-1}$ لدينا $x>-1$ ومنه $2x>-2$ ومنه $2x-\sqrt{x^2-1}>0$ أي f متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$

من اجل $x\in]1;+\infty[$ هي إشارة $2x-\sqrt{x^2-1}$ أي : نفرض $2x>\sqrt{x^2-1}$ ومنه $4x^2>x^2-1$ ومنه $3x^2+1>0$ وهذا صحيح أي $2x-\sqrt{x^2-1}>0$ أي f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$

من اجل $x\in]-1;1[$ إشارة $f'(x)$ من اجل $-2x-\sqrt{1-x^2}$

- إذا كان $0<x<1$ فان $-2x-\sqrt{1-x^2}<0$ أي f متناقصة على $[0,1]$
- إذا كان $-1<x<1$ فان $f'(x)=0$ يكافئ $-2x-\sqrt{1-x^2}$ يكافئ $-2x=\sqrt{1-x^2}$ يكافئ $4x^2=1-x^2$

يكافئ $5x^2-1=0$ يكافئ $\left(\sqrt{5}x-1\right)\left(\sqrt{5}x+1\right)=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ أو $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ (مرفوض) في المجال $]-1\ ,\ 0[$

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0
$f'(x)$	+		−

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{3}{2}x$ مقارب مائل لـ (C) من جهة $-\infty$

الوضعية إشارة $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}<0$ من جهة $-\infty$ أي (C) يضع تحت المقارب المائل

و $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C) من جهة $+\infty$

الوضعية إشارة $\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}<0$ من جهة $+\infty$ أي (C) يضع تحت المقارب المائل