تصحيح امتحان البكالوريا التجريبية

أعداد مركبة و تحويلات نقطية	الإجابة النـــموذجية	سلم

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$

$\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$ تكافئ $\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)=0$ أو $\left(z^2-2z+4\right)=0$

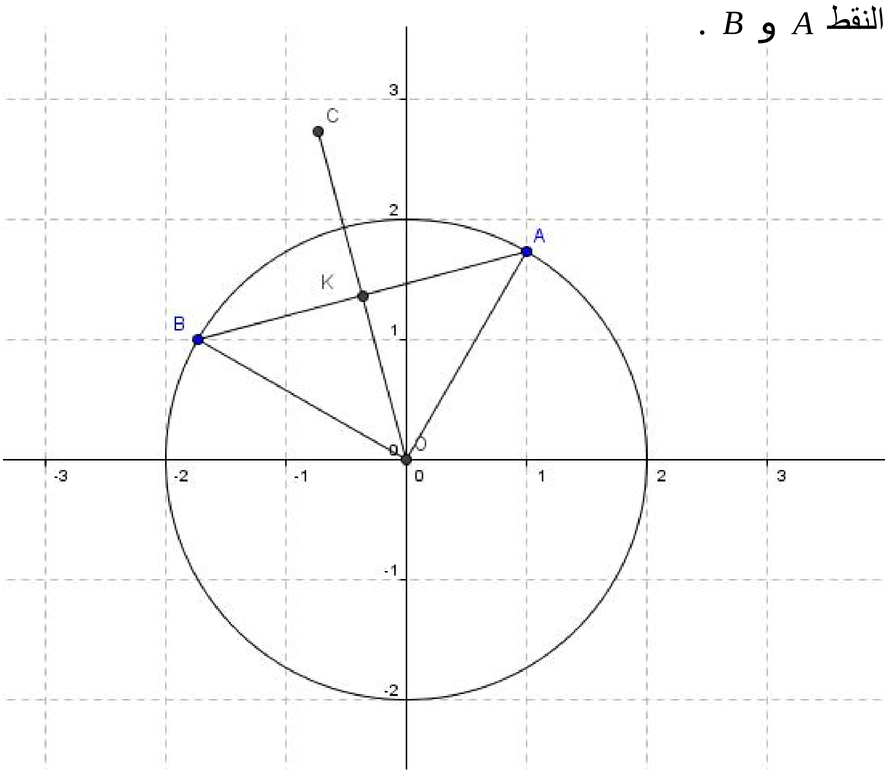
$\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)=0$ تكافئ $iz=-1-i\sqrt{3}$ أي : $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{i}=-\sqrt{3}-i$

لنحل المعادلة : $z^2-2z+4=0$

$\Delta=-12=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ ، $z'=1-i\sqrt{3}$ ، $z''=1+i\sqrt{3}$ و منه : $S=\left\{-\sqrt{3}-i;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}$

2) أ) $z_A=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

ب) تعليم النقط A و B .



ج) لدينا : $OA=|z_A|=2$ ، $OB=|z_B|=2$ إذن : $OA=OB$ ومنه المثلث OAB متساوي الساقين ومن جهة أخرى : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\arg(z_B)-\arg(z_A)=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ ومنه المثلث OAB قائم .

إذن المثلث OAB قائم و متساوي الساقين .

د) $z_K=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}+i\right)}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

3) $z_C=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

البرهان أن K منصف القطعة $[OC]$

	لدينا : $z_K=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{z_O+z_C}{2}$ ومنه النقطة K منتصف القطعة $[OC]$. - البرهان أن الرباعي $OACB$ مربع. بما أن النقطة K منتصف $[OC]$ و $[AB]$ فإن الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع. لكن $OA=OB$ فأن الرباعي معين و إضافة الى أن قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{®}{2}$ فأن المعين $OACB$ هو مربع. **حل التمرين الثاني:** الاقتراح 1 صحيح الاقتراح 2 خاطئ الاقتراح 3 صحيح الاقتراح 4 صحيح الاقتراح 5 خاطئ 1) المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=t+2\\y=-2t\ ,\ t\in\mathbb{R}\\z=3t-1\end{cases}$ له شعاع توجيه $\vec{u}(1;-2;3)$ و المستوي (P) الذي معادلته الديكارتية: $x+2y+z-3=0$ له شعاع ناظمي $\vec{n}(1;2;1)$ لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=1\times1+(-2)\times2+3\times1=0$ ومنه المستقيم (D) يوازي المستوي (P) . 2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء معناه $M\in(P)\cap(P')\cap(P")$: $\begin{cases}x-2y+3z-3=0\\2x+3y-2z-6=0\\4x-y+4z-12=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=2y-3z+3\\2(2y-3z+3)+3y-2z-6=0\\4(2y-3z+3)-y+4z-12=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=2y-3z+3\\7y-8z=0\\7y-8z=0\end{cases}$ ومنه النقطة ذات الإحداثيات $(3;0;0)$ تنتمي الى المستويات الثلاث. 3) المستقيمان (d_1) و (d_2) الممثلا ن وسيطيا : $t\in\mathbb{R}$ $(d_1):\begin{cases}x=-2-3t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases}$، $u\in\mathbb{R}$ $(d_2):\begin{cases}x=7+u\\y=2+2u\\z=-6-u\end{cases}$ يكونا متقاطعين إذا و فقط إذا وجد عددان حقيقيان t و u بحيث : $\begin{cases}2-3t=7+2u\\1+t=2+2u\\-3+2t=-6-u\end{cases}$ حل هذه الجملة يعطي : $\begin{cases}u=-1\\t=-1\end{cases}$ ومنه المستقيمان (d_1) و (d_2) متقاطعان (في النقطة ذات الإحداثيات $(5;0;-5)$) 4) إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما: $(2;4;-2)$ و الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هما : $(4;-4;-4)$، الشعاعان غير مرتبطين خطيا و عليه فإن النقط A ، B و C تعين مستوي وحيد. بالإضافة لدينا : $\bullet -1+2-1=0$ $\bullet 1+0-1=0$ إذن النقط A ، B و C تنتمي الى المستوي الذي معادلته $x+z-1=0$. $\bullet 3-2-1=0$ 5) إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما: $(3;0;-3)$ و الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هما : $(5;-2;2)$، هذان الشعاعان غير مرتبطين خطيا	الهندسة الفضائية

وعليه فإن النقطة C لا تنتمي الى المستقيم (AB) أو أيضا النقطة C ليست مرجح للنقط A و B .

حل التمرين الثالث:

1) $u_1=-\frac{5}{3}$ ، $u_2=-\frac{14}{9}$ ، $u_3=-\frac{14}{27}$

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي $n\geq 4$ ، $u_n\geq 0$.

نسمي $p(n)$ هذه الخاصية.

- نتحقق من صحة $p(n)$ من أجل $n=4$. $u_4=\frac{1}{3}u_3+3-2=\frac{67}{81}\succ 0$ إذن : $p(4)$ محققة.
- نفرض أن $p(k)$ صحيحة أي : $u_k\geq 0$ و نبرهن على صحتها من أجل $k+1$ أي: $u_{k+1}\geq 0$.

من اجل $k\geq 4$ لدينا: $\frac{1}{3}u_k\geq 0$ و $k-2\geq 0$ و بالجمع نجد: $\frac{1}{3}u_k+k-2\geq 0$ أي : $u_{k+1}\geq 0$

و منه: من أجل عدد طبيعي $n\geq 4$ ، $u_n\geq 0$.

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ ، $u_n\geq n-3$

من أجل $n\geq 5$ لدينا : $n\succ 4$ و $u_n=\frac{1}{3}u_{n-1}+(n-1)-2$ مع $u_{n-1}\geq 0$ و منه: $u_n\geq\frac{1}{3}\times 0+n-3$

أي: $u_n\geq n-3$

جـ) استنتاج نهاية المتتالية (u_n).

بما أن : $u_n\geq n-3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} n-3=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=+\infty$ **(النهايات و المقارنة)**

2) نعرف المتتالية (v_n) كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$

أ) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

$$v_{n+1}=-2u_{n+1}+3(n+1)-\frac{21}{2}=-2(\frac{1}{3}u_n+n-2)+3(n+1)-\frac{21}{2}$$

$$=-\frac{2}{3}u_n+n-\frac{7}{2}=\frac{1}{3}\left(-2u_n+3n-\frac{21}{2}\right)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-2u_0+3\times 0-\frac{21}{2}=-\frac{25}{2}$

ب) حساب v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

جـ) إستنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

لدينا : $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ تكافئ $u_n=-\frac{1}{2}v_n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $T_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

حساب بدلالة n المجموع T_n ثم إستنتاج المجموع S_n بدلالة n .

$$T_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\frac{25}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{75}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع

$$u_0 = -\frac{1}{2}v_0 + \frac{3}{2}\times 0 - \frac{21}{4}$$

$$u_0 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}\times 1 - \frac{21}{4}$$

$$u_0 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{3}{2}\times 2 - \frac{21}{4}$$

و بالجمعطرف لطرف نجد: .

.

$$u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}\times n - \frac{21}{4}$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left(v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n\right)_n + \frac{3}{2}\left(0+1+2+\ldots+n\right) - \frac{21}{4}(n+1)$$

إذن :

$$S_n = -\frac{1}{2}T_n + \frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2-18n-21}{4}$$

حل التمرين الرابع:

لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$

1) أ) **حساب** $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسيا.

$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ **لأن** : $\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) = -4$ **و** $\lim_{x\to 2}\ln(x-2) = -\infty$ **ونستنتج أن**

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته : $x = 2$

ب) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x **من المجال** $]2,+\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\left(\ln(x-1) - \ln(x-2)\right) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

جـ) **لستنتاج** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x-2} = 1$ **ومنه** : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = 0$ **و** $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x - 5 = +\infty$ **إذن** : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) **حساب** $f'(x)$ ثم بيان أنه من اجل كل x **من المجال**

$]2,+\infty[$: $f'(x) = \frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2) + 3\times 2(x-2) - 3\times 2(x-1)}{2(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$$

لستنتاج اتجاه تغير الدالة f ، **ثم تشكيل جدول تغيراتها.**

الدوال اللوغاريتمية و حساب الدوال الأصلية

إن أشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي إشارة x^2-3x-4 لأن المقام موجب تماما.

$\Delta = 25 \succ 0$ ، $x'=-1$ و $x''=4$

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول التغيرات :

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(4)=\frac{1}{2}\times 4-5+3\ln\left(\frac{4-1}{4-2}\right)=-3+3\ln\frac{3}{2}$$

3) بيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=\frac{1}{2}x-5$ هو

مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)-\left(\frac{1}{2}x-5\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)=0$ ومنه المستقيم

(Δ) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x-5$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

5) بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين ~ و حيث : $2.3\le \sim \le 2.4$ و $9.2\le \quad \le 9.3$.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[2.3;2.4]$ و $f(2.3)\approx 0.55$ ، $f(2.4)\approx -0.04$

و العدد 0 محصور بين $f(2.3)$ و $f(2.4)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$

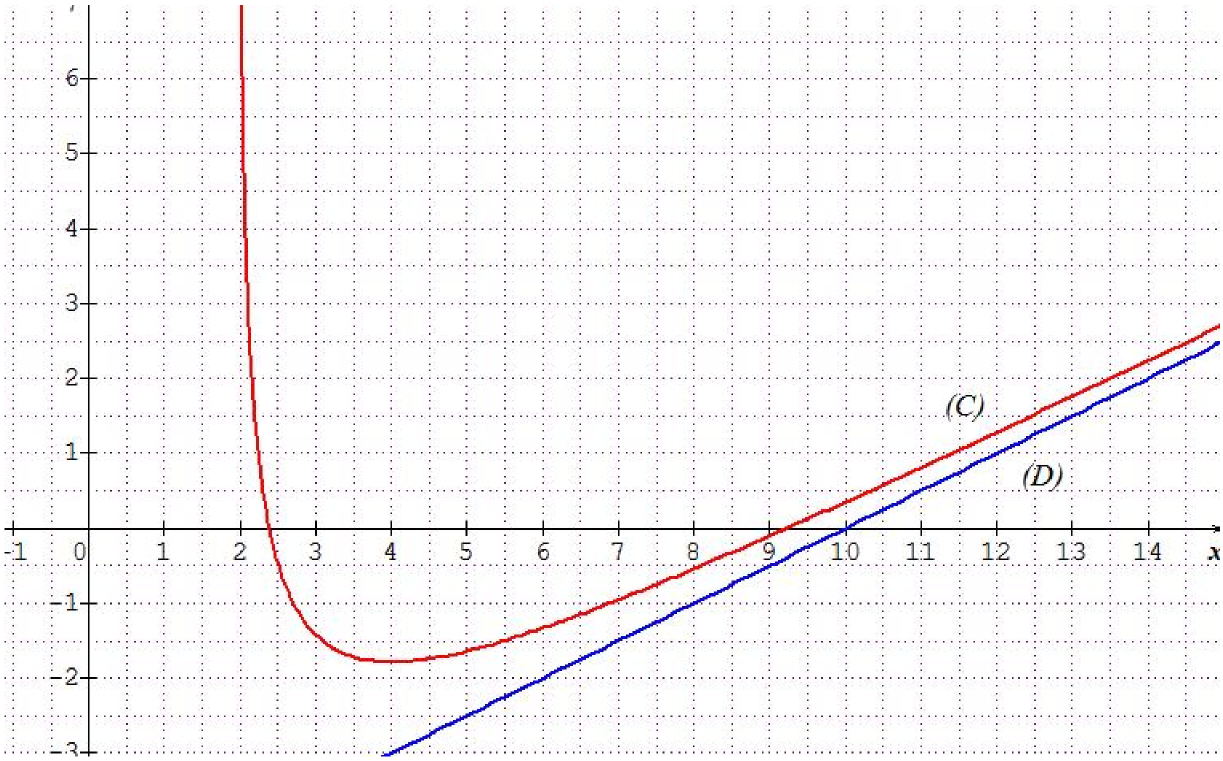
تقبل حلا وحيدا ~ على المجال $[2.3;2.4]$.

و بالمثل الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[9.2;9.3]$ و $f(9.2)\approx -0.01$ ، $f(9.3)\approx 0.04$

و العدد 0 محصور بين $f(9.2)$ و $f(9.3)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا على المجال $[9.2;9.3]$.

6)إنشاء المستقيم (Δ) و المنحني (C_f)



7) أ) بيان أن H هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]2,+\infty[$.

من أجل كل x من $]2,+\infty[$:

$$H'(x)=1\times\ln(x-1)+(x-1)\times\frac{1}{x-1}-1\times\ln(x-2)-(x-2)\times\frac{1}{x-2}$$
$$=\ln(x-1)+1-\ln(x-2)-1=\ln(x-1)-\ln(x-2)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

إذن من أجل x من $]2,+\infty[$: $H'(x)=h(x)$ و منه H هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]2,+\infty[$

ب)إستنتاج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]2,+\infty[$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2,+\infty[$ ، $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ و منه الدالة F المعرفة بـ : $F(x)=\frac{1}{4}x^2-5x+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)+C$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]2,+\infty[$.

الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

1) بــقراءة بيانية نشكل جدول تغيرات **الدالة** f

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 2$

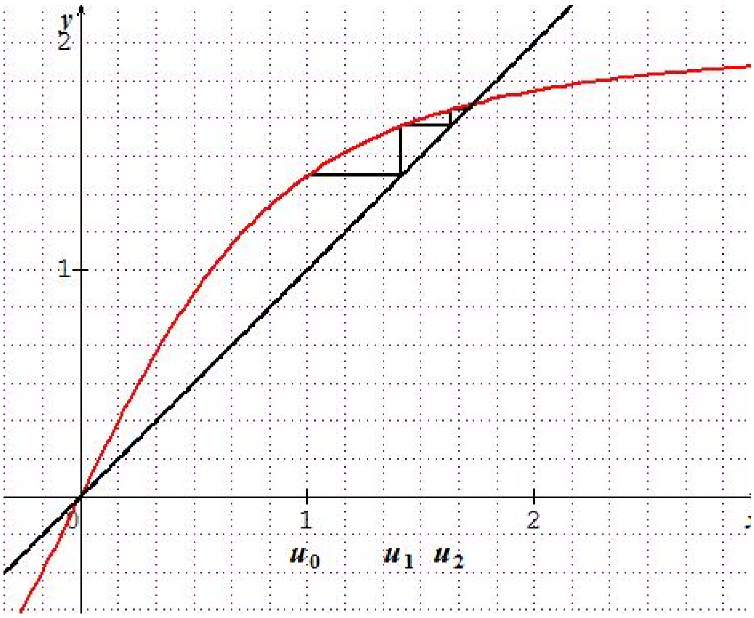
2) بيان أنه إذا كان $x \in \left[1, \sqrt{3}\right]$ **فإن** $f(x) \in \left[1, \sqrt{3}\right]$

لدينا : $1 \le x \le \sqrt{3}$; **و بما أن الدالة** f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ **فإن** : $f(1) \le f(x) \le f\left(\sqrt{3}\right)$ **أي** :

$1 \le \frac{2}{\sqrt{2}} \le f(x) \le \sqrt{3}$: **إذن** $f(x) \in \left[1, \sqrt{3}\right]$

3) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ **و من اجل كل** عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) **باستعمال المنحنى** (C) والمستقيم ذو المعادلة $y = x$، **تمثيل الحدود** u_0 ، u_1 ، u_2 **على محور الفواصل**



أعداد مركبة و تحويلات نقطية

ب) **وضع** تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

يظهر أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة

ج)**البرهان** بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=1$ إذن : $1\le u_0\le\sqrt{3}$

فرض أن : $1\le u_n\le\sqrt{3}$ صحيحة و نبرهن أن : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$

لدينا : $1\le u_n\le\sqrt{3}$ و بما ان الدالة f متزايدة تما ما فإن : $f(1)\le f(u_n)\le f(\sqrt{3})$ أي : $1\le\dfrac{2}{\sqrt{2}}\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$

ومنه : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

د) بيان انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$ ثم لستنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدينا : $$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}-u_n=u_n\left(\frac{2}{\sqrt{1+u_n^2}}-1\right)=u_n\left(\frac{2-\sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)=\frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$$

نعلم أن : $u_n\le\sqrt{3}$ ومنه $\sqrt{1+u_n^2}\le 2$ أي : $2-\sqrt{1+u_n^2}\ge 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$ $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ- بيان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا : $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}=\frac{\left(\dfrac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}{3-\left(\dfrac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}=\frac{4u_n^2}{3\left(1+u_n^2\right)-4u_n^2}=4\times\frac{u_n^2}{3-u_n^2}=4\times v_n$$

الهندسة الفضائية

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{1^2}{3-1^2}=\dfrac{1}{2}$

ب- كتابة عبارة v_n ثم لستنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا : $v_n=v_0\times q^n=\dfrac{1}{2}\times 4^n=2^{2n-1}$

$v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$ معناه : $v_n\times\left(3-u_n^2\right)=u_n^2$ أي : $3v_n-v_n\times u_n^2=u_n^2$ ومنه : $u_n^2=\dfrac{3v_n}{1+v_n}$ أي :

$$u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}=\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{1+2^{2n-1}}}$$

جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{1+2^{2n-1}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3\times\cancel{2^{2n-1}}}{\cancel{2^{2n-1}}\times\left(\dfrac{1}{2^{2n-1}}+1\right)}}=\sqrt{3}$$

ومنه نستنتج ان المتتالية (u_n) مقاربة و تقارب نحو العدد $\sqrt{3}$.

حل التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 4\times1\times4 = -12 = 12i^2 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2 \text{ ، } z' = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i \text{ ، }$$

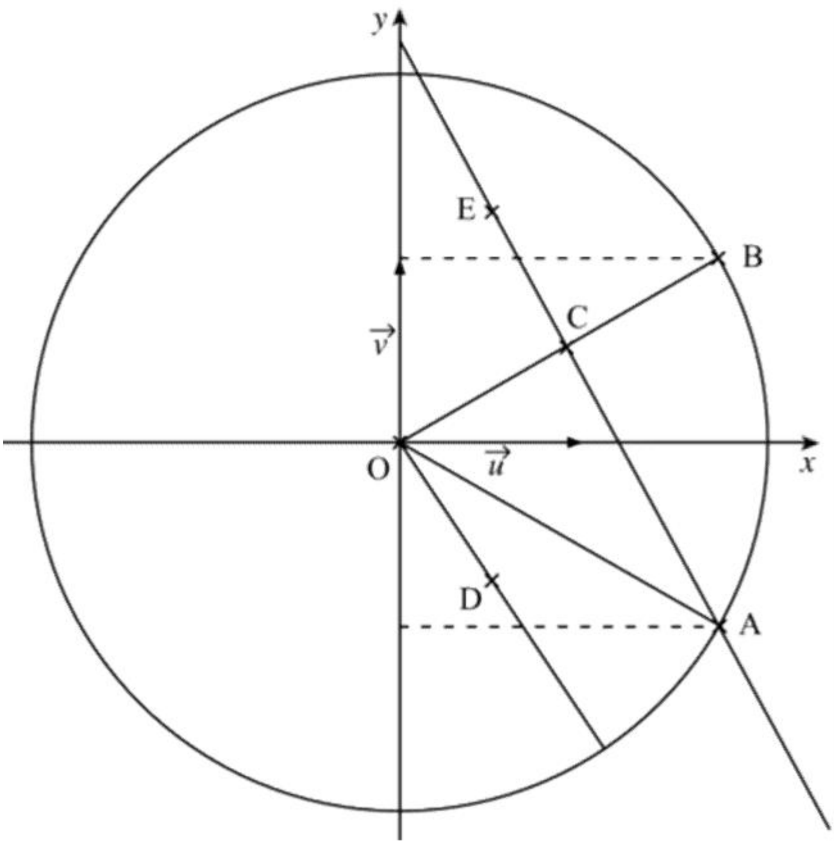
$$z'' = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$$

أ) كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

$$|z_A| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2 \text{ ، } \begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه : } \theta_A = -\frac{\pi}{6} \text{ إذن : } z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_B = \overline{z_A} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ، } z_c = \frac{z_B}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ب) تعليم النقط A ، B و C (أنظر الشكل).



جـ) البرهن أن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

لدينا : $OA = |z_A| = 2$ ، $OB = |z_B| = 2$ ، $AB = |z_B - z_A| = \left|\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i\right| = |2i| = 2$

أو: $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $\left|\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right| = \dfrac{OA}{OB} = 1$ ومنه : $OA = OB$ ،

الدوال اللوغاريتمية و الحساب التكاملي

$$\arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) = \arg\left(e^{-i\frac{®}{3}}\right) = -\frac{®}{3} = \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$$

و منه المثلث OAB **متقايس الأضلاع.**

3)أ) تعليم النقطتان D و E (**أنظر الشكل**) .

ب)البرهان أن : $OE = BE = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$

الصيغة المركبة **للدوران** هي : $z' = e^{-i\frac{®}{2}}$ **و للإنسحاب** t هي : $z' = z + 2i$ و منه :

$z_D = -iz_C$ **و** $z_E = 2i + z_D$ وعليه نحصل : $z_E = 2i - iz_C$

$$z_E = 2i - ie^{i\frac{®}{6}} = 2i - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2i - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \text{ ، } z_E = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)i = \frac{1}{2}\left(1 + \left(4 - \sqrt{3}\right)i\right)$$

$$OE = |z_E| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{3}{4} - 2\sqrt{3}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

$$BE = |z_E - z_B| = \left|\frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - \sqrt{3} - i\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

4) بيان أن النقط A ، C و E في إستقامية .

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي : $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \sqrt{3} + i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ **و لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{AE}$ هي

$$z_E - z_A = \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - \sqrt{3} + i = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right):$$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$ و $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3};3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **و بالتحقق بإستعمال شرط التوازي نجد:**

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ مرتبطين خطيا

و هذا يعني أن النقط A ، C و E في إستقامية .

حل التمرين الثالث:

نعتبر النقط $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ ، $B(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ و $C(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$

1)أ– حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم الأطوال AB و AC .

$$\overrightarrow{AB}(3;2;-2) \text{ ، } \overrightarrow{AC}(0;2;1) \text{ ، } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 0 + 2\times 2 + (-2)\times 1 = 2$$

من جهة أخرى: $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$ ، $AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ب – إستنتج قيمة مقربة مقدرة بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$.

نعلم أن : $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{85}}$ و باستعمال الحاسبة نجد: $\widehat{BAC}=77\deg rés$

جـ –إستنتاج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

بما أن : $\widehat{BAC}\neq 0^{\circ}$ و $\widehat{BAC}\neq 180^{\circ}$ فإن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2)التحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x-y+2z+2=0$.

لدينا : $2\times(-2)-0+2\times1+2=0$ ومنه : $A\in(P)$

$2\times1-2+2\times(-1)+2=0$ ومنه : $B\in(P)$

$2\times(-2)-2+2\times2+2=0$ ومنه : $C\in(P)$

النقط A ، B و C تنتمي الى نفس المستوي (P) وهي ليست في استقامية فهي تعين مستوي وحيد ومنه نستنتج أن المستوي (ABC) هو المستوي (P).

3)ليكن (P_1) و (P_2) المستويين اللذين معادلتيهما $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$ على الترتيب.

- البرهان أن (P_1) و (P_2)متقاطعان وفق المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

لدينا : $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ ، شعاعان ناظميان لـ (P_1) ، (P_2) ، على الترتيب

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (P_1) و (P_2) ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم (D)

لدينا : $\begin{cases}x+y-3z+3=0\\ -x-2y+6z=0\end{cases}$ بعد الحساب نجد : $\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

4)بيان أن (D) و (ABC) متقاطعان ثم تعيين نقطة تقاطعهما.

لتكن : $M(-2;-1+3t;t)$ نقطة من (D)

$M\in(ABC)$ معناه : $2\times(-2)-(-1+3t)+2(t)+2=0$ أي : $t=-1$

من أجل $t=-1$ نحصل على النقطة ذات الإحداثيات $(-2;-4;-1)$ وعليه فإن (D) و (ABC) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $(-2;-4;-1)$.

حل التمرين الرابع:

I – نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=e^x+x+1$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x+1\right)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x+1\right)=+\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x)=e^x+1\succ 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ على $\mathbb{R}$ و التحقق أن: $-1.28 \prec \sim \prec -1.27$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$.

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ و العدد 0 محصور بين $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ على $\mathbb{R}$.

لدينا : $g(-1.28)\approx -1.962699547\times 10^{-3}$ ، $g(-1.27)\approx 1.083162178\times 10^{-2}$ و منه : $g(-1.28)\times g(-1.27)\prec 0$

ج)استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

x	$-\infty$	~	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II – نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$

1) أ– حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x+1}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ومنه المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\,(x)}{\cancel{e^x}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\dfrac{1}{e^x}}=+\infty$$

2) بيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\times g(x)$ ،استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x+1\right)-e^x\left(xe^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left((1+x)\left(e^x+1\right)-xe^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(e^x+1+xe^x+x-xe^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+1+x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\times g(x)$$

إن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي سالبة على المجال $]-\infty;\sim]$ و موجبة على المجال $[\sim;+\infty[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\sim]$متزايدة تماما على المجال $[\sim;+\infty[$.

x	$\sim$	$+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow f(\sim) \nearrow +\infty$	

$f(\sim)\approx -0.28$

3) بيان أن : $f(\sim)=\sim+1$ ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\sim)$ (تدور النتائج الى 10^{-2}).

لدينا : $f(\sim)=\frac{\sim e^{\sim}}{e^{\sim}+1}$ لكن : $g(\sim)=e^{\sim}+\sim+1$ أي : $e^{\sim}=-\sim-1$ ومنه : $f(\sim)=\frac{\sim(-\sim-1)}{-\sim-1+1}=\sim+1$

بما أن : $-1.28\prec\sim\prec-1.27$ فإن : $-.28\prec f(\sim)\prec-.27$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

لدينا : $f(x)-y=\frac{xe^x}{e^x+1}-x=\frac{xe^x-xe^x-x}{e^x+1}=-\frac{x}{e^x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $(-x)$ أي المنحني

(C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]-\infty;0[$ وفوقه في المجال $]-\infty;0[$ ويتقاطعان في مبدأ الإحداثيات.

5) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{1}{2}x$$

6) رسم (Δ)،(T) و (C_f).