الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية الشهيد عبد الكريم هالي قمار

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبية — دورة : مــاي 2014

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : **الرياضيات** — **المدة** : 4 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z والوسيط الحقيقي α التالية :

$$(E).....z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0$$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه .

2. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(z-\alpha i)(z^2+az+b)=0$.

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

II- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و G التي لواحقها على الترتيب $z_A=\alpha i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}$ و $z_G=5$.

1. بين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$ هي $z_E=\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\dfrac{5+\alpha}{2}\right)$.

2. عين z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة G بالدوران r الذي مركزه I منتصف $[AB]$ وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. احسب z_G-z_A و z_F-z_E ، ثم اكتب العدد $\dfrac{z_G-z_A}{z_F-z_E}$ على شكله الأسي. ماذا تستنتج ؟

4. أ) بين أن $\dfrac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\dfrac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$.

ب) عين قيمتي α التي تكون من أجلها النقط A ، E و F في استقامية.

جـ) من أجل قيمتي α المتحصل عليهما سابقا بين أن A تنتمي إلى الدائرة (C) التي قطرها $[BC]$.

د) استنتج في هذه الحالة طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثاني :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$.

1. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

2. تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1:-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) . ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3. أ) عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .

جـ) نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي . عين العدد t حتى يكون $AS^2=AB^2$.

د) عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$. ثم احسب حجمه V.

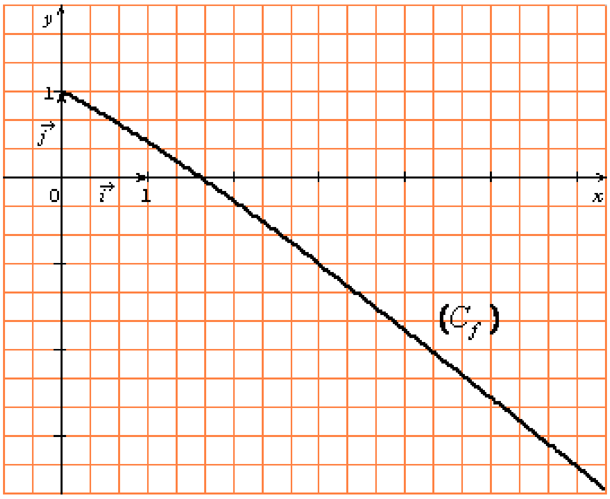
4. بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدين .

5. أ) عين المجموعة (S) للنقط M التي تحقق ، $\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$.

ب) عين الوضع النسبي للمجموعة (S) والمستوي (ABC).

التمرين الثالث :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\sqrt{x+1}$ و (C_f) منحناها (انظر الشكل)



أ) بقراءة بيانية عين حصرا بين عددين صحيحين للعدد α بحيث $f(\alpha)=0$.

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

أ) احسب u_1 و u_2 ثم $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le\alpha$.

جـ) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

د) استنتج نهاية المتتالية (u_n) ثم احسبها.

التمرين الرابع :

k عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=x-1+xe^{kx}$.

نرمز بـ (C_k) للمنحنى الممثل للدالة f_k في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I- نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x)=1+(1+kx)e^{kx}$.

1. احسب المشتق $g'_k(x)$ ثم أدرس إشارته.

2. شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g_k(x)>0$.

II- 1. أ) بين جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها.

ب) احسب نهاية الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$.

جـ) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_k) بجوار $-\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_k) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) بين أن النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k};-\frac{2}{k}(1+e^{-2})-1\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_k).

4. أ) بين أن المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0\le\alpha\le1$.

ب) بين أن المسافة بين النقطة $N(\alpha;f_1(\alpha))$ والمستقيم (D) تساوي $\alpha e^{\alpha}/\sqrt{2}$.

5. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_k(x)+f_{-k}(-x)=-2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_k) و (C_{-k})؟

ب) الشكل المرفق يمثل المنحنى (C_1). أرسم على نفس الشكل المنحنى (C_{-1}).

III- λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر التكامل التالي: $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx$.

1. هل العدد I_k يمثل مساحة ؟ علل.

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب I_1 ثم $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة.

3. بين أن $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_k=\frac{1}{k^2}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$.

II- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\overline{\sqrt{5}-2i}$.

1. احسب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$ ثم أنشئ النقط A، B و C.

2. بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

3. أ) عين $z_{C'}$ لاحقة النقطة C' نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A .

ب) علما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع بين أن لاحقة النقطة B' هي $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$.

جـ) اكتب العدد $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}$ على شكله الأسي.

د) استنتج أن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$ ، و $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

التمرين الثاني :

I- a، b و c أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

عين الأعداد a، b و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$.

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين.

1. أ) عين الثنائية $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) .

ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1) .

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13.

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3. أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب) عين $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$.

التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$. والمستقيم (D) المعرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$. مع k عدد حقيقي.

1. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. استنتج طبيعة المثلث ABC .

2. أ) عين إحداثيات كل من النقطتين G و I حيث G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$ و I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ب) ما طبيعة الرباعي $ABIG$.

3. أ) احسب AG^2 ، BG^2 و CG^2 .

ب) عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$.

4. نعتبر سطح الكرة (S) الذي مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$. والمجموعة (P) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{V}=-18$ حيث $\overrightarrow{V}(-6;-6;0)$.

أ) عين معادلة ديكارتية للمجموعة (P).

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد (P)، ثم استنتج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة G على (P).

جـ) عين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

5. بين أن المستويين (P) و(ABC) يتقاطعان في (D) .

التمرين الرابع :

I- باستعمال قابلية الاشتقاق للدالة $x\mapsto \ln x$ عند 1 ، بين أن: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ ، $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$

ب) من أجل $x\geq 1$ ، بين أن ، $\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=x-1$.

جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1. فسر النتيجة بيانيا.

2. أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، ثم شكل جدول تغير الدالة f.

جـ) ارسم المنحنى (C_f).

3. ليكن S مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و$x=3$.

A وB نقطتان من (C_f) فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3 ، والنقطتان $P(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوى.

أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث ABQ.

ب) استنتج أن ، $2\ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq 4\ln(1+\sqrt{2})$. (ملاحظة : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$)

III- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ ، $g(x)\geq 1$.

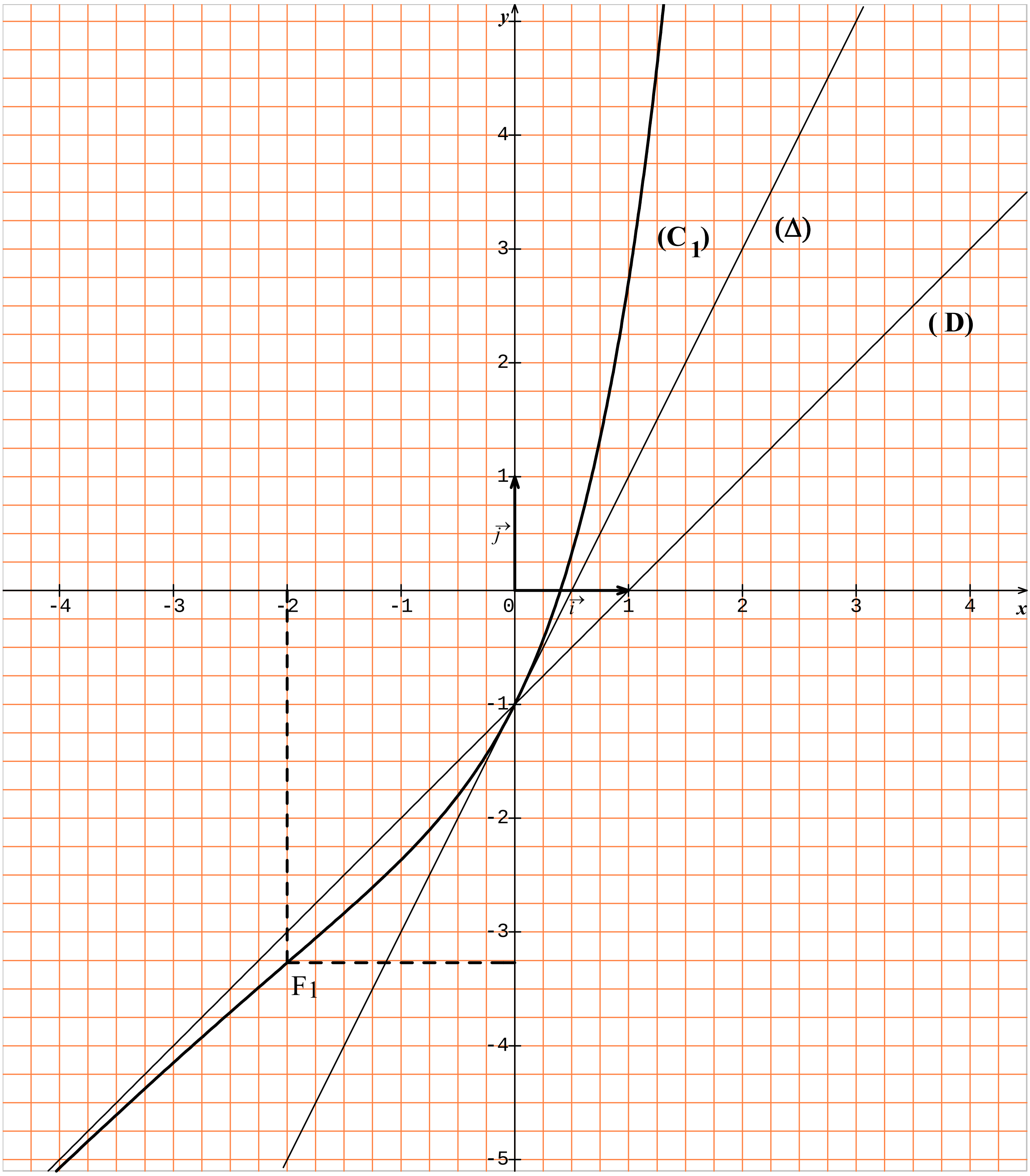
2. أ) بين أن $g\circ f(x)=x$. ثم بين أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_f) فإن $M'(y;x)$ نقطة من (C_g).

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟ ارسم المنحنى في المعلم السابق (C_g).

3. ليكن S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$.

أ) بين أن $S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

ب) احسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ثم استنتج قيمة S.


y
x
0
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-5
(C 1)
(Δ)
(D)
F1