الجــــزء الأول

شعبة العلوم التجريبية

التمرين01: دورة 2014الموضوع (1)

لتكن (u_n)المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$.

و(v_n)المتتالية العددية المعرفة كمايلي: و من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+4$.

1)بيّن أنّ(v_n)متتالية هندسية يطلب تعين و حدّها الأول.

2)اكتب كلا من v_n و u_nبدلالة n .

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4)احسب المجموع S_nحيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ-بيّن أن المتتالية (w_n)متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب-أحسب $\lim_{x\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين02: دورة 2014الموضوع (2)

I)نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرّفة على$\mathbb{N}$بحدها العام: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$ وeأساس اللوغاريتم النيبري

1)بيّن أنّ(u_n)متتالية هندسية يطلب تعين و حدّها الأول.

2)أحسب $\lim_{x\to+\infty}u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموعS_nحيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

II) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\ln(u_n)$ حيث ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبري

1)عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم أستنتج نوع المتتالية (v_n).

2-أ)احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n=\ln(u_0\times u_1\times u_2\times.....\times u_n)$.

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n+4n\succ 0$.

التمرين03: دورة 2013الموضوع (1)

I)المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1)بيّن أنّ(v_n)متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول . 2) احسب $\lim_{x\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية(u_n)معرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

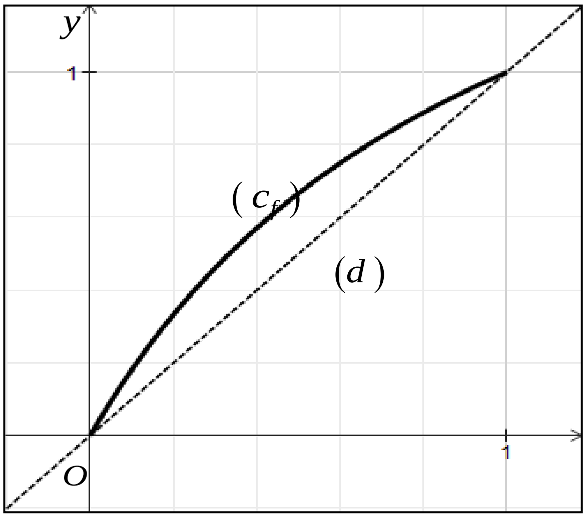
1)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le 6$

2)ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ)برهن أنه ،من أجل كل عدد طبيعي n، $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$

ب)بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le (6 - u_n) \le v_n$ استنتج $\lim_{x\to+\infty} u_n$

التمرين04: دورة 2013الموضوع (2)



في الشكل المقابل،(C_f)هو التمثيل البياني للدالة f

المعرّفة على المجال $[0;1]$بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

و(d)المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1) (u_n)المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي$u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة ،

ثم مثل الحدود u_0 ،u_1،u_2 وu_3على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية(u_n) وتقاربها.

2) أ) أثبت أن الدالة fمتزايدة تماما على المجال$[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \le 1$

جـ) ادرس اتجاه تغير المتتالية(u_n).

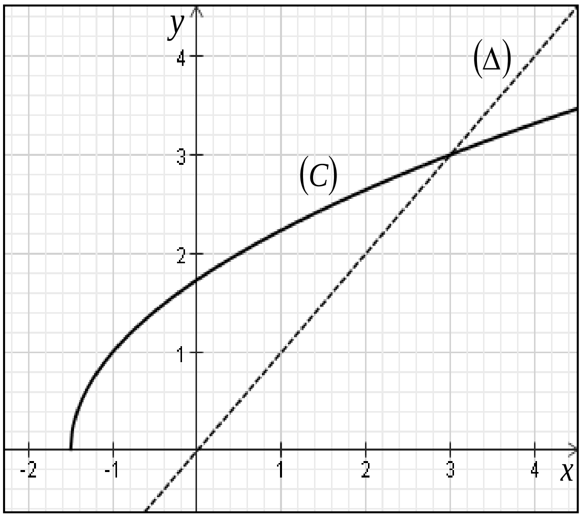
3) (u_n)المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أ)برهن أنّ(v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأول v_0.   ب) أحسب نهاية (u_n).

التمرين05: دورة 2012الموضوع (1)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني



و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب معلم متعامد ومتجانس (انظر الشكل المقابل)

أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0، u_1، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n<3$

3) أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب)- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين06: دورة 2012الموضوع (2)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3<u_n<4$

2) بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$، استنتج أن (u_n) متزايدة تماما

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، احسب حدّها الأول

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

جـ) نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n: $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\dots\times(u_n-3)$

اكتب P_n بدلالة n، ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين07: دورة 2011الموضوع (1)

(u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n+1$

(v_n)، متتالية معرّفة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات توجدإجابة واحدة منها فقط صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1.المتتالية (v_n): أ-حسابية ، ب-هندسية ، جـ- لاحسابية ولاهندسية

2.نهاية المتتالية (u_n) هي: أ- $+\infty$ ، ب- $-\frac{1}{2}$ ، جـ- $-\infty$

3.نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+....+e^{n\ln 3}\right]$

أ- $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ ، ب- $S_n = \frac{1-3^n}{4}$ ، جـ- $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين08: دورة 2011الموضوع (2)

αعدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n)متتالية معرّفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1.أ-بيّن أن (v_n)متتالية هندسية أساسها α.

ب-أكتب بدلالة n و αعبارة v_n واستنتج بدلالة n و α عبارة u_n

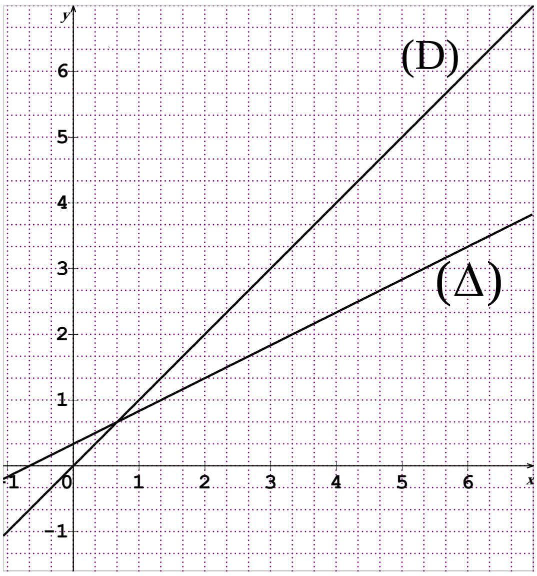
جـ-عيّن قيّم العدد الحقيقي αالتي تكون من أجلها (u_n)متقاربة

2.نضع: $\alpha = \frac{3}{2}$ - أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث:

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين09: دورة 2010الموضوع (2)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين



$(\Delta): y = x$ و $(D): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية

u_0، u_1، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين(Δ) و(D) .

جـ) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2)أ-باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \succ \frac{2}{3}$.

ب-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ-بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

ب-اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n واستنتج u_n بدلالة n

جـ-احسب المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

واستنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

التمرين10: دورة 2009 الموضوع (1)

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1)أحسب v_0 و v_1.

2)برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3 أ)احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ب)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$.

جـ) بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين11: دورة 2009 الموضوع (2)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1.u_2.u_3 = 216 \end{cases}$

1.أ)احسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ) أحسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n .

ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$.

2.(v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$. أ) أحسب v_2 و v_3.

ب)نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ بين أن ان (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

التمرين12: دورة 2008الموضوع (1)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $I=[1,2]$ بـ: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$.

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على I.

ب-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I، $f(x)$ ينتمي إلى I

2) (u_n)متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: u_n ينتمي إلى I.

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

3)أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

ب-عين النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين13: دورة 2008الموضوع (2)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$ و $u_0=\frac{5}{2}$

1-أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{2}{3}x+2$.

ب-باستعمال الرسم السابق ،مثل على محور الفواصل دون حساب الحدود u_0 ، u_1، u_2 ، u_3 و u_4

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)وتقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\le 6$.

ب-تحقق أن (u_n)متزايدة ، هل (u_n)متقاربة ؟ برر اجابتك.

3)نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-6$

-اثبت أن(v_n)هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

شعبة تقني رياضي

التمرين14:دورة 2014الموضوع (1)

n و p عددان طبيعيان.

1)أدرس،حسب قيم n،بواقي القسمة الإقليدية على 16للعدد 5^n

2)نضع: $C_n = 16n+9$ و $D_p = 5^p$.

أ) بين أن إذا كان $p = 4k+2$ حيث k عدد طبيعي فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $C_n = D_p$.

ب)عيّن n من أجل $p = 6$.

3) f هي دالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=5^{(4x+2)}-9$.

ادرس تغيرات الدالة f، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4)(u_n)المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد nمن $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5^4(u_n + \frac{9}{16}) - \frac{9}{16}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن u_n عدد طبيعي.

5)استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

التمرين15:دورة 2014الموضوع (2)

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

1- حدد حسب قيم x، إشارة $f(x) - x$.

2-أ-عيّن اتجاه تغير f.

ب-بيّن أنه إذا كان $x \in [2:e+1]$ فإن: $f(x) \in [2:e+1]$.

II) (u_n)المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = e+1$ و من أجل كل عدد nمن $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) برر تقارب المتتالية (u_n)، ثم أحسب نهايتها.

التمرين16:دورة 2013الموضوع (1)

(u_n)المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\frac{1}{2}\ln u_n+\frac{1}{2}$

1) بين أن ان (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب وحدّها الأول

2) اكتب كلا من v_n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

4) جد بدلالة n الجداء $P_n=u_0\times u_1\times..\times u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n$.

التمرين 17: دورة 2012 الموضوع (1)

z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة له

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n=z_D\times z_n$. حيث $z_D=-1+i\sqrt{3}$:

أ- اكتب كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري.

ب- (U_n) متتالية معرفة بـ: $U_n=|L_n|$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

-أثبت أن (U_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول.

- M_0، M_1،.........، M_n صور الأعداد المركبة و L_0 ، L_1،.......، L_n على الترتيب.

احسب بدلالة n المجموع $S_n=\|\overrightarrow{OM_0}\|+\|\overrightarrow{OM_1}\|+.....+\|\overrightarrow{OM_n}\|$. ثم جد نهاية S_n عندما يوؤل n إلى $+\infty$

.

التمرين 18: دورة 2011 الموضوع (1)

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1-أثبت أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=1+\frac{1}{n(n+2)}$ استنتج أن $u_n\succ 1$

2-أدرس اتجاه تغير (u_n)، بين أنها متقاربة،وأحسب نهايتها

3-ليكن الجداء $P_n=u_1\times u_2\times u_3\times...\times u_n$. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $P_n=\frac{2n+2}{n+2}$

4-(v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\ln(u_n)$

عبّر بدلالة P_n عن S_n حيث: $S_n=v_1+v_2+v_3+...+v_n$، ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$.

التمرين 19: دورة 2008 الموضوع (1)

I- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-2 ، +\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+5}{x+2}$ و (C_f) منحنى f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الاطوال 2cm.

أ) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ)بين أن المستقيم (D): $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f). ثم رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D).

د) بين أنه إذا كان : $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$

II-نعتبر المتتالية العددية (U_n)والمعرفة بـ: $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

أ) باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة: $y=x$ مثل U_0 ، U_1،U_2 (دون حسابها)على محور الفواصل

ب) خمن اتجاه وتقارب المتتالية (U_n).

جـ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq U_n\leq\frac{5}{2}$ وان المتتالية (U_n) متزايدة.

استنتج ان (U_n) متقاربة ، ثم احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين20:دورة 2008الموضوع (2)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال$[0;2]$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$ و (C_f)تتمثيلها البياني

1-أ- أدرس تغيرات الدالة f على المجال$[0;2]$.

ب-أنشئ (C)في معلم متعامد ومتجانس$(O;\vec{i};\vec{j})$الوحدة 4cm

جـ-برهن أنه إذا كان$x\in[0;2]$فإن$f(x)\in[0;2]$.

2-نعرف المتتالية العددية(u_n)على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=0\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

أ-برر وجود المتتالية (u_n).احسب u_1 و u_2.

ب-مثل الحدودu_0،u_1 و u_2على حامل محور الفواصل بالاستعانة بـ(C)والمستقيم$(D): y=x$

جـ-ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية(u_n) وتقاربها .

3-أ-برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0\leq u_n\leq\sqrt{3}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\succ u_n$.ماذ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية (u_n)؟.

جـ- تحقق أن $(u_{n+1}-\sqrt{3})\leq\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ من أجل كل$n\in\mathbb{N}^*$

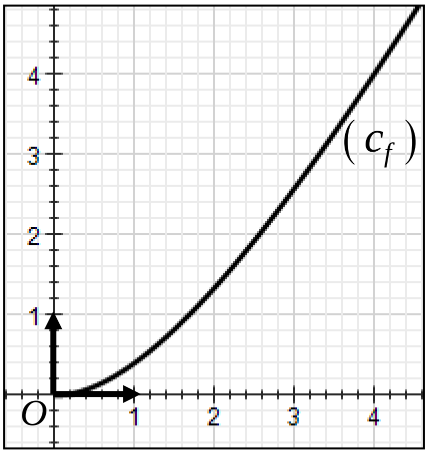
عين عددا حقيقيا kمن المجال $]0;1[$ بحيث: $\left|(u_{n+1}-\sqrt{3})\right|\leq k\left|(u_n-\sqrt{3})\right|$ ثم بين أنه من أجل$n\in\mathbb{N}^*$:

$\left|(u_{n+1}-\sqrt{3})\right|\leq k^n\left|(u_n-\sqrt{3})\right|$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

شعبة الرياضيات

التمرين21:دورة 2014الموضوع (1)

الدالة العددية f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس (انظر الشكل ادناه).



1) بين ان الدالة f متزايدة تماما.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

أ)باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل، على حامل محور الفواصل ، الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0\le u_n\le 3$.

ب)بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة. جـ)استنتج أن (u_n) متقاربة.

4) أ)ادرس إشارة العدد $7u_{n+1}-6u_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_{n+1}\le \dfrac{6}{7}u_n$.

ب) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0\le u_n\le 3\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.

جـ) احسب نهاية المتتالية (u_n)عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين22:دورة 2012الموضوع (2)

(u_n)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=6u_n-9$

1-أ) احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على 7 .

ب) خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث : $u_{2k}\equiv a[7]$ و $u_{2k+1}\equiv b[7]$.

2- أ) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $u_{n+2}\equiv u_n[7]$.

ب) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2[7]$ ، ثم استنتج أن: $u_{2k+1}\equiv 3[7]$

3-نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\dfrac{9}{5}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n)هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- احسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

التمرين23:دورة 2011الموضوع (1)

(u_n)متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق: $\begin{cases} u_4 = 15 \\ m+d = 42 \end{cases}$ حيث $\begin{cases} m = PPCM(u_3;u_5) \\ d = PGCD(u_3;u_5) \end{cases}$

1-عيّن الحدين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0.

2-اكتب u_n بدلالة n ، ثم بين أن:2010 حد من حدود(u_n)وعين رتبته.

3-عين الحد الذي إبتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080.

4-nعدد طبيعي غير معدوم. أ- احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2n}$

ب-استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 ... + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_4 ... + u_{2n-1}$

التمرين24:دورة 2009الموضوع (1)

1)نعرف الدالة f على المجال $[1,5]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$ و (C_f) هو التمثيل البياني لها الوحدة 3cm

أ)أدرس تغيرات الدالة f.   ب) إنشئ (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

2)(u_n)المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n})$ و $u_0 = 5$

أ)احسب u_1 و u_2.ب)استعمل (C) والمستقيم (Δ)لتمثيل الحدود u_0، u_1 و u_2على محور الفواصل.

3)أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq \sqrt{5}$.

ب-بيّن أن (u_n) تناقصية تماما، ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها

4)أ-برهن أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$ ب-أستنتج أن $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_n - \sqrt{5})$ ما هي $\lim_{n \to +\infty} u_n$

التمرين25:دورة 2009الموضوع (2)

(u_n)المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$بـ: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α وβ عددان حقيقيان

1-عين α وβبحيث تكون المتتالية(v_n) متتالية هندسية ، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول.

2-احسب كلا من v_n و u_nبدلالة n.

3-احسب المجموعين $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

4-أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n،بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 5.

ب-عين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها u_n مضاعف للعدد5.

التمرين26:دورة 2008الموضوع (1)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،

نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $\sqrt{3} - i$ و $\sqrt{3} + 3i$ على الترتيب .

1) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه O ويحوّل A إلى B ثم عيّن زاويته ونسبته .
2)نعرف متتالية النقط من المستوي المركب بـ : $A_0 = A$،ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $A_{n+1} = S(A_n)$
نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .
أ- أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2 .   ب- برهن أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$
جـ- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى (OA_1)
3)نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$من أجل كل عدد طبيعي n .
أ- بيّن أن (u_n)متتالية هندسية يطلب تعيين حدّها الأول u_0 وأساسها q .
ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .
جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$، ثم احسب $\lim_{x \to +\infty} S_n$.

التمرين27:دورة 2008الموضوع (1)

لتكن f الدالة المعرفة على $]1 ; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني .
1) أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا.
- أدرس تغيرات الدالة f.
- باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي"أنشئ (C_f)
-أرسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$
2)نعرّف (u_n)متتالية على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
أ)باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0، u_1 و u_2 على محور الفواصل
ب) ضع تخمينا حول أتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
3)أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 \le u_n \le 5$ و $u_{n+1} \succ u_n$
ب-استنتج أن (u_n) متقاربة . احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين28:دورة 2008الموضوع (1)

(u_n)المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ و $u_0 = 2$
1)أحسب u_1، u_2 و u_3.
2) (v_n)المتتالية المعرفة من أجل كل : $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- برهن بالتراجع أن (v_n) ثابتة،استنتج عبارة u_n بدلالة n. - أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
3) (w_n)متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ أحسب المجموع: $S = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

الجـــزء الثاني

بكالوريات النظام القديم

التمرين29:دورة 1980 ع.ط

x ،y ، z أعداد حقيقيّة موجبة تماما، تشكّل بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية.
برهن أنّ الأعداد: lnx ،lny ،lnz هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.
عيّن هذه الأعداد بحيث: $\ln(x\times y\times z)=21$ و $\ln x\times\ln y\times\ln z=-105$

التمرين30:دورة 1999 ع.ط

a ،b و c أعداد حقيقية غير معدومة .
1) بين أنه إذا كانت a ، b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$$

2)جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أنّ مجموعها هو78ومجموع مربعاتها هو3276

$\ln u_2-\ln u_4=4$

التمرين31:دورة 1997 ع.ط

1)(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$
*عين أساسها وحدها الأول u_0، ثم أكتب u_n بدلالة n
* نسمي S_n المجموع : $u_0+u_1+\dots+u_n$ أحسب S_n بدلالة n ثم نهاية S_n لما تؤول n إلى $+\infty$
2) (V_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $V_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$
* بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.
نسمي S'_n المجموع : $v_0+v_1+\dots+v_n$ *عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $S'^2_n=2^{30}$

التمرين32:دورة 2004 ت.ر

(U_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $U_0=2$ وجلكل $2U_{n+1}=2U_n-\quad n\quad n\in\mathbb{N}3$
1)برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}:\ U_n=2^{-n}-2n+1$
2)أ-أثبت أنه يوجد عدد طبيعي m، تكون من أجله المتتالية (V_n) والمعرفة بـ:
$V_n=U_n+mn-1$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
ب- احسب بدلالة n المجموع: $S_n=V_0+V_1+\dots+V_n$
3) لتكن في المستوي النقط A،B،C وK التي تحقق: $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}+\lambda\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$
عين λ حتى تكون K مرجحا للجملة : $\{(A;S_0),(B;S_1),(C;S_2)\}$

التمرين33:دورة 2007 ت.ر

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $U_0 = \frac{1}{4}$ ، $U_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $4U_{n+2} = 7U_{n+1} - 3U_n$

(V_n) المتتالية المعرفة بالعلاقة : : $n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) احسب U_2 و V_0.

2) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

4) عبّر عن U_n بدلالة S_n مستعينا بالعبارة $V_n = U_{n+1} - U_n$ ثم استنتج عبارة الحد العام U_n بدلالة n.
احسب نهاية U_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين34:دورة 2006 ع.دقيقة

(u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول u_0 وبعلاقة التراجع التالية $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$

1-عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2-نفرض أن : n . أ-احسب u_1 ، u_2.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 \le u_n \le 1$ ، ثم أدرس أتجاه تغير المتتالية (u_n).

3-لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$.

أ- أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب-عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) لما يؤول n إلى $+\infty$.

جـ-أحسب كلا من S_n و π_n حيث: $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ و $\pi_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$.

التمرين35:دورة 1995 ع.ط

أ) حلل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية

ب) عين الأعداد الحقيقية x ، y و z المتمايزة مثنى مثنى والتي تحقق:

x،y و z حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية

و z، x، y حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية هندسية

و x+y+z عدد طبيعي أولي قاسم للعدد 1995.

التمرين36:دورة 2004 ع.ط

1)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون العدد $\left(2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\right)$ قابلا للقسمة على 7

3) من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$ نضع : $u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$

ـ أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

ـ ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على7 ؟

التمرين37:دورة 1998 ع.ط

u_0، qعددان طبيعيان غير معدومين.

(u_n)متتالية هندسية حدّها الأوّل u_0 و أساسها q.

1 ـ عيّن q و u_0 علما أنّ q أوّلي مع u_0 و $3u_0^2 = u_3 - u_1$

2 ـ نفرض أنّ $u_0 = 8$ ،$q = 3$ونضع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ ، $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

أحسب S_n و P_n بدلالة n

3أ)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 3^n على13 .

ب)عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S_n مضاعفا 13

التمرين38:دورة 2005 ع.ط دقيقة

1) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

جد - α و βحيث : $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ و $\alpha \succ \beta$.

2) (u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل u_0 و أساسها q

حيث u_0 و qعددان طبيعيان أوليان فيما بينها $u_0 \succ q$.

أ-أوجد u_0 و q حتى يكون : $35u_0^2 + 19u_1 - u_3 = 0$.

ب-نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.أحسب بدلالة n المجموع S_n ،

جـ-أوجد العدد الطبيعي n حتى يقبل S_n القسمة على 10.

الجـــزء الثالث

بكالوريات أجنبية

التمرين39:دورة 2014 - تونس

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>-1$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- عبّر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين40:دورة 2014 - المغرب

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=13$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<14$.

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-14$.

أ- بيّن أن(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

جـ- حدّد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n>13.99$.

التمرين41:دورة 2014 Polynésie

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_n+2n+2$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_{n+1}-u_n$. أ- جد v_n بدلالة n. ماطبيعة المتتالية (v_n)؟

ب- نضع : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=(n+1)(n+2)$

جـ- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n=u_{n+1}-u_0$ ثم استنتج u_n بدلالة n .

التمرين42:دورة 2009 - تونس

(U_n)متتالية عددية معرفة بـ: $U_0=6$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $3U_{n+1}=U_n+6$

1)أ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $U_n\succ 3$

ب)بين أن المتتالية (U_n) متناقصة، ثم استنتج أنها متقاربة. جـ) عين نهاية المتتالية (U_n) .

2) (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n=\ln(U_n-3)$

أ) بين أ (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\ln 3$

ب)عبرعن V_n ثم U_n بدلالة n . ثم عين ثانية ، نهاية (U_n)

التمرين43:دورة 2012 - تونس

يمثل الجدول المقابل جدول تغيرات الدالة f المعرفة

على المجال $[1;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=2-x+\ln x$

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad\quad$ $-$
$f(x)$	1 $\searrow$ $+\infty$

1-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على المجال $[1;+\infty[$

حلا وحيدا α

- استنتج اشارة $f(x)$ على $[1;+\infty[$

2-(U_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي

$U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=2+\ln U_n$

أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\le U_n\le\alpha$

ب- أثبت أن المتتالية متناقصة على $\mathbb{N}$.

جـ-استنتج أن المتتالية (U_n)متقاربة وعين نهايتها.

التمرين44:دورة 2006 - فرنسا

f دالة معرفة على المجال $]1 ، +\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

I-1)أدرس تغيرات الدالة f

2) (U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $U_0=5$ و$U_{n+1}=f(U_n)$

أ)أرسم المنحنى(C_f)والمستقيم ذي المعادلة:$y=x$وإنشئ النقطتين M_1 و M_2 اللتين فاصلتاهما U_1 ، U_2

ب) أقترح تخمينا حول سلوك المتتالية(U_n).

جـ)برهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $U_n\ge e$. د) أثبت أن المتتالية (U_n) تتقارب نحوعدد حقيقي L.

II-نذكر أن الدالة f مستمرة على المجال $]1 ، +\infty[$.

1) بدراسة نهاية المتتالية $(f(U_n))$ أثبت أن: $f(L)=L$.

2) أستنتج قيمة L.

التمرين45:دورة 2010 - فرنسا

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$، $u_n \geq 0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$، $u_n \geq n - 3$. ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

3) نعرف المتتالية (v_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

ج) ليكن المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. عين عبارة S_n بدلالة n.

التمرين46: فرنسا2009(Pondichery)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N^*}$ المعرفة بـ: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x+1)$

أ) أدرس تغيرات الدالة f ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $\ln(x+1) \leq x$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\ln(u_n) \leq 1$

ج) المتتالية (u_n) هل يمكن أن تقبل $+\infty$ كنهاية ؟

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $v_n = \ln(u_n)$.

أ) نضع $x = \frac{1}{n}$، عبر عن v_n بدلالة x. ب) ما قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$؟ احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين47: فرنسا Metropole2010

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

1-أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$ والمنحنى (C)

الممثل للدالة f والمعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$.

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها على محور الفواصل .

ج)ماتخمينك اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2)برهن بالتراجع على أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \succ 1$

3) من أجل كل عدد طبيعي نضع: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ) برهن على أن (v_n) حسابية وأكتب v_n بدلالة n.

ب)اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{x \to +\infty} u_n$

التمرين48: فرنسا A-Guyane2012

لتكن المتتالية العدديّة (u_n) المعرّفة ب : $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$.

1-احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

2- أ-بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن u_n موجب تماما

ب-بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة .

ب- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة، ثم احسب نهايتها l .

3) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدو نضع: $v_n = \frac{u_n}{n}$.

ا- أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسيّة يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل v_1 .

ب- أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة f والمعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

أ-عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. ب – استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين49: Pondichéry 2010

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1$.

1) هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ: $v_n=4u_n-8n+24$.

أ -أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- بيّن أنه ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

جـ -احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

التمرين50: Polynésie 2010

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$.

أ- بيّن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين51: 2010تونس ع. تجريبية

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي : $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$u_{n+1}=\alpha u_n+(1-\alpha)v_n$ وَ $v_{n+1}=(1-\alpha)u_n+\alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

1) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=v_n-u_n$. أ- احسب w_0 و w_1 .

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=(2\alpha-1)^n$. جـ- استنتج نهاية المتتالية (w_n) .

2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\le v_n$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة .

جـ- استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l .

د- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n+v_n=3$ وستنتج قيمة النهاية l .

التمرين52: N Calédonie2011

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

1) حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة : $f(x)=x$.

2)ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال$[0;1]$.استنتج أنه إذا كان $x\in[0;1]$فإن $f(x)\in[0;1]$

II- لتكن (u_n)المتتالية المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 1$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .