الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية دورة : ماي 2015

ثانويات :البياضة الجديدة– دوار الماء – العقلة – النخلة –حساني عبد الكريم الشعبة : علوم تجريبية

محمد العيد آل خليفة–حنكة على – داسي خليفة –لبامة – متقن كركوبية امتحان بكالوريا التعليم الثانوي تجريبي

اختبار في مادة : الرياضيات المدة : 3سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الاول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1– احسب u_2 ، u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ، ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2– أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أنّ : $u_n\leq n+3$.

ب) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أنّ : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$.

ج) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3– (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=u_n-n$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

ب) بيّن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ أنّ : $u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4– من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ نضع: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$ و $S'_n=u_1+u_2+...+u_n$

– احسب بدلالة n كلا من المجموعين: S_n و S'_n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{S'_n}{n^2}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في الفضاء المزوّد بمعلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقطتين $A(3;-1;2)$ و $B(1;1;-2)$

و المستوي (P) معادلته: $x-2y+3z+8=0$ و G نقطة معرّفة بـ : $3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1– اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)، ثم عيّن احداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) و المستوي (P).

2– أ) عيّن طبيعة و عناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

ب) احسب المسافة بين النقطة G و المستوي (P)، ثم استنتج الوضعية النسبية للمجموعة (E) و المستوي (P)

3– أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة G و العمودي على المستوي (P).

ب) عيّن احداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ج) استنتج المسافة بين النقطة L و المستقيم (Δ).

4– أ) بيّن أنّ: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=3+\alpha-\beta\\ y=-1-\alpha+3\beta\\ z=2+2\alpha-4\beta\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (AGH)، ثم بيّن أنّ : $x-y-z-2=0$ معادلة ديكارتية له.

ب) أثبت أنّ المستويين (P) و (AGH) متقاطعان وفق مستقيم يُطلب اعطاء تمثيل وسيطي له

التمرين الثالث : (05 نقطة)

I) P كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $P(z)=z^3-5z^2+8z-6$.

– عين a و b حيث : $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$ ، ثم حِلْ في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

II) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C و D لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2(1-i)$ و $z_D=3$.

1– أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) مركزها D ، يُطلب تعيين نصف قطرها.

ب) احسب $\arg\left(\dfrac{z_C-z_D}{z_A-z_D}\right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ج) عيّن z_E لاحقة النقطة E حتى يكون الرباعي $AECD$ متوازي أضلاع ، ثم استنتج نوعه.

2– T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z'-1+i=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1+i)$

أ) حدد طبيعة التحويل T معينا عناصره المميزة.

ب) عيّن لاحقة النقطة F صورة النقطة O بالتحويل T ، ثم بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (CF) متعامدان.

3– أ) عيّن (Γ)مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z حيث : $z=z_A.\overline{z_A}\,e^{i\theta}$ ، لما θ يتغير في $\mathbb{R}$.

ب) استنتج صورة (Γ) بالتحويل T.

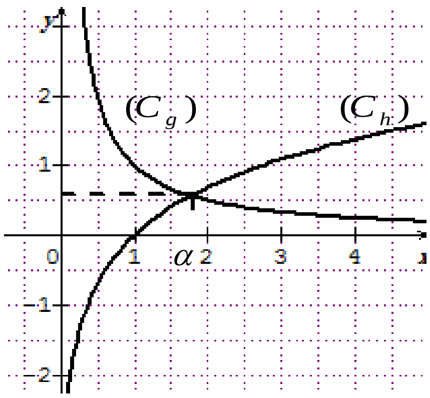
التمرين الرابع : (07 نقطة)

1– – لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x-x\ln x+x$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة الأولى هندسيا.

ب) اثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

2– (C_g) و (C_h) هما المنحنيان البيانيان للدالتين g و h على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ والمعرّفتان على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{x}$ و $h(x)=\ln x$. (C_g) و (C_h) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة α (انظر الشكل أدناه).



أ) بقراءة بيانية، عيّن وضعية (C_g) بالنسبة لـ (C_h) ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .ثم شكل جدول تغيراتها

ج) أثبت أنّ: $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}-1$.

3– أ) أدرس وضعية (C_f) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة للمنحنى (C_h).

ب) أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 و x_2 على الترتيب حيث $0,4<x_1<0,5$ و $3,8<x_2<3,9$.

ج) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها $x_0=\dfrac{3}{4}$ حيث $y=\left(\dfrac{4}{3}-\ln\dfrac{3}{4}\right)x+\ln\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}$ معادلة له.

د) نضع $\alpha\approx 1,8$. أرسم (T) و (C_f).

4–بين أن $x\mapsto\left(-x+\dfrac{3}{4}x^2\right)+\left(x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\ln x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

– احسب $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04.5 نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A\left(2;1;1\right)$ ، $B\left(-2;1;-1\right)$ و $C\left(0;2;1\right)$

و (Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t-1 \quad\quad t\in\mathbb{R} \\ z=-t+4 \end{cases}$ ، اختر الإجابة الوحيدة الصحيحة من بين الإجابات مع التعليل.

1- المستقيم (T) الذي يشمل النقطتين A ، B و المستقيم (Δ) هما :

أ) متوازيان ب) ليسا من نفس المستوي ج) متقاطعان

2- المستقيم (T) يقطع المستوي (xoy) في النقطة :

أ) $D\left(0;0;-3\right)$ ب) $D\left(0;0;3\right)$ ج) $D\left(-6;3;0\right)$

3- المسقط العمودي H للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC على المستقيم (Δ) إحداثياتها هي :

أ) $H\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ ب) $H\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$ ج) $H\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$

4- (E) مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=-3$ هي :

أ) سطح كرة مركزها $\omega(0;1;0)$ ب) مستو شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$ ج) مجموعة خالية

5- (γ) مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث : $-2MA^2+MB^2+MC^2=25$ هي :

أ) سطح كرة نصف قطرها AB ب) مستو يشمل النقطة A ج) مجموعة خالية

التمرين الثاني : (05 نقط)

I) 1 - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

2 - استنتج حلول المعادلة : $(\overline{z}+2+2i\sqrt{3})^2-2\overline{z}-4i\sqrt{3}=0$ حيث : $\overline{z}$ مرافق العدد z.

II) في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=-1+i\sqrt{3}$ و $z_D=-2$

1- أ) جد زاوية و نسبة التشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى C ، ثم عين عبارته المركبة.

ب) عين إحداثيات النقطة D' صورة D بالتشابه S ، ثم استنتج أن المثلثين BCD و BAD' متشابهين.

2- T تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=\left(-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)z+2$

أ) اكتب العدد $-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}$ على الشكل المثلثي ، ثم على الشكل الأسي.

ب) حدد طبيعة التحويل T و عناصره المميزة ، ثم عين العبارة المركبة للتحويل $T\circ S$.

3- (φ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $2(\overline{z}+z)+\overline{z}.z=0$

أ) بين أن (φ) دائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

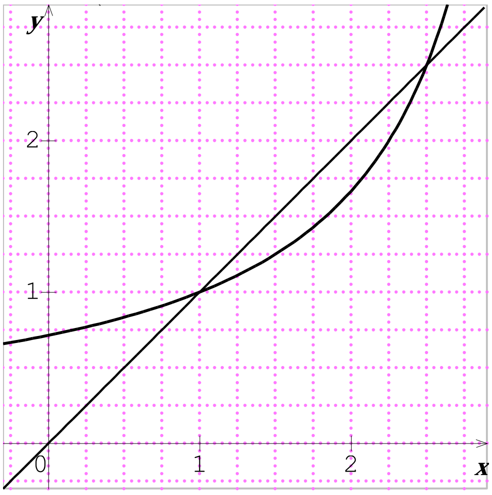
ب) عين صورة الدائرة بالتحويل $T\circ S$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

في الشكل المقابل (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{-5}{2x-7}$ و المنصف الأول.

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0=2$ و من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{-5}{2u_n-7}$

1- انقل الشكل المقابل ، ثم مثل على محور الفواصل u_0 ، u_1 و u_2 ، خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.



2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $1\le u_n\le 2$.

3- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

4- أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_{n+1}-1\le\frac{4}{5}(u_n-1)$.

ب) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_n-1\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

جـ) باستعمال السؤالين 2 و 4 -ب) ، احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

5- (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n=\frac{2u_n-2}{2u_n-5}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ، عين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

التمرين الرابع : (06.5 نقطة)

I - g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=xe^{-x}$ (يرمز "e" إلى أساس اللوغاريتم النيبري)

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $g(x)=-\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.4<\alpha<-0.3$ ، ثم تحقق أن : $e^{\alpha}=-2\alpha$

II - f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x(x+e^x)}{e^{2x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

2- أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي x أن : $f(x)=g(x)+[g(x)]^2$

ب) أثبت من أجل كل عدد حقيقي x أن : $f'(x)=g'(x)[1+2g(x)]$.

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن : $f(\alpha)=-\frac{1}{4}$.

4- اكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة فاصلتها 0 .

5- الهدف من هذا السؤال تحديد الوضع النسبي لـ : (C_f) و (Δ).

أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي x أن : $f(x)-x=xe^{-x}(1+xe^{-x}-e^x)$

ب) أثبت من أجل كل عدد حقيقي x أن : $1+xe^{-x}\le 1+x$

جـ) نقبل أن : $1+x\le e^x$ ، استنتج إشارة : $1+xe^{-x}-e^x$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) و (Δ).

6- ارسم كلا من (C_f) و (Δ).