تصحيح الدالة اللوغاريتمية 5 نجوم

الإجابة	التنقيط
الجزء الأول : • لدينا : $g(x)=1-x^2-2\ln\lvert x\rvert$ $\qquad D_g=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	
1- دراسة تغيرات الدالة g : **أ) حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف :** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^2-2\ln\lvert x\rvert\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^2-2\ln(-x)\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^2\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2\ln(-x)\right)=-\infty\end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-x^2-2\ln\lvert x\rvert\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-x^2-2\ln(-x)\right)=+\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-x^2\right)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}\left(-2\ln(-x)\right)=+\infty\end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-x^2-2\ln\lvert x\rvert\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-x^2-2\ln(x)\right)=+\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-x^2\right)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(-2\ln(x)\right)=+\infty\end{cases}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x^2-2\ln\lvert x\rvert\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x^2-2\ln(x)\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x^2\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\ln(x)\right)=-\infty\end{cases}$	4×0.25
ب) حساب المشتقة : $g'(x)=-2x-2\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{-2x^2-2}{x}$ $\qquad$ لأنّ $\left(\ln\lvert x\rvert\right)'=\dfrac{1}{x}$	0.25
• **دراسة إشارة المشتقة :** $g'(x)=0$ يعني $-2x^2-2=0$ $\qquad$ اي $x^2+1=0$ (ليس لها حل) **جدول إشارة** $g'(x)$ **:** x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$ $-2x^2-2$: $-$ ‖ $-$ x: $-$ ‖ $+$ $g'(x)$: $+$ ‖ $-$ • **الدالة** g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$	0.5

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$			+		‖		−		
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘	$-\infty$

0.5

-2 حساب $g(-1)$ و $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$:

$$g(-1)=1-(-1)^2-2\ln|-1|=1-1-2\ln 1=0$$

$$g(1)=1-(1)^2-2\ln|1|=1-1-2\ln 1=0$$

- جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	

0.5

الجزء الثاني :

لدينا : $f(x)=2-x+\dfrac{1+2\ln|x|}{x}$ و $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

- لدينا : $f'(x)=-1+\dfrac{2\times\frac{1}{x}\times x-1\times(1+2\ln|x|)}{x^2}=\dfrac{-x^2+2-1-2\ln|x|}{x^2}$

أي $f'(x)=\dfrac{1-x^2-2\ln|x|}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

0.5

2) حساب نهايات الدالة f عند حدود D_f:

- لدينا :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x+\dfrac{1+\ln|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(-x)}{x}\right)$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(-x)}{-x}\right)=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln(-x)}{-x}\right)=0\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2-x+\dfrac{1+2\ln|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2-x+\dfrac{1+2\ln(-x)}{x}\right)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1+2\ln(-x)}{x}\right)=+\infty$

2×0.25

2×0.25

• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2-x+\dfrac{1+2\ln|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2-x+\dfrac{1+2\ln(x)}{x}\right)=-\infty$

لأنَ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1+2\ln(x)}{x}\right)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x+\dfrac{1+\ln|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=-\infty$

لأنَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=0\end{cases}$

0.25

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

0.5

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2×0.25

4) أ) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

• لدينا :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x+\dfrac{1+\ln|x|}{x}-2+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(-x)}{-x}\right)$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=0$ ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

• ولدينا :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x+\dfrac{1+\ln|x|}{x}-2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

اي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=0$ ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

0.75	ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ):
0.5	5) البرهان على أنَ النقطة $\omega(0;2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f):
0.25	6) تبيان أنَ المنحني (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ): (0.75)

- ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=2-x+\dfrac{1+\ln|x|}{x}-(2-x)=\dfrac{1+\ln|x|}{x}$

$f(x)-y=0$ يعني $\dfrac{1+\ln|x|}{x}=0$

ومنه $1+\ln|x|=0$ و $x\neq 0$

أي $\ln|x|=-1$ و $x\neq 0$

وبالتالي $|x|=e^{-1}$ و $x\neq 0$

إذن : $x=-e^{-1}$ أو $x=e^{-1}$

- **جدول إشارة الفرق والوضع النسبي :**

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		0		e^{-1}		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+\ln\|x\|$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

5) البرهان على أنَ النقطة $\omega(0;2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f): (0.5)

- اي نبرهن أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ فإنَ $(-x)\in\mathbb{R}^*$ و $f(-x)+f(x)=4$

لدينا : من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ فإنَ $(-x)\in\mathbb{R}^*$ و

$$f(-x)+f(x)=2-(-x)+\frac{1+\ln|-x|}{-x}+2-x+\frac{1+\ln|x|}{x}=4+x-x-\frac{1+\ln|x|}{x}+\frac{1+\ln|x|}{x}$$

ومنه $f(-x)+f(x)=4$ وبالتالي $\omega(0;2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)

6) تبيان أنَ المنحني (C_f) يقبل نقطتي انعطاف : (0.25)

- لدينا :

$$f''(x)=\frac{g'(x)\times x^2-2x\times g(x)}{x^4}=\frac{\dfrac{-2x^2-2}{x}\times x^2-2x\left(1-x^2-2\ln|x|\right)}{x^4}$$

أي $f''(x)=\dfrac{-2x^3-2x-2x+2x^3+4x\ln|x|}{x^4}=\dfrac{-4x+4x\ln|x|}{x^4}$

ومنه $f''(x)==\dfrac{x\left(-4+4\ln|x|\right)}{x^4}$

0.5

- **دراسة إشارة $f''(x)$:**

$f''(x)=0$ يعني $\dfrac{x(-4+4\ln|x|)}{x^4}=0$

ومنه $\begin{cases}-4+4\ln|x|=0\\ x=0\\ x\neq 0\end{cases}$ أي $\begin{cases}4\ln|x|=4\\ x=0\\ x\neq 0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\ln|x|=1\\ x=0\\ x\neq 0\end{cases}$

إذن $\begin{cases}|x|=e\\ x=0\\ x\neq 0\end{cases}$ إما $x=-e$ أو $x=e$

- **جدول إشارة $f''(x)$:** إشارة $f''(x)$ من نفس إشارة البسط

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-4+4\ln\|x\|$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

f'' تنعدم من أجل $x=-e$ أو من أجل $x=e$ مغيرة إشارتها و بالتالي النقطتين

$G\left(-e;2+e-\dfrac{3}{e}\right)$ و $F\left(e;2-e+\dfrac{3}{e}\right)$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f)

0.75

7) اثبات أنَ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يمر من النقطة $\omega(0;1)$:

- لدينا : معادلة المماس (T) من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

(T) يمر من النقطة $\omega(0;2)$ يعني $2=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

أي $2=\dfrac{1-x_0^{2}-2\ln|x_0|}{x_0^2}\times(-x_0)+2-x_0+\dfrac{1+2\ln|x_0|}{x_0}$

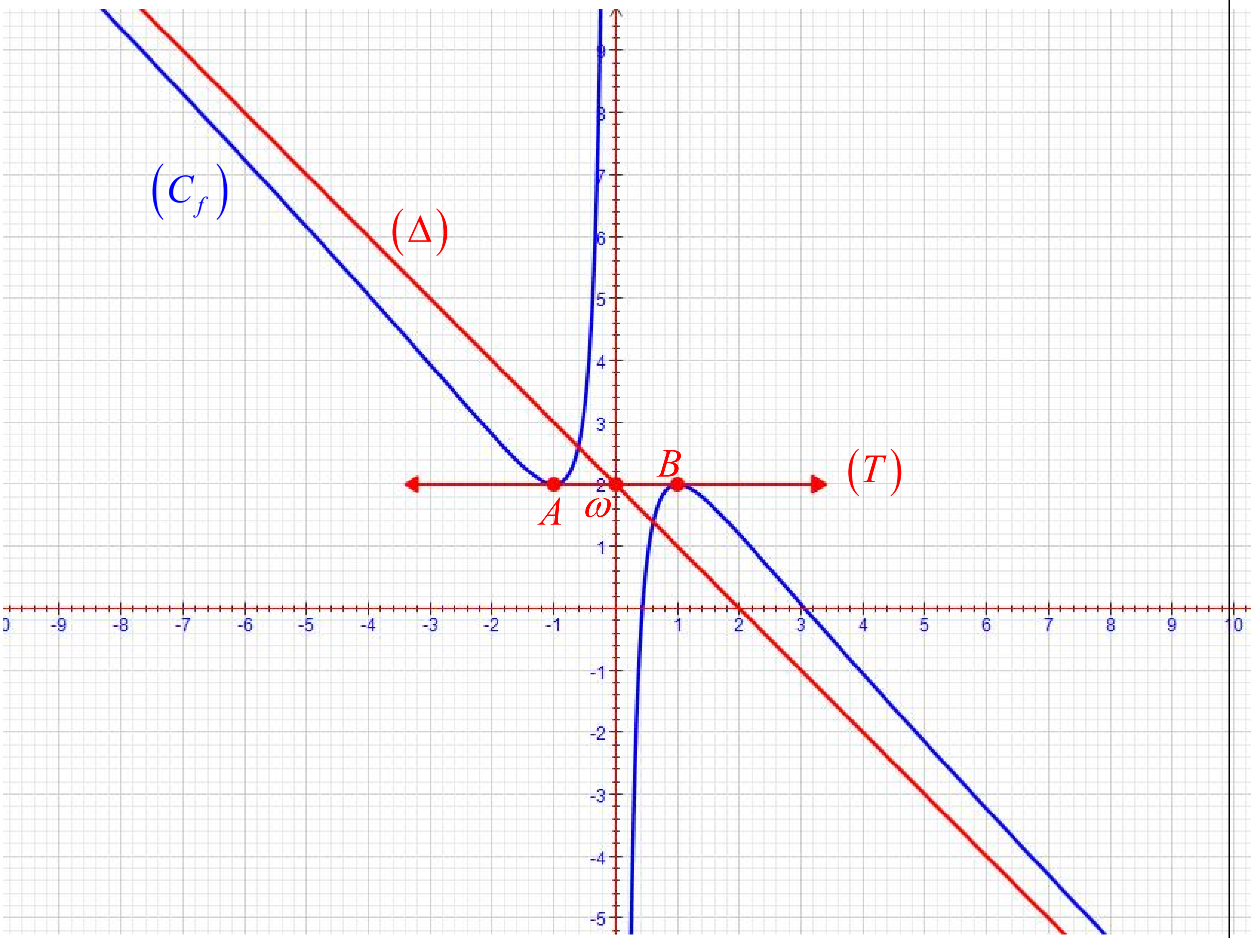
ومنه $2=\dfrac{-1+x_0^{2}+2\ln|x_0|}{x_0}+2-x_0+\dfrac{1+2\ln|x_0|}{x_0}$

وبالتالي : $-\dfrac{1}{x_0}+x_0+\dfrac{2\ln|x_0|}{x_0}+2-x_0+\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\ln|x_0|}{x_0}-2=0$

أي $\dfrac{4\ln|x_0|}{x_0}=0$ ومنه $\begin{cases}\ln|x_0|=0\\ x_0\neq 0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}|x_0|=1\\ x_0\neq 0\end{cases}$

إما $x_0=-1$ أو $x_0=1$

- **إذن (C_f) يقبل مماسا (T) يمر من النقطة $\omega(0;2)$ يمس المنحني (C_f) في النقطتين $A(-1;2)$ و $B(1;2)$**

	• **كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T):** $y = f'(-1)(x+1)+f(-1) = 0\times(x+1)+2 = 2$ أي $y=2$
0.25	**8) حساب $f(4)$:** $f(4) = 2-4+\dfrac{1+\ln\lvert 4\rvert}{4} = -1.4$
01	• **الرسم :** 
0.25	9) لدينا : $(\Delta_m): y = mx+2$ **أ) تبيان أنّ جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة :** • ليكن $(\Delta_{m_1}): y = m_1x+2$ و $(\Delta_{m_2}): y = m_2x+2$ مستقيمان حيث ، $m_1 \neq m_2$ المستقيمان يشتركان في نفس النقطة يعني $m_1x+2 = m_2x+2$ أي $m_1x - m_2x = 0$ ومنه $(m_1-m_2)x = 0$ إذن $x=0$ لأنّ $m_1 \neq m_2$ • من أجل $x=0$ نجد : $y=2$ **جميع المستقيمات (Δ_m) تمر بالنقطة $\omega(0;2)$**
0.75	**ب) مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x) = mx+2$:** حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات (Δ_m) التي تدور حول النقطة $\omega(0;2)$ • إذا كان $m \in \left]-\infty;-1\right]$ فإنَ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب تماما و الآخر سالب تماما.

• إذا كان $m \in]-1;0[$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول . حلين سالبين تماما و حلين موجبين تماما. • إذا كان $m = 0$ فإنَ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب تماما (حل مضاعف) و الآخر موجب تماما (حل مضاعف) • إذا كان $m \in]0;+\infty[$ فإنَ المعادلة ليس لها حل .	

☜ **انتهى تصحيح التمرين ✌ بالتوفيق والنجاح في البكالوريا 2015 ☺**