الموضوع الأول

التمرين الأول : $Z^2-2Z+5=0$

1) $\Delta=-16$ حلا المعادلة هما: **1**

$\boxed{Z_1=\frac{2+i\sqrt{16}}{2}=1+2i}$ و $\boxed{Z_2=1-2i}$

أ/ $Z_I=1-2i$ ، $Z_B=-3$ ، $Z_A=2+\overline{Z_I}$

$Z_A=3+2i$

$$Z=\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}=\frac{1-2i-3-2i}{1-2i+3}=\frac{-2-4i}{4-2i}$$

$$Z=\frac{-1-2i}{2-i}=\frac{(-1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-2-i-4i+2}{4+1}$$

0.5 $Z=\frac{-5i}{5}$ ومنه : $\boxed{Z=-i}$

ب) **0.5** $\boxed{Z=e^{-\frac{\pi}{2}i}}$

$\left|\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right)=\frac{-\pi}{2}$

0.5 $AI=BI$ و $(\vec{IB};\vec{IA})=\frac{-\pi}{2}$

$\boxed{AIB \text{ قائم في } I \text{ ومتساوي الساقين}}$

ج) لدينا $h(A;2)$ تحاكي و $h(I)=C$

الكتابة المركبة للتحاكي: $Z'-Z_A=2(Z-Z_A)$

$h(I)=C$ ومنه : $Z_C-Z_A=2(Z_I-Z_A)$

$Z_C=2Z_I-Z_A$

$Z_C=2-4i-3-2i=-1-6i$

0.5 $\boxed{Z_C=-1-6i}$

3) G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ **0.5**

أ) $\boxed{Z_G=\frac{Z_A-Z_B+Z_C}{1-1+1}=3+2i+3-1-6i=5-4i}$

ب) $2\|\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|==\|\vec{MA}+\vec{MB}\|$

لتكن H منتصف $[AB]$

$2\|(1-1+1)\vec{MG}\|=\|(1+1)\vec{MH}\|$

0.75 $2MG=2MH$ ومنه : $\boxed{MG=MH}$

$\boxed{\text{مجموعة النقط } (\Gamma_1) \text{ محور القطعة } [GH]}$

ج) $\|\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|=4\sqrt{5}$

$\|(1-1+1)\vec{MG}\|=4\sqrt{5}$ ومنه $\boxed{MG=4\sqrt{5}}$ **0.75**

$\boxed{\text{مجموعة النقط } (\Gamma_2) \text{: دائرة مركزها } G \text{ ونصف قطرها } r=4\sqrt{5}}$

التمرين الثاني : $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1$, $U_1=\sqrt{e}$

1) حساب u_4,u_3,u_2 : **0.75**

$$U_2=\frac{2}{3}U_1+\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}\sqrt{e}+\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{e}+4}{3}\approx 2,43$$

$$U_3=\frac{2}{3}U_2+\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{e}+4}{3}\right)+\frac{5}{3}=\frac{4\sqrt{e}+23}{9}\approx 3,28$$

$$U_4=\frac{2}{3}U_3+\frac{3}{3}+1=\frac{2}{3}\left(\frac{4\sqrt{e}+23}{9}\right)+2=\frac{8\sqrt{e}+100}{9}\approx 12,58$$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n\geq 1$: $U_n\leq n+3$

* من أجل $n=1$: $U_1=\sqrt{e}\approx 1,6$ ومنه $U_1\leq 1+3$ (محققة)
* فرض أن $U_n\leq n+3$ صحيحة و نبين أن: $U_{n+1}\leq n+4$

لدينا : $U_n\leq n+3$ ومنه: $\frac{2}{3}U_n\leq\frac{2}{3}(n+3)$

1 إذن: $\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1\leq\frac{2}{3}(n+3)+\frac{1}{3}n+1$

وبالتالي: $U_{n+1}\leq n+3$ ومنه $U_{n+1}\leq n+3\leq n+4$

ومنه : $U_{n+1}\leq n+4$ إذن $p(n+1)$ صحيحة

* الإستنتاج : من أجل كل $n\geq 1$: $U_n\leq n+3$

ب) $U_{n+1}-U_n=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{3}n+1-\frac{1}{3}U_n=\frac{1}{3}(n+3-U_n)$

0.25 لدينا : $U_n\leq n+3$ ومنه: $n+3-U_n\geq 0$

أي: $\frac{1}{3}(n+3-U_n)\geq 0$ ومنه: $U_{n+1}-U_n\geq 0$

ومنه: (U_n) متزايدة

3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n=U_n-n$

لدينا : $V_{n+1}=U_{n+1}-(n+1)$

1 $V_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}U_n-\frac{2}{3}n$

أي : $V_{n+1}=\frac{2}{3}(U_n-n)$ ، $\boxed{V_{n+1}=\frac{2}{3}V_n}$

(V_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_1=U_1-1=\sqrt{e}-1$

ب) عبارة V_n : $V_n=V_1\times q^{n-1}$ **0.25**

$\boxed{V_n=(\sqrt{e}-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

ب) عبارة U_n : $V_n=U_n-n$ **0.25**

ومنه $U_n=V_n+n$ إذن : $\boxed{U_n=(\sqrt{e}-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+n}$

تابع التمرين الثاني:

4) **حسب:** $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$

لدينا : $V_n = V_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[\underbrace{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}} \right]$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[\underbrace{1 + \left(\frac{4}{9}\right) + ... + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}} \right]$$

0.5

أي $S_n = \frac{2}{3} V_1 \left[1 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \right]$ $\boxed{S_n = \frac{6}{5}(\sqrt{e} - 1)\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}$

حسب: $S'_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

لدينا: $U_n = V_n + n$ **ومنه:**

$$S'_n = (V_1 + 1) + (V_2 + 2) + ... + (V_n + n)$$

$$S'_n = (V_1 + V_2 + ... + V_n) + (1 + 2 + ... + n)$$

$$S'_n = V_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{n}{2}(1 + n)$$

$$S'_n = (\sqrt{e} - 1) \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n}{2}(1 + n)$$

0.5

$$\boxed{S'_n = 3(\sqrt{e} - 1) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}}$$

0.25

$$T_n = \frac{S'_n}{n^2} = \frac{3}{n^2}(\sqrt{e} - 1) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$$

0.25 $\boxed{\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1}{2}}$

التمرين الثالث : $A(3,2,1)$ $B(3,5,4)$ $C(0,5,1)$

1) **إثبات أن** ABC **متقايس الأضلاع:**

$\vec{AB}(0,3,3)$ ، $\vec{AC}(-3,3,0)$ ، $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

0.5

إذن ABC متقايس الأضلاع $\boxed{AB = AC = BC}$

2) **التحقق أن** $\vec{n}(1;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC) **:**

$\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = 0 + 3 - 3 = 0 \\ \vec{n}.\vec{AC} = -3 + 3 + 0 = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$ **أي:** $\vec{n} \perp (ABC)$

0.25

ومنه $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

معادلة (ABC) : $x + y - z + d = 0$

$A(3,2,1) \in (ABC)$ **أي:** $3 + 2 - 1 + d = 0$ **أي:** $d = -4$ ومنه :

0.5

$$\boxed{(ABC) : x + y - z - 4 = 0}$$

3) أ) **تعيين إحداثيات** G **مركز ثقل المثلث** ABC **:**

0.25

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

أي: $G\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{2+5+5}{3}, \frac{1+4+1}{3}\right)$ **ومنه:** $\boxed{G(2,4,2)}$

ب) **التمثيل الوسيطي للمستقيم** (Δ)

لدينا $G(2,4,2) \in (\Delta)$ و $(\Delta) \perp (ABC)$

يمكن اعتبار $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

0.5

$$\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - t \end{cases}}$$

ج) **التحقق أن** $F(4,6,0)$ **تنتمي إلى** (Δ) **:**

0.25

$(\Delta) : \begin{cases} 4 = 2 + t \\ 6 = 4 + t \\ 0 = 2 - t \end{cases}$ **ومنه:** $(\Delta) : \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$ t **قيمة وحيدة ومنه** $F \in (\Delta)$

حساب حجم $FABC$ **:**

لدينا (Δ) يشمل F **وعمودي على** (ABC) ويمر من G

مركز ثقل ABC ومنه G **المسقط العمودي لـ** F **على** (ABC)

إذن FG ارتفاع الهرم $FABC$ الذي قاعدته ABC

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \mathrm{A} \times FG}$$

حساب A مساحة ABC : ليكن h ارتفاع المثلث ABC

$\left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 + h^2 = (\sqrt{18})^2$ **ومنه :** $h = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$FG = \sqrt{(2-4)^2 + (4-6)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{3}$$

0.75

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 9}$$

4) **إثبات أن** $(FA) \perp (BC)$

0.25

$\vec{FA}(-1,-4,1)$ **و** $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$\vec{FA}.\vec{BC} = 3 + 0 - 3 = 0$ **ومنه** $\vec{FA} \perp \vec{BC}$ **إذن** $(FA) \perp (BC)$

5) أ) تعيين (S) مجموعة النقط M : $\left\|\vec{MG}+\vec{MF}\right\| = 6$

لتكن I منتصف $[FG]$ ومنه $\left\|(1+1)\vec{MI}\right\| = 6$ أي $MI = 3$

0.5

$\boxed{(S) \text{ سطح كرة مركزها } I \text{ و نصف قطرها } 3}$

ب) الوضع النسبي بين (S) و (ABC) :

نحسب إحداثيات I : $I(\frac{4+2}{2},\frac{6+4}{2},\frac{0+2}{2})$ ومنه $\boxed{I(3,5,1)}$

نحسب المسافة بين I و (ABC)

لدينا: $d(I,(ABC)) = \frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

0.25

إذن : $d(I,(ABC)) \prec r$ يقطع (ABC) (S) وفق دائرة

التمرين الرابع:

I) $g(x) = \frac{-x+1}{-x+3}+\ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

0.5

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 3}} g(x) = -\infty$

2) اتجاه التغير: $g'(x) = \frac{-2}{(-x+3)^2} - \frac{1}{(-x+3)}$

$\boxed{g'(x) = \frac{x-5}{(-x+3)^2}}$

0.5

x	$-\infty$	3
$x-5$	—	

جدول تغيرات g

x	$-\infty$	3
$g'(x)$	—	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

0.5

3) لدينا f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال [1,5 ; 1,7] وأيضا $f(1,5) \times f(1,7) < 0$

لأن: $f(1,7) \approx -0,27$ و $f(1,5) \approx 0,07$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $1,5 < \alpha < 1,7$

3) إشارة g :

x	$-\infty$	α	3
g	+	0	-

0.25

II) $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

0.5

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 3}} f(x) = -\infty$

2) اتجاه التغير: $f'(x) = 1\times\ln(-x+3)+(x-1)\times\frac{-1}{-x+3}$

0.5

$\boxed{f'(x) = g(x)}$

إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	α	3
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

0.5

إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$ لدينا $f(\alpha) = (\alpha-1)\ln(-\alpha+3)$

0.5

ولدينا: $g(\alpha) = 0$ ومنه: $\frac{-\alpha+1}{-\alpha+3}+\ln(-\alpha+3) = 0$

ومنه: $\ln(-\alpha+3) = \frac{\alpha-1}{-\alpha+3}$ إذن : $f(\alpha) = (\alpha-1)\times\frac{(\alpha-1)}{-\alpha+3}$

0.5

$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$

حصر : $f(\alpha)$

$1,5 \prec \alpha \prec 1,7$ إذن $0,5 \prec \alpha-1 \prec 0,7$ ومنه $\boxed{0,25 \prec (\alpha-1)^2 \prec 0,49}$

$-1,7 \prec -\alpha \prec -1,5$ إذن $1,3 \prec 3-\alpha \prec 1,5$ ومنه $\boxed{\frac{1}{1,5} \prec \frac{1}{3-\alpha} \prec \frac{1}{1,3}}$

ومنه : $\frac{0,25}{1,5} \prec \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha} \prec \frac{0,49}{1,3}$ ومنه $\boxed{0.2 \prec f(\alpha) \prec 0.4}$

0.25

حل المعادلة $f(x) = 0$ لدينا: $(x-1)\ln(-x+3) = 0$

($x-1 = 0$ أو $\ln(-x+3) = 0$) ومنه ($x = 1$ أو $-x+3 = e^0$)

$\boxed{x = 1 \quad \text{أو} \quad x = 2}$

إشارة : f

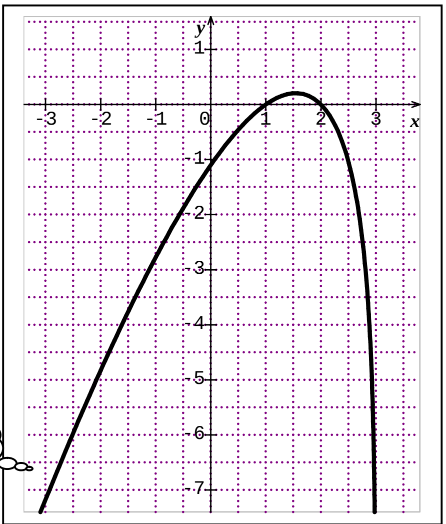
x	$-\infty$	1	2	3
$x-1$	-	0 +	+	+
$\ln(-x+3)$	+	+	+ 0	-
f	-	0 +	+ 0	-

4)

0.25

$f(-2) = -3\ln 5 \approx -4,9$ و $f(-3) = -4\ln 6 \approx -7,2$

رسم : (C_f)



0.75

5) إثبات أن F دالة أصلية للدالة f

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})\ln(-x+3)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})\times\frac{-1}{-x+3}$$

0.5

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x^2-2x-3)}{x-3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = (x-1)\ln(-x+3) = f(x)$$

التمرين الأول :

$A(3,4,0)$ $B(0,5,0)$ $C(0,0,5)$ $D(-2,-6,5)$
$E(-4;0;-3)$

1) التحقق أن النقط C,B,A **تعين مستو:**

$\vec{AB}(-3,1,0)$ و $\vec{AC}(-3,-4,5)$

لدينا $\left(\frac{-4}{1} \neq \frac{-3}{-3}\right)$ ومنه $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا

C,B,A ليست على استقامية فهي تشكل المستوي (ABC) 0.5

2) التحقق أن $\vec{n}(1;3;3)$ **ناظمي للمستوي** (ABC) **:** 0.25

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = -3+3+0=0 \\ \vec{n}.\vec{AC} = -3-12+15=0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \text{ أي: } \vec{n} \perp (ABC)$$

ومنه $\vec{n}(1;3;3)$ ناظمي للمستوي (ABC)

معادلة (ABC) : $x+3y+3z+d=0$

أي: $A(3,4,0) \in (ABC)$ أي: $3+12+d=0$ أي: $d=-15$ ومنه :

$\boxed{(ABC): x+3y+3z-15=0}$ 0.5

2) أ) إثبات أن AOB **متساوي الساقين:**

$OA = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$ 0.5

$OB = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$

$OA = OB$ **إذن** AOB متساوي الساقين

ب) حساب إحداثيات I **منتصف** $[AB]$

$I\left(\frac{3+0}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ ومنه $\boxed{I\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)}$ 0.5

حساب OI :

$OI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ 0.25

حساب حجم $OABC$ **:**

لدينا : $\vec{OC}(0,0,5)$ $\vec{OA}(3,4,0)$ $\vec{OB}(0,5,0)$

$$\begin{cases} \vec{OC}.\vec{OA} = 0 \\ \vec{OC}.\vec{OB} = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \vec{OC} \perp \vec{OA} \\ \vec{OC} \perp \vec{OB} \end{cases} \text{ إذن } \vec{OC} \perp (AOB)$$

إذن OC ارتفاع الهرم $OABC$ الذي قاعدته AOB

$$V = \frac{1}{3} \mathrm{A} \times OC$$

لدينا $OC = 5$

حساب A مساحة AOB : $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times OI \times AB$

$AB = \sqrt{10}$ ومنه: $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{10} = \frac{15}{2}$ 1

حجم رباعي الوجوه: $\boxed{V = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 5 = \frac{25}{2}}$

3) حساب المسافة بين O **و** (ABC) : 0.25

لدينا: $d(O,(ABC)) = \frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{19}} = \frac{15\sqrt{19}}{19}$

4) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

لدينا $\vec{DE}(-2,6,-8)$ **و** $E \in (DE)$ 0.5

$$(DE): \begin{cases} x = -4-2t \\ y = 6t \\ z = -3-8t \end{cases}$$

ب) معادلة (Q) **المستوي المحوري للقطعة** $[DE]$:

ليكن H منتصف $[DE]$:

$H\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{0-6}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$ ومنه $\boxed{H(-3,-3,1)}$

(Q) يشمل H وشعاعه الناظمي $\vec{DE}(-2,6,-8)$:

معادلته : $-2x+6y-8z+d=0$

$H \in (Q)$ **أي:** $6-18-8+d=0$ **أي:** $d=20$ ومنه :

$(Q): -2x+6y-8z+20=0$

$\boxed{(Q): x-3y+4z-10=0}$ 1

ج) التحقق أن $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right) \in Q$ **:** 0.25

$-1-3+\frac{28}{2}-10=0$ **إذن** $0=0$ **ومنه** $F \in Q$

3) استنتاج المسافة بين F و المستقيم (DE) :

$\boxed{d(F,(DE)) = FH}$

$$FH = \sqrt{(-3+1)^2 + (-3-1)^2 + \left(1-\frac{7}{2}\right)^2}$$

0.5

$$\boxed{FH = \sqrt{4+16+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}}$$

التمرين الثاني :

$$Z' = 2e^{-i\frac{®}{3}}Z + 1 - i$$

1) S تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $\frac{-®}{3}$ ومركزه W

لدينا: $2e^{\frac{-®}{3}i} = 2(\cos(\frac{-®}{3}) + i\sin(\frac{-®}{3}))$

0.75

$$2e^{\frac{-®}{3}i} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$Z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}(i\sqrt{3})}$$

$$Z_W = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(-i\sqrt{3})}{i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$W(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3})$$

تعيين لواحق C', B', A' **بالتشابه** S :

$$Z' = (1-i\sqrt{3})Z + 1 - i$$

$S(A) = A'$ اي $Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})Z_A + 1 - i$

$Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})i + 1 - i$ ومنه $\boxed{Z_{A'} = 1+\sqrt{3}}$ 0.25

$S(B) = B'$ اي $Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})Z_B + 1 - i$

$$Z_B = \sqrt{2}(\cos(\frac{-®}{4}) + i\sin(\frac{-®}{4}))$$

$$Z_B = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - i$$

$$Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})(1-i) + 1 - i$$

$$Z_{B'} = 1 - i - i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 - i$$

0.25 $\boxed{Z_{B'} = (2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})i}$

$S(C) = C'$ اي $Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})Z_C + 1 - i$

$Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})(-1) + 1 - i$ ومنه $\boxed{Z_{C'} = (\sqrt{3}-1)i}$

3) أ) G مرجح الجملة : $\{(A;3),(B;1),(C;-2)\}$

0.25

$$Z_G = \frac{3Z_A + Z_B - 2Z_C}{3+1-2} = \frac{3i+1-i-2(-1)}{2}$$

0.5 $\boxed{Z_G = \frac{3}{2} + i}$

ب) G' مرجح الجملة : $\{(A';3),(B';1),(C';-2)\}$

$$Z_{G'} = \frac{3Z_{A'} + Z_{B'} - 2Z_{C'}}{3+1-2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3(1+\sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3} + (-2-\sqrt{3})i - 2(\sqrt{3}-1)i}{2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3+3\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-2i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+2i}{2}$$

0.5

ج) $S(G) = G'$ ومنه $Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})Z_G + 1 - i$

$$Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})(\frac{3}{2}+i) + 1 - i$$

$$Z_{G'} = \frac{3}{2} + i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \sqrt{3} + 1 - i$$

0.5 $\boxed{Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

الاستنتاج : التشابه المباشر يحافظ عل المرجح

4) أ) **إثبات أن** $\vec{GM'} = \vec{MG}$

$\vec{MM'} = 3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ حسب علاقة شال

$$\vec{MG} + \vec{GM'} = 3(\vec{MG}+\vec{GA}) + \vec{MG} + \vec{GB} - 2(\vec{MG}+\vec{GC})$$

$$\vec{GM'} = (3+1-2-1)\vec{MG} + \underbrace{3\vec{GA}+\vec{GB}-2\vec{GC}}_{\vec{0}}$$

0.5

ومنه : $\vec{GM'} = \vec{MG}$ إذن $\vec{GM'} = -\vec{GM}$

0.25 التحويل تحاكي مركزه G ونسبته -1 (**تناظر مركزه** G)

ب) **تعيين لواحق** F, E, D **صور** C, B, A **بالتحاكي** $T(G;-1)$:

الكتابة المركبة التحاكي: $Z' - Z_G = -(Z - Z_G)$

$T(A) = D$ ومنه : $Z_D - Z_G = -(Z_A - Z_G)$

$$Z_D = -Z_A + 2Z_G$$

$Z_D = -i + 2(\frac{3}{2}+i) = 3+i$ ومنه: $\boxed{Z_D = 3+i}$ 0.25

$T(B) = E$ ومنه : $Z_E - Z_G = -(Z_B - Z_G)$

$$Z_E = -Z_B + 2Z_G$$

$Z_E = -(1-i) + 2(\frac{3}{2}+i)$ ومنه $\boxed{Z_E = 2+3i}$ 0.25

$T(C) = F$ ومنه : $Z_F - Z_G = -(Z_C - Z_G)$

$$Z_F = -Z_C + 2Z_G$$

$Z_F = -(-1) + 2(\frac{3}{2}+i)$ ومنه $\boxed{Z_E = 4+2i}$ 0.25

أ) **إثبات أن المثلثين** ABC و EDF **متقايسان** :

لدينا : $T(A) = D$ و $T(B) = E$ و $T(C) = F$

المثلث EDF صورة المثلث ABC بالتحاكي T الذي يضرب الأطوال في $|K|$ حيث $(k = -1)$ نسبة التحاكي) ومنه :

$$ED = |-1|BA = BA$$

0.5

$$EF = |-1|BC = BC$$

$$DF = |-1|AC = AC$$

ومنه ABC و EDF متقايسان

$$\boxed{Z_{G'}=\frac{5+2\sqrt{3}}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

التمرين الثالث: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$ ، $D_g=\Re$

1) النهايات:

0.5

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=-\infty$$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=\lim(xe^{-x}-e^{-x}+2)=2$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$

0.5

حساب المشتق:

$g'(x)=e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})$ ومنه $\boxed{g'(x)=(2-x)e^{-x}}$

اشارة المشتق:

0.5

$g'(x)=0$ أي $2-x=0$ ومنه $x=2$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$ لأن $e^{-x}\succ 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

2) جدول تغيرات g :

0.5

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$2+e^{-2}$	↘ 2

2) تعليل وجود

عدد $-0.38\prec\sim\prec-0.36$ يحقق $g(\sim)=0$:

لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0.38;-0.36]$

وأيضا $g(-0,36)\times g(-0,38)\prec 0$

0.75

لأن: $g(-0,38)\approx-0,02$ و $g(-0,36)\approx 0,05$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $-0.38\prec\sim\prec-0.36$

استنتاج إشارة $g(x)$:

0.5 0.25

x	$-\infty$	$\sim$	3
g	—	0	+

II) $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، $D_f=\Re$

(1 $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})=+\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x}=0$

استنتاج إشارة $f'(x)$:

0.25

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$\sim$	3
f'	—	0	+

0.5

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$\sim$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\sim)$	↗ $+\infty$

ب) **إثبات أن** $f(\sim)=2\sim+3+\frac{2}{\sim-1}$:

لدينا : $f(\sim)=2\sim+1-\sim e^{-\sim}$

و $g(\sim)=0$ **ومنه** $(\sim-1)e^{-\sim}+2=0$ إذن $e^{-\sim}=\frac{-2}{\sim-1}$

ومنه $f(\sim)=2\sim+1+\frac{2\sim}{\sim-1}$

0.5

لكن : $\frac{2\sim}{\sim-1}=2+\frac{2}{\sim-1}$

ومنه: $f(\sim)=2\sim+3+\frac{2}{\sim-1}$

حصر $f(\sim)$: $-0,38\prec\sim\prec-0,36$

$2(-0,38)+3\prec 2\sim+3\prec 2(-0,36)+3$

$\boxed{2,24\prec 2\sim+3\prec 2,28}$

0.25

ولدينا : $-1,38\prec\sim-1\prec-1,36$

ومنه $\boxed{\frac{2}{-1,36}\prec\frac{2}{\sim-1}\prec\frac{2}{-1,38}}$

$$2,24-\frac{2}{1,36}\prec 2\sim+3+\frac{2}{\sim-1}\prec 2,28-\frac{2}{1,38}$$

$\boxed{0,77\prec f(\sim)\prec 0,83}$

3) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا : $f'(x)=g(x)$

0.5

ومنه : $\boxed{f''(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}}$

إشارة $f''(x)$ **من إشارة** $2-x$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

$f''(x)$ تنعدم عند 2 مغيرة إشارتها ومنه النقطة

$B(2;f(2))$ أي $B(2;5-2e^{-2})$ **نقطة انعطاف**

2) أ) تبيان أن $f^{/}(x)=g(x)$

0.25

$$f^{/}(x)=2-e^{-x}-x(-e^{-x})$$

$$f^{/}(x)=(x-1)e^{-x}+2=g(x)$$

4) أ) إثبات أن $(\Delta): y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لــ (C_f) عند $+\infty$ 0.25

دراسة الوضع النسبي (C_f) و (Δ):

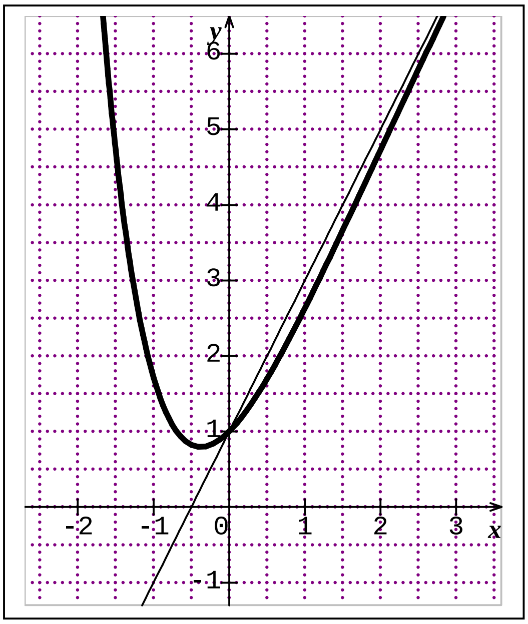
$$\boxed{f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}}$$

إشارة الفرق من إشارة $-x$ 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة الفرق	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

$$\boxed{(C_f)\cap(\Delta)=\{(0;1)\}}$$

رسم (C_f) :



0.5

5) حساب مشتق h : $h(x)=f(x^2e^x)$

$$h^{/}(x)=(x^2e^x)^{/}\times f^{/}(x^2e^x)$$

لدينا : $(x^2e^x)^{/}=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$

ومنه : $h^{/}(x)=(2x+x^2)e^x\times f^{/}(x^2e^x)$

لدينا : $f^{/}(x)=g(x)$ ومنه : $f^{/}(x^2e^x)=g(x^2e^x)$

ومنه : $\boxed{h^{/}(x)=(2x+x^2)e^x\times g(x^2e^x)}$ 0.5

إشارة $h^{/}(x)$:

من إشارة $2x+x^2$ لأن $e^x\succ 0$ و $g(x^2e^x)\succ 0$

(لاحظ جدول إشارة g على المجال $[0;+\infty[$)

$2x+x^2=0$ أي $x(x+2)=0$ ومنه : $x=0$ أو $x=-2$

0.25

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		+	0	-	0	+	
$h^{/}(x)$		+	0	-	0	+	

جدول تغيرات h: 0.5

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h^{/}(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	1	↗	$h(-2)$	↘	1	↗	$+\infty$

6) لدينا $k(x)=(ax+b)e^{-x}$

أ) تعيين العددين a و b:

بما أن k دالة أصلية للدالة $x\to -xe^{-x}$ فإن :

$$k^{/}(x)=-xe^{-x}$$

$$k^{/}(x)=ae^{-x}+(ax+b)(-e^{-x})$$

$$k^{/}(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$$

ومنه : $(-ax+a-b)e^{-x}=-xe^{-x}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-a=-1\\ a-b=0\end{cases}$ ومنه $\boxed{\begin{cases}a=1\\ b=a=1\end{cases}}$ 0.5

إذن : $\boxed{k(x)=(x+1)e^{-x}}$

ب) إستنتاج دالة أصلية للدالة f :

$$f(x)=2x+1-xe^{-x}$$

ومنه دالة أصلية للدالة f على $\Re$ هي : 0.5

$$\boxed{F(x)=x^2+x+(x+1)e^{-x}}$$