التمرين الاول

I. أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

ب) أكتب الحلول على الشكل المثلثي .

II. في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=2i$, $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}-i$.

1) نضع : $L=\dfrac{(1-i)z_B}{z_C}$

أ) أكتب العدد L على الشكل الأسي ثم أحسب L^{2016}.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد L^n تخيليا صرفا .

ج) أكتب العدد L على الشكل الجبري ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2) أ) بين أنه يوجد دوران r يحول النقطة B الى النقطة B و يحول النقطة A الى النقطة C .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته .

3) أ) عين (E_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\dfrac{z-\sqrt{3}-i}{z-2i}$ حقيقيا موجبا.

ب) عين (E_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث، $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ مع $(\theta\in\mathbb{R})$

.

التمرين الثاني

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-4z+8=0$

2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و Ω لواحقها

$$z_\Omega=3-i\ ;\ z_B=2+2i\ ;z_A=-2i$$

أ- اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الاسي

ب- بين ان : $\dfrac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $A\Omega B$

3) ليكن R التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=e^{-i\frac{\pi}{2}}z+4+2i$$

أ- عين طبيعة R و عناصره الهندسية

ب- عين z_C لاحقة النقطة C بحيث يكون الرباعي $A\Omega BC$ مربع مباشر

التمرين الثالث :

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=3\sqrt{2}\left(1+i\right)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$

أ- اكتب z_A ، z_B و $\left(1+i\right)z_A$ على الشكل الاسي

ب- احسب $\left(\frac{\left(1+i\right)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

ت- بين ان النقط O، A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها

ث- احسب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{®}{2}$

أ- اكتب العبارة المركبة للدوران R

ب- عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق ان النقط A ، C و C' في استقامية

ت- عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

التمرين الرابع :

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث: $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و Ω التي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_Ω حيث $z_A=3+2i$; $z_B=-3$; $z_\Omega=1-2i$

أ- اثبت ان $z_B-z_\Omega=i\left(z_A-z_\Omega\right)$

ب- عين طبيعة المثلث ΩAB

3) h هو التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2

أ- عين الكتابة المركبة للتحاكي h

ب- عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h

ت- عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\left\{\left(A,1\right);\left(B,-1\right);\left(C,1\right)\right\}$

ث- بين ان $ABCD$ مربع

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

أ- تحقق ان النقطة B تنتمي الى المجموعة (E) ، ثم عين طبيعة (E) و عناصرها المميزة

ب- انشئ المجموعة (E)

التمرين الخامس :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $4z^2-12z+153=0$

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (وحدة الرسم : $1cm$)

نعتبر النقط A ، B ، C و P ذات اللواحق : $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-3-\frac{1}{4}i$, $z_P=3+2i$

والشعاع $\vec{\mu}$ المعرف باللاحقة : $z_{\vec{\mu}}=-1+\frac{5}{2}i$

أ) عين اللاحقة z_Q للنقطة Q صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{\mu}$

ب) عين اللاحقة z_R للنقطة R صورة النقطة P بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته $\frac{-1}{3}$

ت) عين اللاحقة z_S للنقطة S صورة النقطة P بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{-\text{®}}{2}$

ث) انشئ النقط : P ، Q ، R و S

3) أ) اثبت ان الرباعي $PQRS$ متوازي اضلاع

ب) احسب $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$ ثم استنتج الطبيعة الخاصة لمتوازي الاضلاع $PQRS$

ج) برهن ان النقط P ، Q ، R و S تنتمي الى دائرة واحدة (C) يطلب تعيين لاحقة مركزها Ω و نصف قطرها

° . هل المستقيم (AP) مماس للدائرة (C) ؟

التمرين السادس :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية اذا علمت انها تقبل حلا حقيقيا z_0 : $z^3+2z^2-16=0$ ......(1)

2) اكتب حلول المعادلة (1) على الشكل الاسي

3) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

لتكن $z_A=-2-2i$, $z_B=2$, $z_D=-2+2i$

أ) عين اللاحقة z_C للنقطة C بحيث يكون $ABCD$ متوازي اضلاع ثم ارسم شكلا

ب) لتكن النقطة E صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{-\text{®}}{2}$ و النقطة F صورة النقطة C بالدوران

الذي مركزه D وزاويته $\frac{+\text{®}}{2}$

- احسب z_E و z_F لاحقتي النقطتين E و F على الترتيب . انشئ E و F

- تحقق ان $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث AEF

ج) عين صورة المثلث EBA بالدوران الذي مركزه I منتصف القطعة $[EF]$ وزاويته $\frac{-\text{®}}{2}$

التمرين السابع : (Amerique de Nord 2002)

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نأخذ الوحدة $2cm$

نعتبر التحويل النقطي f للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :
$z'=(1+i)z+2$

1) A نقطة ذات اللاحقة $(-2+2i)$ ،عين لاحقة كل من A' و B التي تحقق $A'=f(A)$ و $f(B)=A$

2) أ – اوجد النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة μ في التحويل f

ب- بين انه من اجل كل عدد مركب z يختلف عن μ : $\dfrac{z'-z}{\mu-z}=-i$

قارن بين MM' و $M\Omega$ واستنتج قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'}\right)$ واستنتج طريقة لانشاء M' انطلاقا من M

3) أ- اعط الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) للنقط من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $|z+2-2i|=\sqrt{2}$ ، تحقق ان B تنتمي الى (Γ)

ب- بين انه من اجل كل عدد مركب z $z'+2=(1+i)(z+2-2i)$ ،ثم بين ان صورة المجموعة (Γ) تنتمي الى الدائرة (Γ') ذات المركز A' ونصف القطر 2

التمرين الثامن : (Polynésie 2002)

الجزء أ:

1) z_1 و z_2 عددان مركبان حل الجملة $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$

2) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس المباشر الذي مركزه O الوحدة $4cm$
نعتبر النقطتان A و B ذات اللاحقتان $z_A=-\sqrt{3}+i$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ على الترتيب ، اكتب z_A و z_B على الشكل الاسي ثم مثل النقطتين A و B

3) احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_A}{z_B}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABO وقيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

4) عين لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ACBO$ معين . احسب مساحة المثلث ABC بـ cm^2

الجزء ب:

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=e^{-i\frac{®}{6}}z$

1) ما طبيعة التحويل f مع ذكر عناصره المميزة

2) اكتب على الشكل الاسي لواحق A' ، B' و C' صور A ، B و C على الترتيب بالتحويل f

3) ما هي مساحة المثلث $A'B'C'$ بـ cm^2

التمرين التاسع : (Bac Nouvelle – Calédonie 2012)

الجزء أ:

نعتبر كثير الحدود P المعرف على $\mathbb{C}$ بـ: $P(z)=z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}$

1) بين ان العدد المركب $z_0=i\sqrt{2}$ حل للمعادلة $P(z)=0$
2) أ- عين الاعداد الحقيقية a و b حيث $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$
ب- استنتج الحلول في $\mathbb{C}$ للمعادلة $P(z)=0$

الجزء ب:

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نأخذ الوحدة $2cm$

نعتبر النقط A ، B ، J و K ذات اللواحق $z_A=1+i$; $z_B=1-i$; $z_J=i\sqrt{2}$; $z_K=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ على الترتيب

1) علم النقط A ، B ، J و K
2) لتكن L نظيرة النقطة J بالنسبة للنقطة K بين ان لاحقة L تساوي $-\sqrt{2}$
3) بين ان النقط A ، B ، J و L تنتمي الى نفس الدائرة مع تعيين مركزها ونصف قطرها
4) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D=-1+i$ وليكن الدوران r مركزه O ويحول النقطة J الى D
أ- عين قيسا لزاوية الدوران r
ب- لتكن C صورة النقطة L بالدوران r عين لاحقة النقطة C
5) ما طبيعة الرباعي $ABCD$؟ برر اجابتك

التمرين العاشر (France 2007)

الجزء أ:

نعتبر المعادلة $(E)\to z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ حيث z عدد مركب

1) بين ان العدد المركب i حل للمعادلة (E)
2) عين ثلاثة اعداد حقيقية a، b و c بحيث من اجل كل عدد مركب z
$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)\left(az^2+bz+c\right)$
3) استنتج حلول المعادلة (E)

الجزء ب :

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق i ، $2+3i$ و $2-3i$ على الترتيب

1) ليكن r الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$، عين لاحقة A' محولة النقطة A بالدوران r

بين ان النقط A' ، B و C في استقامية ثم عين الكتابة المركبة للتحاكي الذي مركزه B ويحول C الى A'

التمرين الحادي عشر : (Bac Polynesie 2009)

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ الوحدة $1cm$

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=iz+4+4i$

1) أ- عين اللاحقة µ للنقطة Ω حيث $f\left(\Omega\right)=\Omega$

ب- بين انه من اجل كل عدد مركب z لدينا $z'-4i=i\left(z-4i\right)$

ج-استنتج الطبيعة و العناصر المميزة لـ f

2) نعتبر النقط A و B ذات اللواحق $a = 4 – 2i$ و $b = - 4 + 6i$ على الترتيب

أ- علم النقط A ، B و Ω

ب- عين لواحق A' ، B' صور A و B على الترتيب بـ f

3) نسمي m ، n ، p و q لواحق النقط M ، N ، P و q على الترتيب منتصفات القطع $[AA'],[A'B],[BB']$ و $[B'A]$

أ- نقبل ان $n = 1+7i$ ، $p = - 3 + 3i$ و $q = 1-i$ عين m

ب- بين ان $MNPQ$ متوازي اضلاع

ت- برهن ان المستقيمان $\left(B'A\right)$ و $\left(\Omega N\right)$ متعامدان

التمرين الثاني عشر :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2-2\sqrt{3}Z+4=0$

2) لتكن النقط A ذات اللاحقة $Z_A=\sqrt{3}-i$ ، B ذات اللاحقة $Z_B=\sqrt{3}+i$ ، C منتصف القطعة $[OB]$ ذات اللاحقة Z_C

أ- اكتب : Z_A ، Z_B و Z_C على الشكل الاسي

ب- مثل النقط : A ، B و C في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

ت- اثبت ان المثلث OAB متقايس الاضلاع

3) لتكن النقطة D صورة C بالدوران الذي مركزه O (مبدأ المعلم) وزاويته $-\frac{®}{2}$ ، و النقطة E صورة D بالانسحاب t الذي شعاعه $2\vec{v}$ حيث $Z_{\vec{v}}=i$

أ- مثل النقطتين D و E في الشكل السابق

ب- اثبت ان : $Z_E=\frac{1}{2}\left[1+i\left(4-\sqrt{3}\right)\right]$

ت- اثبت ان : $OE=BE=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

4) استنتج ان النقط : A ، C و E في استقامية

التمرين الثالث عشر :

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(Z) = Z^3 - (2-3i)Z^2 + 9Z - 18 + 27i$

1) أ- احسب $\overline{P(Z)}$ بدلالة $\overline{Z}$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$ ، اذا علمت انها تقبل حلين مترافقين Z_1 و $\overline{Z_1}$

2) في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A = 3i$; $z_B = -3i$; $z_C = 2-3i$

أ- عين زاوية ونسبة التشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول C الى A

- استنتج طبيعة المثلث ABC

- نضع : $S^n = \underbrace{S0S0.........0S}_{n \text{ مــــــرة}}$ ، حيث n عدد طبيعي $(n \geq 2)$

حدد طبيعة التحويل S^n و العناصر المميزة له

- اكتب العبارة المركبة للتحويل S^n

- استنتج الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S^{2010}

- اوجد لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالتحويل S^{2010}

ب- عين لاحقة النقطة H مرجح الجملة : $(\{A;1\},\{B;2\},\{C;-2\})$

ت- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = 25$

التمرين الرابع عشر :

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها : $z_A = 1+\sqrt{3}i$; $z_B = -1-i$; $z_C = -(2+\sqrt{3})+i$

1) أ- تحقق ان : $z_C - z_B = i(z_A - z_B)$

ب- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ ، ماذا تمثل النتيجتين هندسيا ؟

ج- استنتج طبيعة المثلث : ABC

د- استنتج تحويلا نقطيا يحول A الى B ، محددا طبيعته و عناصره المميزة

ه- اذا رمزنا للتحويل السابق بـ : R ، استنتج طبيعة التحويل R^{2011} و عناصره المميزة حيث :

$R^{2011} = \underbrace{R0R0.......0R}_{2011 \text{ مــــــرة}}$

2) أ- اكتب العدد : $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري

ت- اكتب كل من : z_A و z_B على الشكل المثلث

التمرين الخامس عشر :

1) ليكن $P(Z)$ كثير حدود ذو المتغير المركب Z بحيث : $P(Z)=Z^4-6Z^3+24Z^2-18Z+63$

أ- بين ان لـ $P(Z)$ جذرين تخيليين صرفين مترافقين

ب- حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$

2) في المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبر النقط : A ، B ، C و D ذوات اللواحق

$$Z_A=i\sqrt{3} \quad ; \; Z_B=-i\sqrt{3} \;\; ; Z_C=3+2i \;\; ; Z_D=3-2i$$

أ- مثل النقط A ، B ، C و D في المعلم السابق

ب- اثبت ان النقط A ، B ، C و D تنتمي الى نفس الدائرة محددا مركزها و نصف قطرها

3) لتكن E نظيرة D بالنسبة للمبدا O ، وليكن العدد المركب : $L=\dfrac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}$

أ- اكتب العدد المركب L على الشكل الاسي

ب- عين طبيعة المثلث : BEC

ت- ليكن R الدوران ذو المركز B والذي يحول النقطة E الى النقطة C ، استنتج من السابق زاوية هذا الدوران R ثم اكتب العبارة المركبة له

ث- بين ان R^{2010} تناظر ، يطلب تحديد عناصره المميزة

ج- ماهي طبيعة التحويل $R^{2010}OR^{2010}$ ؟