التمرين الاول

نعتبر العددان المركبان $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$

1) اكتب على الشكل المثلثي كل من الاعداد المركبة z_1 ، z_2 و $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

2) ضع Z على الشكل الجبري

3) لستنتج ان $\cos\dfrac{\text{®}}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\dfrac{\text{®}}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) نعتبر المعادلة $(E):\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2$

أ) باستعمال السؤال السابق بين المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(F):\cos\left(x - \dfrac{\text{®}}{12}\right) = \dfrac{1}{2}$

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (F)

التمرين الثاني :

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف بـ : $P(z) = z^3 + \left(14 - i\sqrt{2}\right)z^2 + \left(74 - 14i\sqrt{2}\right)z - 74i\sqrt{2}$

1) أ- بين ان المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه

ب-عين عددان حقيقيان $\sim$ و بحيث من اجل كل عدد مركب z لدينا $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + \sim z + \quad\right)$

جـ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

2) المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ الوحدة $0{,}5cm$

أ- علم النقط A ، B و C ذات اللواحق $a = -7 + 5i$ و $b = -7 - 5i$ و $c = 1 + i$ على الترتيب

ب- عين لاحقة النقطة N حتى يكون الرباعي $ABCN$ متوازي اظلاع

3) لتكن D نقطة ذات اللاحقة $d = 1 + 11i$

أ- اكتب العدد المركب $\dfrac{d-b}{a-c}$ على الشكل الجبري ثم الشكل المثلث

ب- استنتج ان المستقيمين (AC) و (BD) متعامدين

ت- ماهي طبيعة الرباعي $ABCD$

التمرين الثالث :

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثيري الحدود $Q(z)$ و$P(z)$ حيث :

$$P(z)=z^3-\left(3+2\sqrt{3}\right)z^2+\left(7+4\sqrt{3}\right)z-\left(5+2\sqrt{3}\right) \quad ; \quad Q(z)=z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}$$

1) أ- تحقق انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-1)Q(z)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Q(z)=0$ ثم $P(z)=0$

2) المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A=1$; $z_B=1+\sqrt{3}-i$; $z_C=1+\sqrt{3}+i$ على الترتيب

أ- اكتب كل من z_B-z_A ، z_C-z_A و $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل المثلثي

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

ت- نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة $1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.بين ان Ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

ث- حدد (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب حيث $\left|\dfrac{z_C-z}{z_B-z}\right|=1$

التمرين الرابع :

$\sim$ عدد حقيقي من المجال $\left[0;®\right[$ و z عدد مركب

نعتبر كثير الحدود $P(z)$ المعرف بـ $P(z)=z^3-(1-2\sin\sim)z^2+(1-2\sin\sim)z-1$

1) أ- احسب $P(1)$

ب-استنتج وجود ثلاثة اعداد حقيقية a ، b و c حيث $P(z)=(z-1)\left(az^2+bz+c\right)$ ، عين a ، b و c

جـ - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2) نعتبر ثلاثة اعداد مركبة $z_1=1$; $z_2=-\sin\sim+i\cos\sim$; $z_3=-\sin\sim-i\cos\sim$

عين طويلة و عمدة لكل من الاعداد المركبة z_1 ، z_2 و z_3

التمرين الخامس :

ليكن $\theta \in [0;\pi]$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z : $z^2 - 2(\cos\theta)z + 2(1-\sin\theta) = 0$

1) أ- تحقق ان $\cos^2(\theta) - 2(1-\sin\theta) = -(1-\sin\theta)^2$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2) المستوي المركب P منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط A ، M و M' النقط ذات اللواحق $\sqrt{3}$; $\cos\theta + i(1-\sin\theta)$; $\cos\theta - i(1-\sin\theta)$

على الترتيب

أ - عين ثم انشئ المجموعة F للنقط M عندما θ يمسح $[0;\pi]$

ب- بين ان $AM^2 = 5 - 4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

ج - عين θ التي من اجلها يكون AM اصغر ما يمكن

التمرين السادس :

z_1 ، z_2 عددان مركبان حيث : $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2 = 2 - 2i$

1) اكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل الاسي

2) نضع : $Z = z_1 \times z_2$

أ- اكتب على الشكل الاسي Z

ب- عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

3) احسب $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^{2014}$

4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية: $(E) : 7x - 12y = 6$

أ- بين انه اذا كان $(x\,;y)$ حل للمعادلة فان x مضاعف للعدد 6

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

5) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z}{2\sqrt{6}}\right)^n$ العدد تخيليا صرفا

التمرين السابع :

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : (1)...... $Z^3+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)Z^2-2iZ+\sqrt{2}(1-i)=0$

1- برهن ان المعادلة (1) تقبل حلا Z_0 بحيث $|Z_0|=1$، يطلب ايجاده

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1)

3- استنتج مجموعة الاعداد الحقيقية a و ¯ $(a>0$ و $0 \le$ ¯ ≤ 2®$)$ بحيث :

$$a^3\cos 3¯+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2(\cos 2¯-\sin 2¯)+2a\sin ¯+\sqrt{2}=0$$ و

$$a^3\sin 3¯+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2(\cos 2¯+\sin 2¯)-2a\cos ¯-\sqrt{2}=0$$

التمرين الثامن :

a عدد مركب بحيث : $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، n عدد طبيعي

عين الاعداد الطبيعية n بحيث يكون a^n :

حقيقيا ب- حقيقيا موجبا ج- حقيقيا سالبا د- تخيليا صرفا

التمرين التاسع :

Z عدد مركب ، $P(Z)$ كثير حدود بحيث : $P(Z)=Z^3+2(2-i)Z^2+(5-8i)Z-10i=0$

1) بين ان $P(Z)$ يقبل جذرا تخيليا صرفا Z_0 يطلب تعيينه

2) اوجد الاعداد الحقيقية : a ، b و c بحيث $P(Z)=(Z-Z_0)(aZ^2+bZ+c)$

3) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$

أ- استنتج حلول كل من المعادلتين :

$$Z^3+2(2+i)Z^2+(5+8i)Z+10i=0 \text{ ....}(*)$$
$$-iZ^3-2(2-i)Z^2+(8+5i)Z-10i=0 \text{ ....}(**)$$

التمرين العاشر :

1- بين ان العدد المركب $-2-i$ حلا خاصا للمعادلة $Z^4+5Z^3+10Z^2+3Z+5=0........(1)$

2- بين انه اذا كان Z حلا للمعادلة (1) فان $\overline{Z}$ حلا للمعادلة (1)

3- استنتج كل حلول المعادلة (1)

التمرين الحادي عشر :

~عدد مركب ، Z عدد مركب

ليكن كثير الحدود $P_{\sim}(Z)$ حيث : $P_{\sim}(Z)=Z^3+\sim Z^2-\overline{\sim}Z-1$

1) بين انه اذا كانت : A ، B و C هي حلول المعادلة : $P_{\sim}(Z)=0$ فان : $A\times B\times C=0$

2) أ- بين انه اذا كان Z: حلا للمعادلة $P_{\sim}(Z)=0$ فان : $\frac{1}{\overline{Z}}$ يكون حلا للمعادلة: $P_{\sim}(Z)=0$

ب- استنتج انه يوجد عدد مركب Z_0 بحيث : $|Z_0|=1$ و $P_{\sim}(Z_0)=0$

3) في هذا السؤال نأخذ : $|\sim|=1$ ، وليكن عدد مركب بحيث $\sim\times\ ^2=1$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P_{\sim}(Z)=0$ (تعطى الحلول بدلالة ~ و)

4) استنتج حلول المعادلة : $2Z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)Z^2-\left(\sqrt{3}+i\right)Z-2=0$

التمرين الثاني عشر :

نعتبر العدد المركب : $Z=-(\sin^{-})\times(\cos^{-})-i\cos^2{}^{-}$ ، حيث $^{-}\in\left]0,\frac{®}{2}\right[$

1) أ – احسب بدلالة¯ الطويلة و عمدة للعدد Z

ب- استنتج الطويلة و عمدة للعدد Z^2

2) المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس ، A و M صورتا العددين : $-i$ و Z على الترتيب

أ- عين مجموعة النقط M من المستوي عندما يتغير ¯ في المجال $\left]0,\frac{®}{2}\right[$

ب- برهن ان : $|Z|^2+|Z+i|^2=1$ واستنتج ان المثلث OAM قائم في M

ت- عين قيمة ¯ حتى يكون المثلث OAM متساوي الساقين

التمرين الثالث عشر :

من اجل كل عدد طبيعي n نضع z_0 ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$ ونعتبر النقط $A_n\left(z_n\right)$ في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

1) احسب z_1 ، z_2 و z_3 و تحقق ان z_4 حقيقي

2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=\left|z_n\right|$ بين ان $\left(u_n\right)$ المتتالية هندسية اساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) بين ان : $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$ من اجل كل عدد طبيعي n ثم استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}

4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $L_n=A_0A_1+A_1A_2+...+A_{n-1}A_n$ عبر عن L_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$