☜ التمرين الأول:

☜ الجزء الأول : (البحث عن دالة)

اضغط هنا لمشاهدة الحل

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=ax+b-\dfrac{\ln(x)}{x}$

حيث b,a عددين حقيقيين.

عين العددين الحقيقيين b,a بحيث المنحنى (C_g) الممثل للدالة g يقبل في النقطة $A(1;0)$ مماسا أفقيا .

☜ الجزء الثاني : (دراسة دالة)

الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x)}{x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln(x)$

أ) أدرس تغيرات الدالة h.

ب) أحسب $h(1)$ ثم أستنتج إشارة $h(x)$ في المجال $]0;+\infty[$.

2) بين أنه من أجل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

3) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

5) أ) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

ب)- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y=x-1$

ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

6) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f).

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (d_m) ذي المعادلة : $y=x+m$.

☜ التمرين الثاني :

الحل

I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+\ln x^2-1$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) أحسب $g(1)$ ثم أستنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1-\dfrac{1}{x^2})\ln(x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) ليكن (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto\ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

أ) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

ب) أرسم (δ) و (C_f) .

4) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\times|\ln x|$.

أ) أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

ب) اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) باستعمال المنحنى (C_f) ثم أرسم (C_h).

☜ **حل التمرين الأول :**	**09 نقاط**
☜ **الجزء الأول : (البحث عن دالة)** الرجوع الى نص التمرين لدينا : $g(x)=ax+b-\frac{\ln(x)}{x}$ و $D_g=]0;+\infty[$	
تعيين العددين الحقيقيين a,b : • C_g يقبل مماسا في النقطة $A(1;0)$ مماسا أفقيا يعني $A\in(C_g)$ و $g'(1)=0$ - $A\in(C_g)$ يعني $g(1)=0$ ومنه $a\times1+b-\frac{\ln1}{1}=0$ وبالتالي $(*)...\ a+b=0$ - ولدينا : $g'(x)=a-\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=a-\frac{1-\ln x}{x^2}$ • $g'(1)=0$ يعني $g'(1)=a-\frac{1-\ln1}{1^2}=0$ ومنه $a-1=0$ أي $a=1$ من أجل $a=1$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد $b=-a=-1$ وبالتالي $g(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$	$0.25+0.5+0.25$
☜ **الجزء الثاني : (دراسة دالة)** الرجوع الى نص التمرين **لدينا :** $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$ و $D_f=]0;+\infty[$	
1) لدينا : $h(x)=x^2-1+\ln x$ و $D_h=]0;+\infty[$	
أ. دراسة تغيرات الدالة h: • **حساب النهايات :** $\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-1+\ln x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-1+\ln x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$	$0.25+0.25$
• **حساب المشتقة :** $h'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$ • **دراسة إشارة المشتقة :** x: 0 ... $+\infty$ ؛ $h'(x)$: ‖ $+$	$0.25+0.25$
• **جدول تغيرات الدالة** h : x: 0 ... 1 ... $+\infty$ $h'(x)$: ‖ $+$ $h(x)$: ‖ $-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$	0.5
ب. حساب $h(1)$ ثم استنتاج اشارة $h(x)$:	

- لدينا : $h(1)=1^2-1+\ln 1=1-1+0=0$
- **جدول اشارة** $h(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0.5

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ **لدينا** : $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$:

- لدينا : $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$

0.5

3) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x-1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأنَ $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty\end{cases}$
- و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\left(x-1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأنَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0\end{cases}$

0.25+0.25

4) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

- لدينا : $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$ وبالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $h(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0.5

- **جدول تغيرات الدالة** f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0.5

5) أ- تبيان أنَ المنحني (C_f) **يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار** $+\infty$:

- نلاحظ أنَ $f(x)=x-1+\varphi(x)$ حيث $\varphi(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ ومنه المستقيم ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) **بجوار** $+\infty$

0.25

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم $(\Delta): y=x-1$:

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y=x-1-\frac{\ln x}{x}-(x-1)=-\frac{\ln x}{x}$

$f(x)-y=0$ يعني $-\frac{\ln x}{x}=0$

ومنه $\ln x=0$ أي $x=1$

- اشارة الفرق عكس اشارة $\ln x$

0.25

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

0.5

ج) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له :

- (T) يوازي (Δ) يعني **معامل توجيه المماس (T) يساوي** 1

ومنه $\begin{cases} f'(x)=1 \\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$ مع أي $\begin{cases} \frac{h(x)}{x^2}=1 \\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$

وبالتالي $\begin{cases} h(x)=x^2 \\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$ إذن $\begin{cases} x^2-1+\ln x=x^2 \\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$

أي $\begin{cases} -1+\ln x=0 \\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \ln x=1 \\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$

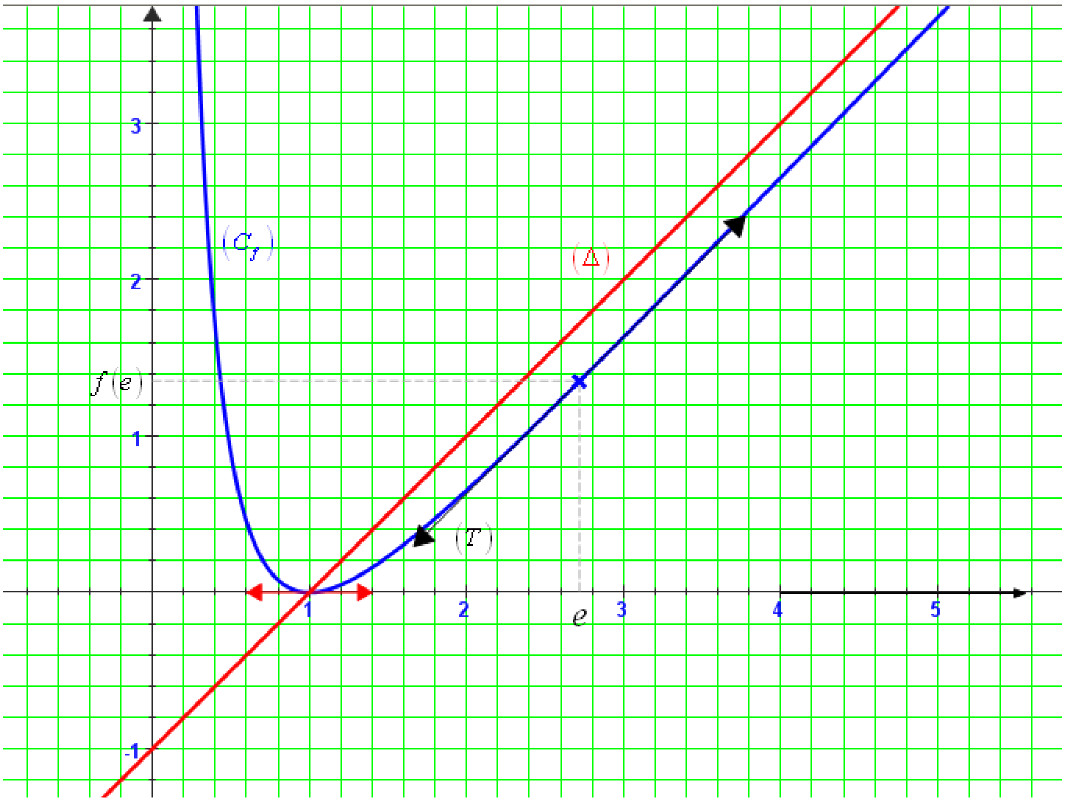
أي $x=e$

- وبالتالي المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e.
- **كتابة معادلة المماس (T) :**

$$y=f'(e)(x-e)+f(e)=1\times(x-e)+e-1-\frac{\ln e}{e}=x-1-\frac{1}{e}$$

$$(T): y=x-1-\frac{1}{e}$$

0.5+0.5

01	**6) الرسم :** 
01	**7) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (d_m) ذي المعادلة $y = x + m$:** • المستقيم (d_m) يوازي المستقيم (Δ). - إذا كان $m \in \left]-\infty; -1-\frac{1}{e}\right[$ فإنه لا توجد أية نقطة مشتركة بينهما . - إذا كان $m = -1-\frac{1}{e}$ فإنهما يتقاطعان في النقطة $A(e; f(e))$. - إذا كان $m \in \left]-1-\frac{1}{e}; -1\right[$ فإنهما يتقاطعان في نقطتين . - إذا كان $m \in [-1; +\infty[$ فإنهما يتقاطعان في نقطة وحيدة .

انتهى تصحيح التمرين الأول ❀

☜ تصحيح التمرين الثاني :	العودة الى نص التمرين	08 نقاط

I. لدينا : $g(x)=x^2+\ln x^2-1$ و $D_g=]0;+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات : (0.25+0.25)

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\ln x^2-1\right)=-\infty \quad \text{لأنّ} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-1\right)=-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^2+\ln x^2-1\right)=+\infty \quad \text{لأنّ} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty\end{cases}$$

- **حساب المشتقة :** (0.5)

$$g'(x)=2x+\frac{2x}{x^2}=2x+\frac{2}{x}=\frac{2x^2+2}{x}$$

- **دراسة اشارة المشتقة :** (0.5)

- اشارة $g'(x)$ من اشارة البسط $2x^2+2$
- لدينا : $2x^2+2>0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	‖ $\qquad$ $+$

- جدول تغيرات الدالة g : (0.5)

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g'(x)$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

2) حساب $g(1)$ واستنتاج اشارة $g(x)$: (0.5)

- **لدينا :** $g(1)=1^2+\ln 1^2-1=1+0-1=0$
- **جدول اشارة $g(x)$:**

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II. لدينا : $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})\ln(x)$ و $D_f=]0;+\infty[$

1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$: (0.5)

- لدينا : $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}\times\ln x+\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{\ln x^2+x^2-1}{x^3}$

ومنه : $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x^2-1}{x^3}=\dfrac{g(x)}{x^3}$

2) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : (0.25)

• لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ وبالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

• جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x=+\infty$$ لأنَ $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x=+\infty$$ لأنَ $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$$

0.25+0.25

• جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0.5

3) أ) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المنحني (δ):

• ندرس اشارة الفرق $f(x)-\ln x$:

- لدينا : $f(x)-\ln x=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x-\ln x=\left(1-\dfrac{1}{x^2}-1\right)\ln x=-\dfrac{\ln x}{x^2}$

وبالتالي اشارة الفرق $f(x)-\ln x$ عكس اشارة $\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (δ)	(C_f) يقطع (δ)	(C_f) تحت (δ)	

0.25+0.5

• حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

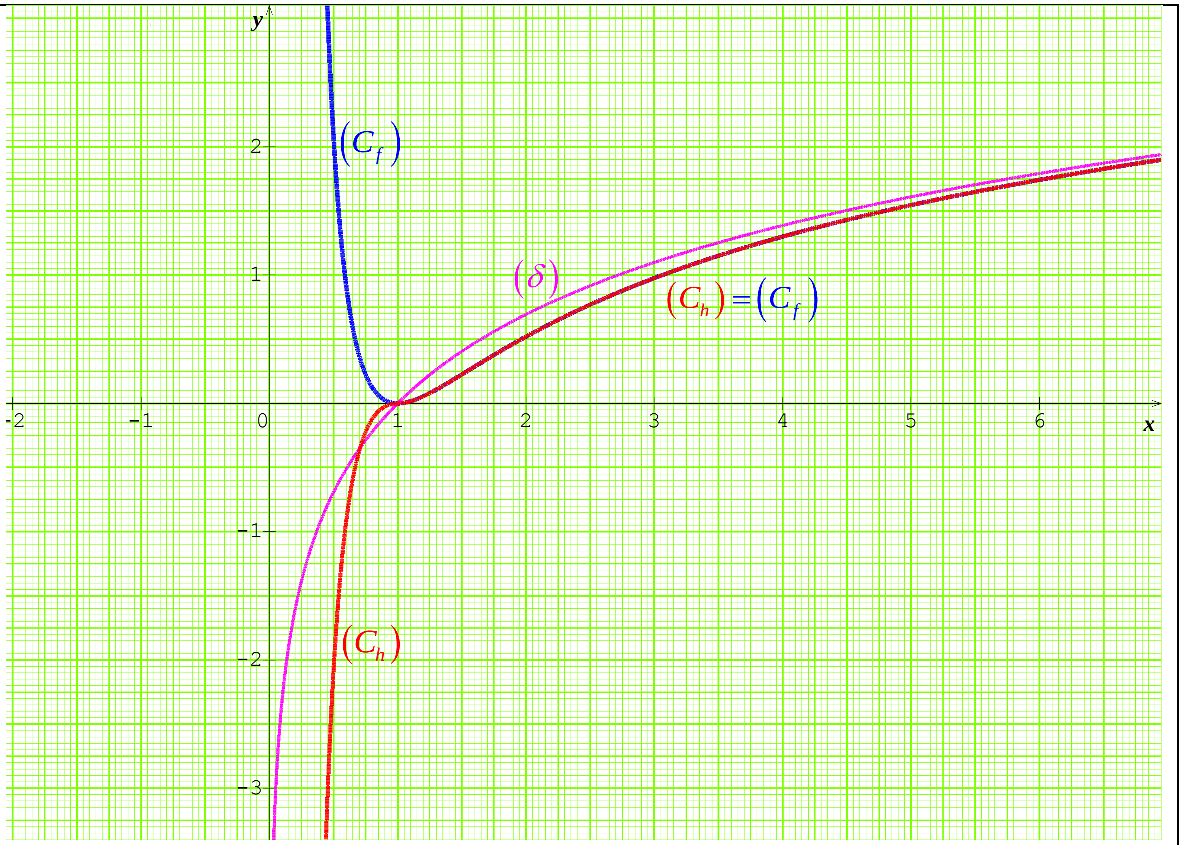
• الاستنتاج : نستنتج أنَ المنحني (δ) منحنى مقارب للمنحني (C_f)

لأنَ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0$

0.25+0.25

ب) الرسم :

0.5+0.5+0.5



4) لدينا : $h(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\times|\ln x|$ و $D_h=]0;+\infty[$

أ) كتابة $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة : 0.5

- لدينا :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$\lvert\ln x\rvert$	‖	$-\ln x$	0	$\ln x$	
$h(x)$	‖	$\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\times(-\ln x)=-f(x)$	0	$\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\times\ln x=f(x)$	

إذن : 0.25

$$\begin{cases} h(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\times(-\ln x)=-f(x) & ;x\in]0;1] \\ h(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\times\ln x=f(x) & ;x\in[1;+\infty[\end{cases}$$

ب) ذكر كيفية رسم المنحني (C_h): 0.25

- المنحني (C_h) منطبق على (C_f) اذا كان $x\in[1;+\infty[$.
- المنحني (C_h) هو نظير المنحني (C_f) بالنسبة الى حامل محور الفواصل اذا كان $x\in]0;1]$.

☜ انتهى تصحيح التمرين الثاني ❀ بالتوفيق و النجاح في البكالوريا جوان 2015 ✌