التمرين 01:

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 2$ و $u_5 = 8$.

1. عين الأساس r لهذه المتتالية و حدها الأول u_1.
2. أحسب المجموع $u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 95$.

التمرين 02:

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ حيث:

$$u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 875$$

1. أحسب الحد u_5 علما أنه موجب ثم أحسب u_0.
2. أحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $8S_n \geq 945$.

التمرين 03:

عين الحدود الثلاثة الأولى u_1، u_2، u_3 لمتتالية هندسية حدودها موجبة و المعرفة كمايلي: $\begin{cases} u_1 \times u_2 \times u_3 = 1 \\ u_1 + u_2 - 6u_3 = 0 \end{cases}$

التمرين 04:

(u_n) متتالية عددية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \frac{\alpha^2+n-1}{\alpha+1}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

1. بين أن (u_n) حسابية يطلب حساب أساسها و حدها الأول.
2. نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
   بين أن $S_n = \frac{n(n+2\alpha^2-3)}{2(\alpha+1)}$
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي : $v_n = e^{u_n}$
   بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين عناصرها.
4. نضع: $S'_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$. بين أن $S'_n = e^{S_n}$.

التمرين 05:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = \frac{4u_n-2}{u_n+1}$، و لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بالعلاقة: $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$.

1. برهن أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. أحسب نهاية كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)
4. أحسب المجموع n حيث:
   $$S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$$
5. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ: $w_n = \ln v_n$.
   أحسب المجموع S'_n حيث:
   $$S'_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

التمرين 06: (Bac Mauritanie 2006)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي $5u_{n+1} - 2u_n = 6$

1. أحسب u_1 و u_2.
2. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بالعلاقة: $v_n = u_n - 2$.
   أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء عناصرها.
3. أ. أكتب عبارة v_n دلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
   ب. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
   $$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
4. أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} S_n$

التمرين 07:

برهن بالتراجع أنه:

1. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:
   $$2 + 5 + 8 + \cdots + (3n+2) = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$$
2. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:
   $$1 \times 2^2 + 2 \times 4^2 + 3 \times 6^2 + \cdots + n(2n)^2 = [n(n+1)]^2$$
3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا:
   $$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$
4. من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$ لدينا: $4^n > 3n + 1$
5. من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ لدينا:
   $$3^n \geq (n+2)^2$$
6. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $n^2 - n$ مضاعف للعدد 2.
7. من أجل كل عدد طبيعي ، العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9.
8. من أجل كل عدد طبيعي ، العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.
9. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم ، $5^{4n} - 3^{3n}$ مضاعف للعدد 13.

التمرين 08:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4\left(-\frac{1}{u_n} + 1\right)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$
2. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟
3. من أجل كل عدد طبيعي ، نضع: $v_n = \frac{1}{u_n-2}$.
   أ. أثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   ب. أكتب عبارة n بدلالة n ثم عين نهاية (u_n). ماذا تستنتج؟
4. عين عشر حدود متعاقبة من المتتالية (v_n) بحيث مجموعها يساوي $\frac{105}{2}$.

التمرين09:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ. أرسم (C_f) و المستقيم ( ) ذا المعادلة $y = x$.
   ب. مثل الحدود $_0$ ، u_1، u_2، u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الإنشاء.
   ج. ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n).
2. لتكن (v_n) متتالية معرفة كما يلي: $v_n = u_n - 2$
5. بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
6. أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
   ج. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و احسب نهايتها.

التمرين10:

لتكن f الدالة المعرفة على $[-1; 2[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2-2x}{x-3}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2\ cm$)

1. أ. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[-1; 2[$
   ب. استنتج أنه إذا كان $x \in [-1; 2[$ فإن $f(x) \in [-1; 2[$
2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.
   ت. استعمل المنحنى (C_f) و المستقيم ( ) ذا المعادلة $y = x$ لتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 دون حسابها.
   ث. أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية و تقاربها.
3. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1 < u_n < 2$
   ب. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج؟
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي كما يلي: $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}$
   أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   ب. أكتب v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$. استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين11: (Bac Réunion Juin 2006)

لتكن f الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

1. أدرس تغيرات الدالة f
2. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$
   أ. أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f و المستقيم $(\mathcal{D})$ ذا المعادلة $y = x$، ثم أنشئ النقطتين M_1، M_2 اللتان فاصلتاهما u_1 و u_2 على الترتيب.
   ب. اقترح تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n).
   ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e$
   د. أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو عدد حقيقي L من المجال $[e; +\infty[$، ثم عين قيمة L .

التمرين12: (Bac S Tunisie 2004)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$.

1. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 < u_n < 2$
   ب. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.
   ج. استنتج أن (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.
2. لتكن (v_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 1)$
   أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
   ب. أحسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$
   ج. أحسب من جديد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين13: (بكالوريا الجزائر 2007 شعبة تكنولوجيا)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $4u_{n+1} = 7u_{n+1} - 3u_n$. (v_n) متتالية معرفة بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. أحسب u_2 و v_0
2. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$
3. أحسب المجموع $_n$ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$
4. عبر عن $_n$ بدلالة S_n مستعينا بالعبارة $v_n = u_{n+1} - u_n$ ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n . أحسب نهاية u_n لما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين14: (Bac Inde Avril 2006)

1. (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$، و من أجل كل عدد طبيعي n $_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$
   أ. أحسب u_1، u_2، u_3
   ب. قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) و الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (w_n) حيث: $w_n = \frac{n}{n+1}$
   ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = w_n$
2. (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
   أ. أثبت أن: $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

ب. ليكن S_n المجموع المعرف من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

- أكتب S_n بدلالة n.
- عين نهاية المجموع S_n لما n يؤول إلى $+\infty$

<u>التمرين15:</u> (Bac Antilles Guyane Septembre 2005)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$، و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. أ. برهن أنه من أجل كل $n \geq 3$، $u_n \geq 0$.
ب. استنتج أنه من أجل كل $n \geq 4$ ، $u_n \geq n - 2$
ج. استنتج نهاية المتتالية (u_n).
2. نعرف المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = 4u_n - 8n + 24$ من أجل كل عدد طبيعي n
أ. بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$
ج. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = x_n + y_n$ حيث (x_n) متتالية هندسية و (y_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس و الحد الأول لكل منهما
ج. استنتج بدلالة n عبارة المجموع:
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

<u>التمرين16:</u> (Bac Maroc 2004 S)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$، و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2+1}$.

1. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$
ب. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
ج. استنتج أن (u_n) متقاربة.
2. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$
ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

<u>التمرين17:</u> (بكالوريا الجزائر 2000 شعبة تكنولوجيا)

(u_n) متتالية عددية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي:
$$2u_{n+1} = u_n + 2000$$

1. ماهي قيمة الحد u_0 التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة؟
2. نفرض أن (u_n) غير ثابتة، و نعرف المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = \frac{1}{2}u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.
   - عين العدد α حتى تكون (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.
3. نفرض أن $u_0 = 3000$ و $\alpha = 1000$.
أ. أكتب عبارة v_n بدلالة n
ب. أحسب بدلالة n المجموع S_n:
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

<u>التمرين18:</u> (بكالوريا الجزائر 2009 شعبة الرياضيات)

1. نعرف الدالة العددية f على المجال $[1; 5]$ بالعبارة: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$. ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $3\ cm$)
أ. أدرس تغيرات الدالة f
ب. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ في نفس المعلم.
2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 5$ و بالعبارة $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.
أ. أحسب u_1 و u_2
ب. استعمل المنحنى $(\mathcal{C})$ و المستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل.
3. أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq \sqrt{5}$
ب. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n)؟
4. أ. برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن:
$$\left(u_{n+1} - \sqrt{5}\right) \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right)$$
ب. استنتج أن $\left(u_n - \sqrt{5}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0 - \sqrt{5}\right)$.
ماهي $\lim_{n\to+\infty} u_n$

<u>التمرين19:</u> (بكالوريا الجزائر 2008 شعبة تقني رياضي)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بالعبارة:
$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

1. أ. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$
ب. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $4cm$)
ج. برهن أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن $f(x) \in [0; 2]$
2. نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
أ. برر وجود المتتالية (u_n). أحسب الحدين u_1 و u_2
ب. مثل الحدود u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل.
ج. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها
3. أ. برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أن:
$$0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$$
ب. برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن: $u_{n+1} > u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n)؟
ج. تحقق أن: $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\left(u_n - \sqrt{3}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.
عين عددا حقيقيا k من $]0; 1[$ بحيث:
$$\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leq k\left|u_n - \sqrt{3}\right|$$
بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$:
$\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leq k^n\left|u_0 - \sqrt{3}\right|$. استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$