التصحيح النموذجي للموضوع الثاني

التمرين الاول:1) صحيح التبرير نجد: $\left(1+\sqrt{3}i\right)^4.\left(\sqrt{3}+i\right)^5=2^4e^{i\frac{4\pi}{3}}.2^5e^{i\frac{5\pi}{6}}=2^9e^{\frac{i13\pi}{6}}=256\sqrt{3}+256i$ ن1.....

2) خطأ لأنه بوضع $z=a+ib$ نجد $a^2-b^2+6b-7+2ib(a-3)=0$ ومنه $\begin{cases}a^2-b^2+6a-7=0\\2b(a-3)=0\end{cases}$

الحلول هي: $z_1=1$, $z_2=-7$ $z_3=3+2\sqrt{5}i$ $z_4=3-2\sqrt{5}i$ ن1.........

3) صحيح لأن: بما ان $|z_1|=|z_2|=1$ ن1... فان $L=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{\overline{z_1}z_2}}=\left(\dfrac{\overline{z_1+z_2}}{1+z_1z_2}\right)=\overline{L}$

4) صحيح لأن: $\arg z_1=\dfrac{\pi}{6}$ ولدينا $\arg z_1^n=n\arg z_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $n=3+6k$ ن1...........

5) صحيح لأن : $Z=2i+\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}e^{i\theta}=2i+e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}=2i+e^{i\theta'},\theta'\in\mathbb{R}$ ن1.........

التمرين الثاني: (4,5 نقطة)

$$\begin{cases}u_0=-3\\u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+3n-1\end{cases};n\in\mathbb{N}$$

1) حساب الحدود: $u_1=-3$, $u_2=0$, $u_3=5$ 0,5...............

2. أ .البرهان بالتراجع أنه من أجل $n\geq3$, $u_n\succ0$

ـ نتاكد من صحة الخاصية من أجل $n=3$: لدينا $u_3\succ0$ محققة 0,25.................

ـ نفرض صحة الخاصية من اجل n أي : $u_n\succ0$ 0,25.................

ـ نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1}\succ0$ 0,25...................

لدينا: و $\begin{cases}n\geq3\\u_n\succ0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}3n-1\geq8\\\dfrac{2}{3}u_n\succ0\end{cases}$ وبالتالي $\dfrac{2}{3}u_n+3n-1\geq8$ وعليه $u_{n+1}\succ0$.

ب.الاستنتاج: لدينا من أجل $n\geq3$, $u_n\succ0$

ومنه من أجل $n-1\geq3$, $u_{n-1}\succ0$ وبالتالي ينتج من أجل $n-1\geq3$, $\dfrac{2}{3}u_{n-1}\succ0$, وعليه من أجل $n\geq4$,

$\dfrac{2}{3}u_{n-1}+3n-4\succ3n-4$ إذا من أجل $n\geq4$, $u_n\succ3n-4$. 0,5...............

جـ ـ النهاية: بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(3n-4)=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=+\infty$. 0,25................

3.أ. إثبات أن (v_n) متتالية هندسية

$v_{n+1}=u_{n+1}-9n+21$ ومنه $v_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-6n+20$ وبالتالي $v_n=\dfrac{2}{3}(u_n-9n+30)=\dfrac{2}{3}v_n$ 0,5...........

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=27$ 0,25 +0,25 ....

ب ـ الاستنتاج: لدينا $u_n = v_n + 9n - 30$ و $v_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه ينتج

$$u_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30 = 9\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right) - 30$$ **0,5..+..0,25............**

4.أ حساب L_n

$$L_n = w_0 + w_1 + ...w_n$$

$$L_n = \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n)$$ 0,25..................

$$L_n = \frac{n+1}{2}(-60 + 9n)$$

ب. استنتاج S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + ...u_n$

$$S_n = 27.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n+1}{2}(-60+9n)$$

$$S_n = 81\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2}(-60+9n)$$ 0,5.....................

التمرين الثالث:(4.5ن)

1.أ) التمثيل الوسيطي لـ(Δ_1) و (Δ_2)

$$(\Delta_1)\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-3t \\ z = 5+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad (\Delta_2)\begin{cases} x = k \\ y = 2-3k \\ z = 3+2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$ 0,5+0,5 ....

ب)إثبات أن (Δ_1) و (Δ_2) من نفس المستوي

لدينا: $\vec{u}_1(1;-3;2)$, $\vec{u}_2(1;-3;2)$

بما أن $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ و $A \notin (\Delta_2)$ فان (Δ_1) و (Δ_2) متوازيان تماما وبالتالي فهما من نفس المستوي. 0,5........

ج) معادلة للمستوي (p) الذي يحوي (Δ_1) و (Δ_2)

$B(0,2,3)$ نقطة من (Δ_2) $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ وليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي لـ (p)

لدينا: و $\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{n}.\vec{u}_1 = 0 \end{cases}$ ومنه و $\begin{cases} -2a+3b-2c = 0 \\ a-3b+2c = 0 \end{cases}$ بالجمع نجد $a = 0$ و بالتعويض نجد $b = \frac{2}{3}c$

ومنه بأخذ $c = 3$ نجد $\vec{n}(0,2,3)$ 0,75...............

معادلة (p) هي: $2y + 3z + d = 0$ و لدينا $B \in (p)$ أي $4 + 9 + d = 0$ ومنه $d = -13$

اذا $(p): 2y + 3z - 13 = 0$ 0,25.................

2)أ) اثبات أن (Q_1) و (Q_2) متقاطعان وفق مستقيم

لدينا: $\vec{n}_1(1;2;-1)$ و $\vec{n}_2(3;1;2)$ شعاعي ناظم (Q_1) و (Q_2) على الترتيب

$\vec{n}_1 \neq k\,\vec{n}_2$ ومنه (Q_1) و (Q_2) متقاطعان وفق مستقيم (D) 0,25...............

التمثيل الوسيطي لـ (D) $\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ 3x+y+2z-1=0 \end{cases}$ ومنه نجد $t'\in\mathbb{R}$ $(D)\begin{cases} x=-\frac{3}{5}-t' \\ y=t' \\ z=\frac{7}{5}+t' \end{cases}$ 0,5..................

ب) مجموعة النقط (E_1)

$(x+2y-z+2)^2+(3x+y+2z-1)^2=0$ معناه $\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ 3x+y+2z-1=0 \end{cases}$ و

مجموعة النقط (E_1) هي المستقيم (D)

0,5...........

ج) مجموعة النقط (E_2) التي تحقق: $(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$

$(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$ معناه $(4x+3y+z+1)(-2x+y-3z+3)=0$

ومنه $\begin{cases} 4x+3y+z+1=0 \\ -2x+y-3z+3=0 \end{cases}$ و مجموعة النقط (E_2) هي اتحاد مستويين (p_1) و (p_2) معادلتهما على الترتيب

$4x+3y+z+1=0$ و $-2x+y-3z+3=0$ 0,5.........

د)التحقق من أن: $(E_1)\subset(E_2)$

لدينا: $(D)\subset(P_1)$ لأن : $4\left(-\frac{3}{5}-t'\right)+3t'+\frac{7}{5}+t'+1=-4t'+4t'-\frac{12}{5}+\frac{7}{5}+1=0$ 0,25 ....

ومنه $(E_1)\subset(E_2)$

التمرين الرابع:(6نقاط)

I)تغيرات الدالة g

$g'(x)=xe^x$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ 0,25+0,25+0,25................

جدول التغيرات 0,25...........

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	- | +
$g(x)$	0 ↘ -1 ↗ $+\infty$

2)من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq -1$

وعليه ينتج $g(x)+1\geq 0$ 0,25..................

II) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-1-\frac{1}{1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{x}}\right)=-\infty$ 0,25...................

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1-\frac{1}{1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{x}}\right)=+\infty$ 0,25....................

ب) $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left(x-1-\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}-1}\right)=-\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\left(x-1-\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}-1}\right)=+\infty$ 0,25+0,25 .....

2)لدينا من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=1+\frac{1+(x-1)e^x}{(e^x-x-1)^2}$ 0,25.........

3) لدينا من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}^*$ $f'(x)=1+\dfrac{1+g(x)}{(e^x-x-1)^2}\succ 0$ ومنه f متزايدة تماما 0,25

جدول التغيرات 0,25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

4)أ) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=0$

ومنه $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ 0,25

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ فان $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ ....0,25 .

ب) مبرهنة القيم المتوسطة

بما أن f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,2[$ و $f(1)=-1,21$ و $f(1)=0,6$ فانه يوجد α محصور بين 1 و2

و $f(\alpha)=0$ 0,25

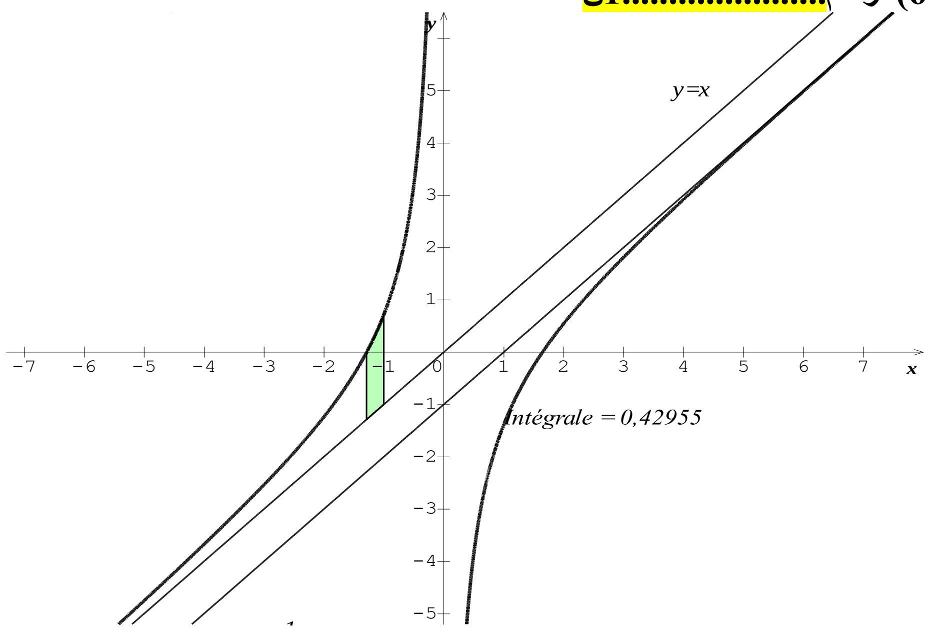
بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2,-1[$ و $f(-1)=0,7$ و $f(-2)=-1,13$ فانه يوجد β محصور

بين -1 و -2 و $f(\beta)=0$ 0,25

ج) الاستنتاج : لدينا $f(\beta)=0$ ومنه $\beta-1-\dfrac{\beta}{e^\beta-\beta-1}=0$ معناه $\beta-1=\dfrac{\beta}{e^\beta-\beta-1}$ وعليه $e^\beta-\beta-1=\dfrac{\beta}{\beta-1}$

.................................0,25

6)الرسم......................1ن



7) أ) $\displaystyle\int_{-1}^{\beta} 1+\frac{x}{e^x-x-1}dx=\int_{-1}^{\beta}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}dx=\ln\left|e^x-x-1\right|_{-1}^{\beta}=\ln\left(e^\beta-\beta-1\right)-\ln\left(e^{-1}\right)=1+\ln\frac{\beta}{\beta-1}$

0,5...

ب) حساب المساحة

$A=\displaystyle\int_{\beta}^{-1}(f(x)-x)dx=\int_{\beta}^{-1}-1-\frac{x}{e^x-x-1}dx=-1-\ln\frac{\beta}{\beta-1}=0,42\,u.a$ 0,25