امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

(دورة ماي 2016)

الشعبة : **رياضيات** المدة : 4 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة (E) ذات المجهول $(x\,;\,y)$ التالية : $414x-1170y=72$

أ- عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 1170 ، 414 و 72 .

ب- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;\,y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة (E) فإن : $y\equiv 1[23]$.

جـ- استنتج حلول المعادلة (E) .

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta 0\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ، ويكتب $\overline{\beta\alpha 200}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 . عيّن α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) أ- حلل العدد 2016 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسّم 2016 .

ب- نضع : $m=PPCM\ (a\,;\,b)$ وَ $d=PGCD(a\,;b)$.

عيّن الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^2-2d^2=2016$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C لاحقاتها على الترتيب : $z_A=5-4i$ ، $z_B=-1-4i$ و $z_C=-4-i$.

1) ليكن S التشابه المباشر المعرف كما يلي : $S(A)=B$ و $S(B)=C$.

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه S .

ب- عيّن النسبة ، الزاوية والمركز Ω للتشابه S .

2) التشابه المباشر S يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z حيث $z\neq 0$ ، النقطة M' ذات اللاحقة z' .

أ- تحقق أن : $z_\Omega-z'=i\,(z-z')$.

ب- استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

3) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1}=S(A_n)$.

نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=A_0A_1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=A_nA_{n+1}$.

أ- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- اكتب عبارة u_n بدلالة n .

جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

د- احسب بدلالة n نصف القطر r_n للدائرة المحيطة بالمثلث $\Omega A_n A_{n+1}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط : $A(4;2;2)$ ، $B(5;-2;3)$ ، $C(1;1;1)$ والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$

(P) المستوي الذي يمرّ بالنقطة A وعمودي على المستقيم (Δ) .

1) أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ب- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) وأن النقطة C لا تنتمي إلى المستوي (P) .

جـ- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

2) أ- عيّن إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) .

ب- بيّن أن النقط A ، B ، C و D ليست من نفس المستوي .

جـ- عيّن طبيعة المثلث ABD ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3) عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D ونصف قطر كل منهما 3 .

4) m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بالمعادلة : $mx - 2(m-1)y - z + m - 1 = 0$.

أثبت أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا (يطلب تعيين تمثيل وسيطي له) وذلك مهما يكن الوسيط الحقيقي m .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \left(ax^3 + bx\right) e^{-x^2+1}$

حيث : a و b عددان حقيقيان . (C_g) المنحني الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الطول $1cm$) .

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(1\,;\,2)$ تنتمي إلى المنحني (C_g) و (C_g) يقبل في النقطة A مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

II) f دالة عددية للمتغيّر الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \left(x^3 + x\right) e^{-x^2+1}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في نفس المعلم السابق .

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \left(-2x^4 + x^2 + 1\right) e^{-x^2+1}$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

3) أ- احسب $f(-x)+f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب- اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة O .

4) أ- ارسم (T) و (C_f) .

ب- ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$.

III) 1) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) استنتج ، بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=-1$ و $x=1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+4n-4$.

1) هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟ (برّر إجابتك) .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$.

أ- عيّن العددين الحقيقيين α و β لكي تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

3) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 .

ب- استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد S_{2016} على 13 .

جـ- عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد $2017^{1438}+2016^{1437}+2015^{1436}+2014^{1435}$ على 13 .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية : $z^2-2z+4=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

ولتكن (Γ) الدائرة التي مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .

أ- اكتب كلا من z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب- تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{2016}$ حقيقي .

جـ- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{n}$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

3) ليكن θ عددا حقيقيا ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi[$ ، M نقطة من الدائرة (Γ) لاحقتها $2e^{i\theta}$.

نسمي N النقطة من (Γ) حيث : $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

- اكتب z_N لاحقة النقطة N على الشكل الأسي .

4) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ- تحقق أن العبارة المركبة للدوران r هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب- نعتبر النقطتين F و K حيث : F منتصف القطعة $[BM]$ و K منتصف القطعة $[CN]$.

- بيّن أن : $r(F) = K$

جـ- استنتج طبيعة المثلث AFK .

5) أ- بيّن أن : $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

ب- استنتج z_M لاحقة النقطة M بحيث تكون المسافة AF أكبر ما يمكن .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل .

1) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \int_n^{n+1} e^{1-x}\,dx$.

المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ يساوي :

أ) $e - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$ ب) $e - \left(\frac{1}{e}\right)^{n}$ جـ) $(e-1)\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\left|(1+i)\,\overline{z} - 2\right| = 3\sqrt{2}$ هي :

أ) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $1+i$.

ب) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-i$.

جـ) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $-1-i$.

3) يعرّف الجدول المقابل قانون احتمال لمتغيّر عشوائي X لتجربة عشوائية :

x_i	1	2	3	4
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

الانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X يساوي :

أ) 1.25 ب) 2.5 جـ) 1.12

4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x\,;y\,;z)$ حيث

$$\begin{cases} x = -1 - \frac{3}{2}t + t' \\ y = 1 - t + \frac{2}{3}t' \\ z = 2 - 6t + 4t' \end{cases} \quad (t\,;t') \in \mathbb{R}^2$$ هي :

أ) المجموعة $\{A\}$ حيث $A(-1;1;2)$.

ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1;1;2)$ و $\vec{u}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};2\right)$ شعاع توجيه له .

جـ) المستوي الذي يشمل النقطة $A(-1;1;2)$ و $\vec{n}(2;3;-1)$ شعاع ناظمي له .

التمرين الرابع : (07 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2\ln x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث : $0.75<\alpha<0.76$.

2) استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $f(x)=1-x+\dfrac{2}{x}(1+\ln x)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2) أ - أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

3) أ- بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

ب- ارسم المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحني (C_f) .

4) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\dfrac{2}{x}(1+\ln x)=m$.

5) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

أ- احسب ، بوحدة المساحة ، $A(\lambda)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=1$ ، $x=\lambda$ و $y=-x+1$.

ب- عيّن قيمة λ بحيث يكون $A(\lambda)=\ln\lambda$.

III) a عدد حقيقي موجب تماما .

نعتبر الدالة f_a المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f_a(x)=1-x+\dfrac{a}{x}(1+\ln x)$.

نسمي (C_a) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن جميع المنحنيات (C_a) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .

2) نعتبر النقط : $A\left(-2;\dfrac{4}{a}\right)$ ، $B\left(1;\dfrac{2\ln a}{a}\right)$ ، $C(-2a\ ;2a-2)$ ولتكن G_a مرجح الجملة المثقلة :

$$\{(A\ ;1),\ (B\ ;2),\ (C\ ;-1)\}$$

أ- عيّن بدلالة a إحداثيي النقطة G_a .

ب- استنتج مجموعة النقط G_a عندما يمسح العدد a المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.