التمرين الأول ☺ : //

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{6}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{5}{8}$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$

$v_n=2u_n+\frac{5}{3}$

أ- أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم v_0 ، v_1 ، v_2

ب- برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها ثم أكتب v_n بدلالة n

ج - استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهايتها

د- أحسب $S=v_0+v_1+v_2+\dots\dots+v_n$ ثم استنتج $S'=u_0+u_1+u_2+\dots\dots+u_n$ و $\mathscr{P}_n=v_0\times v_1\times v_2\times\dots\dots\times v_n$

التمرين 2:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=e^3-1$ و لكل n من $\mathbb{N}$ $e^3u_{n+1}=1-e^3+u_n$

1) أ- أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n\succ 0$

ب- برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=2(1+u_n)$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها ثم أكتب v_n بدلالة n

ب- أحسب $S=v_0+v_1+v_2+\dots\dots+v_n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}S$

ج - عين قيمة n حتى يكون $S\geq 2*10^{-9}$

التمرين 3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$

1) أ- عين الأساس والحد الأول u_0 ثم أحسب u_n بدلالة n

ب- أحسب $S=u_0+u_1+u_2+\dots\dots+u_n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}S$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

ب- أحسب $S'=v_0+v_1+v_2+\dots\dots+v_n$ ج - عين قيمة n حتى يكون $S'^2=2^{30}$

التمرين 4:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=2$ و لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n-2u_{n+1}=2n+3$

1) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=2^{-n}-2n+1$

2) أ - برهن أنّه يوجد عدد طبيعي p تكون من أجله المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=u_n+p\,n-1$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أحسب بدلالة n $S_n=v_0+v_1+v_2+\dots\dots+v_n$

3) لتكن في المستوى النقط A ، B ، C ، G التي تحقق العلاقة $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- عين العدد الحقيقي λ حتى يكون G مرجح الجملة $\{(A;S_0),(B;S_1),(C;S_2)\}$

التمرين 5:

(u_n) متتالية هندسية متناقصة حيث: $u_1\times u_2\times u_3=64$ و $u_1^2+u_2^2+u_3^2=84$

1) أحسب u_2 ثم u_1 ، u_3 والأساس q للمتتالية

2) استنتج u_n بدلالة n ثم أدرس تقارب المتتالية (u_n)

3) أحسب $S=u_1+u_2+\dots\dots+u_n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}S$

أحسب بدلالة n $S'=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\dots\dots+\frac{1}{u_n}$

التمرين 6:

1) (u_n) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r

أ- عين u_2 ، r علما أنّ: $u_1+u_2+u_3=24$ و $u_1^2+u_2^2+u_3^2=210$

ب- استنتج u_n بدلالة n

ج- أحسب $S=u_0+u_1+u_2+.........\ .....+u_n$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=e^{14-3n}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب- أحسب $S'=v_0+v_1+v_2+.........\ .....+v_n$ ثم $\mathscr{P}_n=v_0\times v_1\times v_2\times.........\ ....\times v_n$

ج - استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S'$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{P}_n$

التمرين 7:

$(u_n)_{n\in N^*}$ متتالية حسابية أساسها r ، S_n هو مجموع n حد الأولى لهذه المتتالية حيث $S_n=n^2-\frac{1}{2}n$

1) عين حدها الأول u_1 و أساسها r

2) أكتب u_n بدلالة n

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=e^{u_n}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q

ب- أحسب $S'=v_0+v_1+v_2+.........\ .....+v_n$ ثم $\mathscr{P}_n=v_0\times v_1\times v_2\times.........\ ....\times v_n$

ج - استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S'$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{P}_n$

التمرين 8:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{3}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{1+2u_n}\right)$

1) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0\prec u_n\prec 1$

2) أ- تحقق أنّ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب- بين أنّ (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهايتها

ج - أحسب $S'=v_0+v_1+v_2+.........\ .....+v_n$ ثم $T_n=v_0+3v_1+9v_2+.........\ ....+3^n v_n$

التمرين 9:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=3$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $3u_{n+1}=u_n+4n+4$

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3

2) أ- برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\succ 0$

ب- استنتج أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $u_n\succ\frac{4}{3}n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-2n+1$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهايتها .ماذا تستنتج؟

ج - أحسب $S=v_0+v_1+v_2+.........\ .....+v_n$ ثم $T_n=v_0^2+v_1^2+v_3^2+.........\ ....+v_n^2$ و $S'=u_0+u_1+u_2+.........\ .....+u_n$

التمرين 10:

a ، b ، c أعداد حقيقية غير معدومة

1) بين أنه إذا كانت a ، b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن : $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$

2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276

التمرين 11:

1) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-x\ln(x)$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- أدرس تغيرات الدالة g.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ $u_{n+1}=\frac{e^n}{n^n}$

- أحسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرها و نهايتها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\ln(u_n)$

أ - برهن أنّ $v_n=n-n\ln(n)$

ب- باستعمال الدالة g، أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج أنّ (u_n) متناقصة

ج - استنتج من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $0\prec u_n\le e$ د- استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها

التمرين 12:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

أ - أحسب نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$ ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ - أنشئ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$، و (C_f) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ ثم أنشئ النقطتين M_1 و M_2 من المستقيم (Δ) اللتين فاصلتيهما u_1 و u_2 على الترتيب.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج - برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $e\le u_n$

د- بين أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها

التمرين 13:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=\frac{1}{2}$ و لكل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$

1) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $u_n\ge\sqrt{2}$

2) أ- بين أنّه من أجل كل $x\ge0$ فإن $f(x)\le x$

ب-من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

ج - بين أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

د- لتكن l نهاية المتتالية ، بين أنّ العدد الحقيقي l هو حل للمعادلة $f(x)=x$ و استنتج قيمة l

التمرين 14:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=e$ و لكل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$

1) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\succ1$

2) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بين أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n)$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهايتها .ماذا تستنتج؟

ج - أحسب $S=v_0+v_1+v_2+\dots\dots+v_{n-1}$ ثم $S'=v_0^2+v_1^2+v_3^2+\dots\dots+v_{n-1}^2$ $P_n=u_0\times u_1\times u_2\times\dots\dots\times u_{n-1}$

التمرين 15:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n=e^{\frac{n-2}{2}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) برهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

2) برهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية متزايدة ثم أدرس تقارب المتتالية (u_n)

التمرين 16:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$

1) أ -- أحسب بدقة u_1 و u_2 ثم أعط قيمة مقربة لـ u_3 ، u_4 بـ 10^{-5}

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيرو تقارب المتتالية (u_n)

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 3$

أ - تحقق أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

ب- برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-1 \le v_n \le 0$

ج - برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$ ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

د- بين أنّ المتتالية (v_n) متقاربة

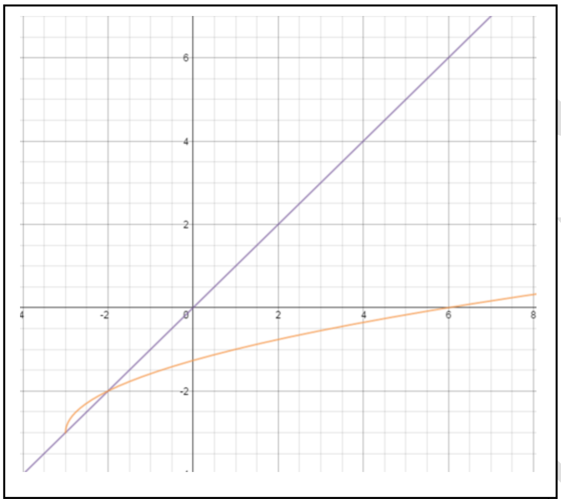
نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ حيث $l \in [-1;0]$ ثم تحقق أنّ $l = -\frac{1}{2}l^2$

عين قيمة l ثم تأكد من صحة تخمينك.

التمرين 17:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال بـ : $[-3;+\infty[$ بـ : $f(x) = -3 + \sqrt{x+3}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ كما هوميّن في الشكل المقابل



1) برهن أنّ الدالة f متزايدة تماما

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 6$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = -3 + \sqrt{u_n + 3}$

2) أ – مثل الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 بطريقة هندسية على محور الفواصل

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيرالمتتالية (u_n) و تقاربها

ج - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \ge -2$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \alpha \ln(u_n + 3)$ حيث $\alpha \in \Re^*$

أ –عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية غيرثابتة

ب- **بوضع** $\alpha = \frac{2}{3}$ ، برهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول

ج -أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهايتها $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟

4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n فإن $w_n = u_n + 3$ أكتب w_n بدلالة v_n ثم استنتج $P_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times .... \times w_n$

التمرين 18:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$

1) أ -- أحسب u_1 ، u_2 و u_3

ب- برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 4$ فإن $u_n \ge 0$

ج - استنتج أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 5$ فإن $u_n \ge n - 3$ د- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- استنتج أنّ من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

ج - أحسب $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

د- أحسب $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

التمرين 19:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر المستقيمين (Δ) و $(\mathscr{D})$ الذين معادلتهما ، $y=x$ و $y=\frac{1}{4}x+3$ على الترتيب

1) أ – مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 بطريقة هندسية على محور الفواصل

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

ج - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \prec 4$

د- من أجل كل عدد طبيعي n ، أدرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ هـ- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وسلوكها التقاربي

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-4$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟ ج-عين أصغر عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ ، يحقق $|u_n-4|\prec 10^{-4}$

د - أحسب $S_n=v_0+v_1+v_2+\text{.......... .....}+v_n$ ثم أحسب $S'_n=u_0+u_1+u_2+\text{.......... .....}+u_n$

هـ-أدرس سلوك كل من المتتاليتين (S'_n) و $\left(\frac{S'_n}{n}\right)_{n\succ 1}$

التمرين 20:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{1}{2}$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر المستقيمين (Δ) و $(\mathscr{D})$ اللذين معادلتهما ، $y=x$ و $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ على الترتيب

1) أ – مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 بطريقة هندسية على محور الفواصل

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها ج - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\succ -\frac{3}{2}$

د- من أجل كل عدد طبيعي n ، أدرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ هـ- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وسلوكها التقاربي

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln\left(u_n+\frac{3}{2}\right)$ أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟

ج- أحسب $S_n=v_0+v_1+v_2+\text{.......... .....}+v_n$ - د - أحسب $\Pi_n=\left(u_0+\frac{3}{2}\right)\times\left(u_1+\frac{3}{2}\right)\times\left(u_2+\frac{3}{2}\right)\times\text{.......... .....}\times\left(u_n+\frac{3}{2}\right)$

التمرين 21:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=\alpha$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+4}$

أ –عين العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

ب- **بوضع** $\alpha=0$ ، برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0\prec u_n\prec 1$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟ ج- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)

د - أحسب $S_n=v_0+v_1+v_2+\text{.......... .....}+v_n$ ثم $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+\text{.......... .....}+v_n^2$ هـ - أحسب $\Pi_n=v_0\times v_1\times v_2\times\text{.....}\times v_n$

التمرين 22:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1=1$ ولكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1}=u_n+2n+1$ ، برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $u_n=n^2$

التمرين 23: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=u_n+2n+3$

أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\succ n^2$ ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=(n+1)^2$

التمرين 24:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

$f'=f^{(1)}$ ، $f''=f^{(2)}$ ، $f'''=f^{(3)}$ ، ....، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة لـ f

- أحسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$

2) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $f^{(n)}=2^n(1-n-2x)e^{2x}$

3) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، المنحنى الممثل للدالة $f^{(n)}$ يقبل مماسا أفقيا في نقطة $M_n(x_n,y_n)$

أ - أحسب x_n و y_n وتحقق أنّ النقط $M_n(x_n,y_n)$ تقع على منحى (Γ) معادلته $y=\dfrac{e^{2x}}{4^x}$

ب- تحقق أنّ (x_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

ج- تحقق أنّ المتتالية (y_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

التمرين 25:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ ولكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}(u_n+2v_n)$ و $v_0=2$ ولكل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{1}{5}(u_n+4v_n)$

1) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n فإن $w_n=u_n-v_n$

أ- برهن أنّ المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أكتب w_n بدلالة n

ب- استنتج أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية l

ج- عبر عن $u_{n+1}-u_n$ و $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n

د- أدرس اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n) استنتج أنّ (u_n) و (v_n) متجاورتان

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n=3u_n+10v_n$ - برهن أنّ المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج النهاية l

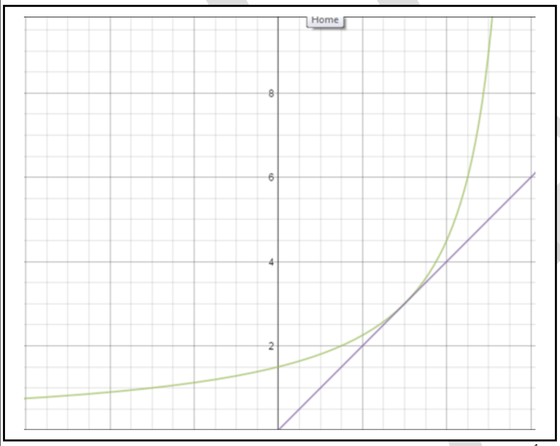
التمرين 26:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$

نعرف المتتالية العددية (u_n) بـ : $u_0=-3$ ولكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، يعطى المستقيم (Δ) $y=x$

والمنحنى البياني للدالة f كما هومبيّن في الشكل المقابل



1) أ – مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 بطريقة هندسية على محور الفواصل

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

ج - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \prec 3$

د- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وسلوكها التقاربي

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.ماذا تستنتج؟ ج- أحسب $S_n=v_0+v_1+v_2+.........\ .....+v_n$

د - أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين 27:

نعرف المتتالية العددية (u_n) بـ : $2u_{n+1}=u_n+2000$ ولكل n من $\mathbb{N}$ ، عين العدد الحقيقي u_0 حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

نفرض أنّ المتتالية (u_n) غيرثابتة و نعرف المتتالية العددية (v_n) بـ : $v_n=\dfrac{1}{2}u_n-\alpha$

عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية حيث $\alpha\in\Re$

نفرض أنّ $u_0=4000$ ، $\alpha=1000$

أ - أكتب v_n بدلالة n ، برهن أنّ المتتالية (v_n) متقاربة ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.ماذا تستنتج؟

ب - أحسب $S_n=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$

التمرين 28:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+2i$ ، $z_B=5+2i$ ، $z_C=1+4i$ و $z_D=2-i$

1- عين التشابه S الذي ويحول النقطة A إلى النقطة C ويحول النقطة D إلى النقطة B محددا عناصره المميزة

2- نعتبر النقطة M_0 ذات اللاحقة $3i$ نضع من أجل كل عدد طبيعي n $M_{n+1}=S\left(M_n\right)$ و $u_n=\left\|\overrightarrow{\omega M_n}\right\|$

- أحسب $\left\|\overrightarrow{\omega M_n}\right\|$ بدلالة n. ما هي طبيعة المتتالية $\left(u_n\right)$ ؟

-أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ماذا تستنتج؟

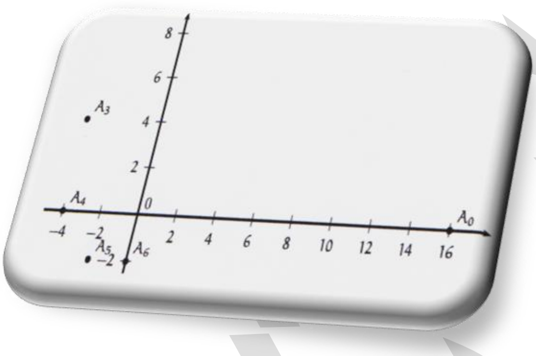
لتمرين 29:

من أجل كل عدد طبيعي n ،نعرف الأعداد المركبة بـ : $\begin{cases} z_0=16 \\ z_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}z_n \end{cases}$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$، نعتبر النقط A_n ذات اللواحق z_n

لتكن r_n طويلة العدد المركب z_n **1)** أ- أحسب z_1 ، z_2 و z_3 **ب-** عين بيانيا النقطتين A_1 و A_2 في الشكل أدناه ج- أكتب على الشكل المثلثي $L=\dfrac{1+i}{2}$

د- برهن أنّ المثلث OA_0A_1 قائم في A_1 ومتساوي الساقين



2) أ- برهن أنّ المتتالية $\left(r_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ب- هل المتتالية $\left(r_n\right)$ متقاربة؟ فسّر هندسيا النتيجة السابقة

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نرمز بالرمز l_n إلى طول الخط المنكسر

$A_0A_1A_2....A_{n-1}A_n$ وعليه $l_n=A_0A_1+A_1A_2+A_2A_3+....+A_{n-1}A_n$

- برهن أنّ $A_nA_{n+1}=r_{n+1}$ عبرعن l_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n$

التمرين 30:

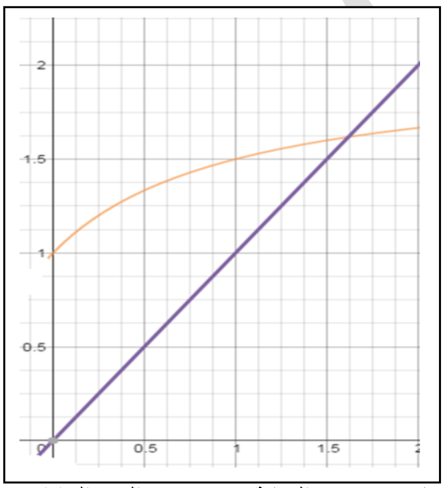
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ : $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1) أ - أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;2]$

ب- برهن أنّ إذا كان $x\in[0;2]$ فإن $f\left(x\right)\in[0;2]$

2) نعتبر المتتاليتين $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)$ المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ ولكل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ و $v_0=2$ ولكل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=f\left(v_n\right)$

المنحنى المقابل هو منحنى للدالة f في المجال $[0;2]$ كما هو مبيّن في الشكل أدناه



أ- مثل الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 بطريقة هندسية على محور الفواصل لكل من $\left(u_n\right)$ ، $\left(v_n\right)$

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيرالمتتالية كل من $\left(u_n\right)$،$\left(v_n\right)$ و تقاربهما

ج - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1\le u_n\le 2$ و $u_n\le u_{n+1}$

وكذلك $1\le v_n\le 2$ و $v_{n+1}\le v_n$

د- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية $\left(u_n\right)$ وسلوكها التقاربي

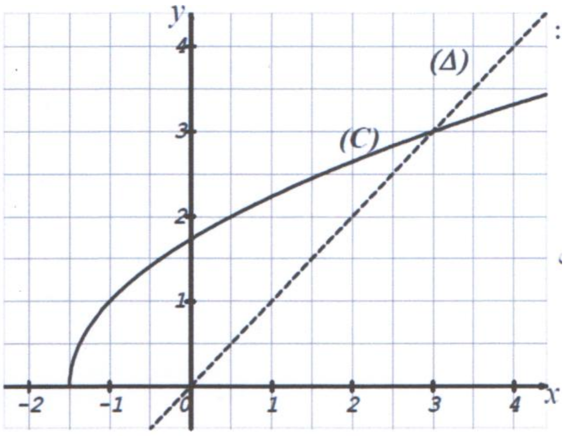
ه- برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{\left(v_n+1\right)\left(u_n+1\right)}$

و- استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}\left(v_n-u_n\right)$

ي- برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\le\left(1/4\right)^n$ ثم برهن أنّ $\left(u_n\right)$،$\left(v_n\right)$ متقاربان نحو نفس النهاية α وعين العدد الحقيقي α

التمرين 31:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$:



1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال بـ $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+3}$

أ – مثل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 بطريقة هندسية على محور الفواصل

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \prec u_n \prec 3$

3) أ - أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بين أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

ب- أحسب نهايتها $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 32:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=2$ و لكل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+5}{2u_n}$

1) برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \prec u_n$

2) أحسب نهاية (u_n): $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{5}}{u_n+\sqrt{5}}$

أ - برهن أنّ : $v_{n+1}=v_n^2$

ب- ضع تخمينا حول عبارة v_n بدلالة n

ج - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، صحة تخمينك.

4) بيّن أنّ $v_0=-\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}$ و $|v_0| \prec \dfrac{1}{16}$

5) استنتج نهاية (v_n): $\lim_{n\to+\infty} v_n$ ثم $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 33:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[2;9]$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x+9}{2x}$

1) أ - أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[2;9]$

ب- برهن أنّ إذا كان $[2;9]$ فإن $f(x)\in[2;9]$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=2$ ولكل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2\le u_n\le 9$ **ب-** استنتج من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_{n+1}-3|\le\dfrac{3}{4}|u_n-3|$

ج - برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_n-3|\le(3/4)^n$ د- استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

3) عين قيمة n حتى يكون $|u_n-3|\le 10^{-3}$

التمرين 34:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$

1) أ- برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \succ 0$

ب- برهن أنّ (u_n) متناقصة

ج - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها

2) نعتبر المتتالية $(S_n)_{n\in N}$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=\sum_{p=0}^{n}u_p$

أ - برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1}=e^{-S_n}$ استنتج أنّ $\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$

التمرين 35:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر المستقيمين (Δ) و $(\mathscr{D})$ اللذين معادلتهما ، $y=x$ و $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ على الترتيب

1) أ – مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 بطريقة هندسية على محور الفواصل

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

ج - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1\le u_n\le 4$

د- من أجل كل عدد طبيعي n ، أدرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

ه- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وسلوكها التقاربي

2) نعرف المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل n من $\mathbb{N}$ ، بـ : $v_n=u_n+\alpha$ حيث $\alpha\in\mathfrak{R}^*$

عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

نضع : $\alpha=-4$

أ - أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ب - أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.ماذا تستنتج؟

ج - $S=v_0+v_1+v_2+.........\ .....+v_n$ ثم $T_n=v_0^2+v_1^2+v_3^2+.........\ ....+v_n^2$ و $S'=u_0+u_1+u_2+.........\ .....+u_n$

التمرين 36:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $u_1+u_3=30e$ و $\ln u_2-\ln u_4=-2\ln 3$

1) أ- عين الأساس والحد الأول u_1 ثم أحسب u_n بدلالة n

ب- أحسب $S=u_0+u_1+u_2+.........\ .....+u_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=\ln u_{n+2}+\ln u_{n+1}$

أ - برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

ب- أحسب $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_n$

ج - عين قيمة n حتى يكون $S'=12+48\ln 3$

التمرين 37:

نعرف المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=\alpha$ و ولكل n من $\mathbb{N}$ $2u_{n+1}=3u_n^2$ حيث $\alpha\in\mathfrak{R}_+^*$

1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

2) نفرض أنّ، $\alpha\neq\frac{2}{3}$ و نعرف المتتالية العددية (v_n) بـ : $v_n=\ln u_n+\ln\frac{3}{2}$

أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n و α ج - برهن أنّ $u_n=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{2^n}$

د- عين العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متقاربة

3) نضع : $\alpha=\frac{1}{3}$ - أحسب $S=v_0+v_1+v_2+.........\ .....+v_n$ ثم $T_n=v_0^2+v_1^2+v_3^2+.........\ ....+v_n^2$

التمرين 38:

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $I_n=\int_n^{n+1}2e^{-2x}dx$

1) أ- أحسب I_0

ب- أكتب I_n بدلالة n

2) أ- برهن أنّ المتتالية (I_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

التمرين 39:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = e^{-\frac{1}{3}+2n}$

أ - برهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب- أحسب $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ثم و $T = u_0^2 + u_1^2 + u_3^2 + ... + u_n^2$

ج - عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S = \dfrac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$

أ - ماهي طبيعة المتتالية (v_n)؟

ب- أحسب $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

ج - عين العدد الطبيعي n علما أنّ: $S' = \dfrac{160}{3}$

التمرين40:

لتكن الأعداد الحقيقية الموجبة تماما b, a و c حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

أ - بيّن أنّ الأعداد $\ln b, \ln a$ و $\ln c$ حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

ب- أحسب الأعداد الحقيقية b, a و c علما أنّ: $\begin{cases} \ln(abc) = 21 \\ (\ln a)(\ln b)(\ln c) = -105 \end{cases}$

التمرين41:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N^*}$ المعرفة بـ : $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

أ - بيّن أنّ $u_1 + u_2 + u_3 = \ln 4$

ب- أحسب $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S$

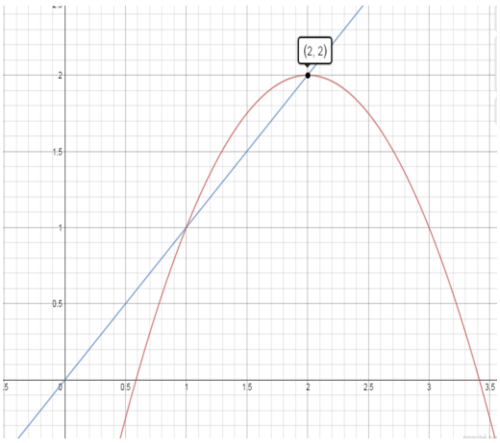
التمرين 42:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال بـ : $[0;3]$ بـ : $f(x) = 2-(x-2)^2$ (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \dfrac{5}{4}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ – مثل على محور الفواصل (**على الوثيقة المرفقة**) الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 بطريقة هندسية مبررا خطوط التمثيل.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها



2) أ - برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \prec u_n \prec 2$

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وسلوكها التقاربي

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(2-u_n)$

أ – برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n و u_n بدلالة n ثم أحسب. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ماذا تستنتج؟

ج - أحسب $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ثم استنتج $P_n = (2-u_0)\times(2-u_1)\times(2-u_2)\times......... .....\times(2-u_n)$ د- برهن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$

بالتوفيق للجميــــع في شهادة البكالوريا med_neg@yahoo.fr