# الأعداد المركبة

## تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

**التمرين 01:** عين: $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ في كل حالة من الحالات التالية : $z=3+2i$ ؛ $z=-1+3i$ ؛ $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ $z=i-3\sqrt{2}$ ؛ $z=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ؛ $z=-i\sqrt{3}$ .

**التمرين 02:** من بين الأعداد المركبة التالية ، عيّن الأعداد المكتوبة على شكلها الجبري .

$z_1=3+2i+\sqrt{2}$ ؛ $z_2=2i+\sqrt{2}+5$ ؛ $z_3=\left(3+\sqrt{3}\right)+2i\sqrt{3}$ ؛ $z_1=\frac{3}{5}+\sqrt{2}i+i\sqrt{3}$ .

**التمرين 03:** $z$ عدد مركب حيث :

$$z=\left(x^2+x\right)+i\left(x^2+y-1\right)$$

عين العددين الحقيقيين $x$ و $y$ حتى يكون $z$ معدوما .

**التمرين 04:** $A$ نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب $a=-1+2i$ ؛ عيّن العدد المركب $z$ بحيث تكون صورته $M$ نظيرة النقطة $A$ بالنسبة إلى :

ـ مبدأ المعلم ؛ ـ حامل محور الفواصل ؛

ـ حامل محور التراتيب ؛ ـ المنصف الأول .

1) بدون إجراء الحساب برر أن $z_1+z_2$ هو عدد حقيقي و $z_1-z_2$ هو عدد تخيلي صرف .

2) أحسب $z_1+z_2$ و $z_1-z_2$ ثم استنتج الشكل الجبري للعدد المركب $z_1$ .

**التمرين 05:** حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

أ) $(1-i)z=3+i$ . ب) $3z-2+i=(1+i)z-1-2i$ .

جـ) $(3-4i)z^2=iz$ . د) $\frac{z+1}{z-1}=2i$ . هـ) $2\bar{z}=-1+i$ .

ع) $(2z+1-i)\left(i\bar{z}+i-2\right)=0$ . ي) $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=i$ .

**التمرين 06:** أكتب بدلالة $\bar{z}$ ، مرافق الأعداد المركبة $Z$ التالية: أ) $Z=2+3iz$ . ب) $Z=(2+iz)(1+3z)$ .

جـ) $Z=\frac{2+iz}{z+2}$ . د) $Z=z^3-iz^2+3z-3i$ .

**التمرين 07:** $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ أربع نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $-2+i$ ، $-1+4i$ ، $3+2i$ و $2-i$ .

برهن أن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

$z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ هي على الترتيب ، لواحق النقط $A\left(\sqrt{3};1\right)$ ، $B\left(-\sqrt{3};-1\right)$ و $C(0;2)$ عين لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

**التمرين 08:** نعتبر العدد المركب $z=3+4i$

أ ـ أحسب $z\times\bar{z}$ .

ب ـ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z'=\frac{i}{z}$ .

**التمرين 09:** نعتبر العدد المركب $z=2+i$

أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z'$ المعرف في كل من الحالات المقترحة التالية: 1) $z'=\frac{1}{z}+\frac{i}{\bar{z}}$ .

2) $z'=\frac{1+2i}{z}-\frac{3-i}{\bar{z}}$ . 3) $z'=\frac{1+3i}{z}\times\frac{3-2i}{\bar{z}}$

4) $z_1=\frac{1}{i}$ ؛ 5) $z_2=\frac{1}{1-i}$ ؛ 6) $z_3=\frac{1}{3+i\sqrt{2}}$ ؛

7) $z_4=\frac{1}{3i-5}$ . 8) $z_1=\frac{4-6i}{3+2i}$ ؛ 9) $z_2=\frac{5+15i}{1+2i}$

10) $z_3=\frac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ؛ 11) $z_4=\frac{1+i}{1-i}$ .

**التمرين 10:** أكتب مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري. $z_1=(1-i)(2+i)$ ؛ $z_2=(1+2i)^3$ ؛ $z_3=\frac{3-i}{1+i}$

$z_4=\left(\frac{1+3i}{2-i}\right)^4$ .

**التمرين 11:** أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $\theta$ ،

$$\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta \, .$$

**التمرين 12:** حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

أ) $3z-5+2i=0$ . ب) $\frac{z-3}{2+5i}-3+i=0$ .

جـ) $\frac{iz-3}{z-1}=2+i$ .

**التمرين 13:** $A$ ، $B$ و $C$ النقط ذات اللواحق $3+2i$ ، $-1+3i$ و $-2-2i$ على الترتيب .

أ ـ عين لاحقة النقطة $I$ منتصف القطعة $[AB]$ .

ب ـ عين لاحقة المرجح $G$ للجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-3);(C,5)\}$ .

**التمرين 14:** $A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $2+i$ ، $2-i$ و $i$ .

عين لاحقة النقطة $D$ حتى تكون النقطة $A$ مركز ثقل المثلث $BCD$

**التمرين 15:** نضع $z_1=5-2i$ ، $z_2=2+4i$ ، $z_3=-3+3i$ .

1) أحسب $\mathrm{Re}\left(z_1+z_2+z_3\right)$ ، $\mathrm{Re}\left(2z_1-z_2+\frac{1}{2}z_3\right)$ و

## الأعداد المركبة — تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

**التمرين16:** من أجل كل عدد مركب $z$ ، نضع : $f(z)=z^2-z$ حيث $z=x+yi$ مع $x$ و $y$ عددين حقيقيين . برهن أنّ : $\text{Re}[f(z)]=x^2-y^2-x$ و $\text{Im}[f(z)]=y(2x-1)$ .

**التمرين17:** $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ و $z_D$ هي على الترتيب ، لواحق النقط $A(\sqrt{3};1)$ ، $B(-\sqrt{3};-1)$ ، $C(0;2)$ و $D(\sqrt{3};3)$ .

1) أحسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$ . ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

2) ما هي طبيعة الرباعي $AOCD$ ؟

**التمرين18:** نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ ذات اللواحق $z_1=2$ ، $z_2=-i$ و $z_3=1+2i$ .

1) أحسب $|z_2-z_1|$ ، $|z_3-z_1|$ و $|z_3-z_2|$ .

2) استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**التمرين19:** نعتبر الأعداد المركبة $z_1=5-2i$ ، $z_2=2+4i$ ، و $z_3=-3+3i$ .

أحسب : $|z_1|$ ، $|z_2|$ ، $|z_1+z_2+z_3|$ و $|z_1z_2z_3|$.

**التمرين20:** في كل حالة من الحالات التالية ، عيّن مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة العدد المركب $z$ الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ ) $|z|=2$ ب ) $|-3z|=\sqrt{2}$ جـ) $|z|^2-2\text{Re}(z)=0$ .

**التمرين21:** عيّن ثمّ مثّل مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة المركب $z$ الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ ـ $|z+1+2i|=|z-4|$ . ب ـ $|z-3i|=2$ .

جـ ـ $|2z-i|=2$

**التمرين22:** المطلوب كتابة الأعداد المركبة المقترحة على شكلها المثلّثي

$z_1=(2+2i)(\sqrt{3}-i)$ ، $z_2=\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$ ،

$z_3=\dfrac{3i}{2+2i\sqrt{3}}$ ، $z_4=\dfrac{\sqrt{6}}{1+i}$ .

**التمرين23:** نعتبر العدد المركب

$Z=\dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$ .

1) أكتب العدد المركب $Z$ على الشكل الجبري

2) أكتب العدد المركب $Z$ على الشكل المثلثي .

. $\text{Re}[z_2(z_1+z_3)]$

2) أحسب $\text{Im}(z_1-3iz_3)$ ، $\text{Im}[z_2-z_1z_3]$ و $\text{Im}(z_1z_2z_3)$ .

( أحسب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$ .

3) عين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة العدد المركب $z$ حيث $|\alpha z|=6$ .

**التمرين24:** $z$ عدد مركب غير معدوم .

أ ـ باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$ .

استنتج أنّه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم $n$ ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$ .

**التمرين25:** $z$ عدد مركب غير معدوم طويلته $r$ و $\theta$ عمدة له .

جد الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :

$-z$ ؛ $\bar{z}$ ؛ $\dfrac{1}{z}$ ؛ $z^3$ ؛ $\dfrac{1}{z^n}$ مع $n\in\mathbb{N}^*$ .

$z$ عدد مركب غير معدوم طويلته $r$ و $\theta$ عمدة له .

جد الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة التالية : $\dfrac{z}{4}$ ؛ $\dfrac{-7}{z}$ ؛ $2iz$

؛ $(iz)^5$ ؛ $iz^5$ ؛ $\left(\dfrac{iz}{r}\right)^n$ مع $n\in\mathbb{N}^*$ .

**التمرين26:** في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب $z$ .

أ ـ $z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ . ب ـ $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ .

جـ ـ $z=\sqrt{5}\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$ . د ـ $z=\sin\dfrac{\pi}{6}-i\cos\dfrac{\pi}{6}$ .

**التمرين27:** في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب $z$ الذي يحقق المساواة المقترحة

أ ـ $Arg(iz)=\dfrac{3\pi}{2}$ . ب ـ $Arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ .

جـ ـ $Arg(z)=Arg(\bar{z})$

$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $\dfrac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $e^{i\pi}$ و $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ .

**التمرين28:** أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\dfrac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ .

**التمرين29:** أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_3=\dfrac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$ .

## الأعداد المركبة — تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

3) أكتب على الشكل المثلّثي الأعداد: $\frac{1}{Z}$ ، $Z^{2009}$ و $\overline{Z}$.

**التمرين30:** $Z$ عدد مركب حيث

$$Z=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2(1-i)}$$

أحسب كلا من الأعداد المركبة التالية : $Z^{6}$ ؛ $Z^{12}$ و $Z^{2010}$
تعطى النتائج على الشكل الجبري .

**التمرين31:** حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

1) $2z^2-6z+5=0$ . 2) $z^2-5z+9=0$.

3) $z^2+z+1=0$ . 4) $z^2-2z+3=0$.

5) $z^2=z+1$ . 6) $z^2+3=0$ .

7) $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$ .

8) $z^2-2(1+\sqrt{2})z+2(\sqrt{2}+2)=0$.

9) $z^2-2(\cos\theta)z+1=0$ حيث $\theta$ عدد حقيقي

10) $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ حيث $\theta$ عدد حقيقي .

**التمرين32:** حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة ذات المجهول $(z_1;z_2)$ التالية :

$$\begin{cases} z_1z_2=5 \\ z_1+z_2=-2 \end{cases}$$

جد العددين المركبين $\alpha$ و $\beta$ حيث المعادلة $z^2+\alpha z+\beta=0$ تقبل الحلين $1+2i$ و $3-5i$ .

**التمرين33:** حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلتين ذات المجهول $z$ التاليتين: أ- $z^4+3z^2+2=0$.

ب- $z^4-32z^2-144=0$.

**التمرين34:** 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ . عين الطويلة وعمدة لكل من الحلين لهذه المعادلة .

2) استنتج الحلين في $\mathbb{C}$ للمعادلة $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$ .

**التمرين35:** $T$ التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة $M$ ذات الإحداثيتين $(x;y)$، النقطة $M'$ ذات الإحداثيتين $(x';y')$ حيث

$$\begin{cases} x'=-3x+4y-12 \\ y'=-\frac{3}{2}x+2y-4 \end{cases}$$

1) عيّن مجموعة النقط صامدة بالتحويل $T$ .

2) أثبت أنّه من أجل كل نقطة $M$ من المستوي ، صورتها $M'$ تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب تعيينه .

**التمرين36:** عين شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=-e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ $z_2=-3e^{i\frac{\pi}{8}}$ ؛ $z_3=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}e^{i\pi}$ .

**التمرين37:** تعطى الأعداد المركبة : $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

عين شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية . $z_1z_2$ ؛ $z_1z_2z_3$ ؛ $\overline{z_3}z_1z_2$ ؛ $z_1^3$ ؛ $z_3^4$ ؛ $\frac{z_1}{z_2}$ ؛ $\frac{z_2}{z_3}$ ؛ $\frac{1}{z_3}$.

**التمرين38:** أعط شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=(2\sqrt{3}+6i)e^{i\frac{\pi}{2}}$ ؛ $z_2=(\sqrt{3}+i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ؛

$z_3=(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_4=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ .

**التمرين39:** في كل حالة من الحالات التالية أكتب العدد المركب $z$ على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الجبري لكل من $\overline{z}$ و $\frac{1}{z}$ .

أ- $z=\frac{6}{1+i}$ . ب- $z=(1+i\sqrt{3})^4$ .

جـ- $z=3ie^{i\frac{\pi}{3}}$ . د- $z=(2\sqrt{3}+2i)^5e^{-i\frac{\pi}{3}}$

**التمرين40:** $T$ التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة $M$ ذات الإحداثيتين $(x;y)$، النقطة $M'$ ذات الإحداثيتين $(x';y')$ حيث :

$$\begin{cases} x'=-3x+2y+1 \\ y'=-5x-3y \end{cases}$$

1) عيّن إحداثيتي صورة النقطة $A(-1;1)$ .

2) عيّن إحداثيتي سابقة النقطة $B(-2;3)$ .

3) عيّن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل $T$

**التمرين41:** في المستوي الموجّه ، $AMN$ هو مثلث متساوي الساقين وقائم في $A$ حيث $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})=\frac{\pi}{2}$ .

$N_1$ مرجّح النقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(N,-1)$ .

$B$ نقطة متمايزة عن النقط $A$ ، $M$ ، $N$ و $N_1$ .

$\mathcal{T}$ صورة المثلث $AMN_1$ بالدوران ذي المركز $B$ والزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

أنجز شكلا . وبرهن أنّ المثلثين $AMN$ و $\mathcal{T}$ متقايسان .

**التمرين42:** $(\Delta)$ مستقيم ثابت . $A$ نقطة ثابتة لا تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ . من أجل كل نقطة $M$ من $(\Delta)$، نرسم النقطة $N$ منتصف القطعة $[AM]$ .

## الأعداد المركبة

## تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

3) أثبت أنّه إذا كانت النقطة $M$ غير صامدة و $M'$ صورتها بالتحويل $T$ فإنّ منتصف القطعة $[MM']$ ينتمي إلى مستقيم ثابت .

4) استنتج طريقة هندسية لإنشاء النقطة $M'$ .

**التمرين43:** $ABC$ مثلث . $E$ ، $F$ و $G$ صور $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ .

$I$ ، $J$ و $K$ صور $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ .

أثبت أن $C$ ي منتصف القطعة $[IG]$ .

**التمرين44:** $\Delta$ و $d$ مستقيمان من المستوي معادلتاهما على الترتيب $3x+2y-5=0$ و $3x-2y+1=0$ .

أكتب معادلة لكل من صورتي المستقيمين $\Delta$ و $d$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(2;-3)$ .

**التمرين45:** $ABC$ مثلث في المستوي الموجّه حيث $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{3}$

$A'$ و $C'$ صورتا على الترتيب للنقطتين $A$ و $C$ بالدوران $r$ ذي المركز $B$ والزاوية $-\frac{\pi}{4}$ .

$A''$ و $C''$ منتصفا القطعتين $[A'B]$ و $[BC']$ على الترتيب

أ ـ أنجز شكلا .

ب ـ بيّن أنّ المثلثين $ABC$ و $A''BC''$ متشابهان

**التمرين46:** أكتب العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1;2)$

ت : أكتب العبارة المركبة للتحاكي ذي المركز $O$ مبدأ المعلم ونسبته 3 .

**التمرين47:** $\Omega$ نقطة لاحقتها العدد المركب $\omega=1-i$ .

عين العبارة المركبة للتحكي ذي النسبة $-\frac{1}{2}$ والمركز $\Omega$.

أكتب عبارة مركبة للدوران الذي مركزه $O$ مبدأ المعلم وزاويته $\frac{\pi}{6}$ .

**التمرين48:** $t$تحويل نقطي في المستوي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$ .

في كل من الحالات المقترحة أدناه ، عيّن طبيعة التحويل $t$ مع ذكر عناصره المميّزة .

أ ـ $\alpha=1$ و $\beta=3+i$ . ب ـ $\alpha=i$ و $\beta=1-i$ .

ما هو المحل الهندسي للنقطة $N$ لما تتغير النقطة $M$ على المستقيم $(\Delta)$ ؟

**التمرين49:** $T$ التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة $M$ ذات الإحداثيتين $(x;y)$، النقطة $M'$ ذات الإحداثيتين $(x';y')$ .

في كل حالة من الحالتين التاليتين ، عين طبيعة التحويل $T$ مبيّنا عناصره المميّزة :

أ ـ $\begin{cases}x'=x-4\\y'=y+2\end{cases}$ ؛ ب ـ $\begin{cases}x'=-2x-3\\y'=-2y+4\end{cases}$ .

**التمرين50:** $t$ هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات الإحداثيتين $(x,y)$ ، النقطة $M'$ ذات الإحداثيتين $(x',y')$ حيث : $x'=1-y$ و $y'=x-2$ .

نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$.

أ ـ أكتب $z'$ بدلالة $z$ .

ب ـ ما هي طبيعة التحول $t$ مبيّنا عناصره المميّزة ؟

**التمرين51:** $t$ هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات الإحداثيتين $(x,y)$ ، النقطة $M'$ ذات الإحداثيتين $(x',y')$ حيث : $x'=2x-\frac{3}{2}$ و $y'=2y+\frac{1}{2}$ .

أ ـ ما هي طبيعة التحويل $t$ ؟

ب ـ أكتب العبارة المكّبة للتحويل $t$ .

**التمرين52:** حل في المجموعة $\mathbb{C}^2$ الجمل ذات المجهول $(z;z')$ التالية : أ ـ $\begin{cases}3z+z'=2-5i\\z-z'=-2+i\end{cases}$ . ب ـ $\begin{cases}3z+z'=5+2i\\z+z'=1-2i\end{cases}$ .

جـ ـ $\begin{cases}2iz+z'=2i\\3z-iz'=1\end{cases}$ .

**التمرين53:**

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}=1$ .

برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

**التمرين54:** $z=x+iy$ عدد مركب مع $x$ و $y$ عددين حقيقيين .

نضع $\alpha=z-2\bar{z}+2+3i$ .

1) أحسب بدلالة $x$ و $y$ الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $\alpha$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\alpha=0$ , ذات المجهول $z$ .

**التمرين55:** $z=x+iy$ عدد مركب مع $x$ و $y$ عددين حقيقيين .

نضع $\alpha=iz+\bar{z}-3-2i$ .

## الأعداد المركبة

## تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

جـ - $\alpha=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ و $\beta=0$ . د- $\alpha=\frac{5}{2}$ و $\beta=\frac{2i}{5}$ .

**التمرين 56:** $A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $a=3+i$ ، $b=-2+3i$ و $8-i$ .

أ - عيّن نسبة التحاكي $h$ ذي المركز $C$ والذي يحوّل $A$ إلى $B$.

ب - نقول عن مستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل ، أنه صامدا إجماليا .

برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة $C$ ومعامل توجيهه 2 هو صامد إجمالي ، ثم أكتب معادلة له .

**التمرين 57:** $A$ و $B$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=\frac{1}{2}(1+i)$ و $b=\frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم $O$ ويحوّل $A$ إلى $B$.

) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $i^{4n+1}=i$ واستنتج $i^{2009}$

**التمرين 58:** في كل حالة من الحالات التالية , مثل مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة العدد المركب $z$ الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ - $\text{Re}(z)=-3$. ب - $\text{Im}(z)=2$ . جـ - $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$. د - $[\text{Re}(z+1)]^2-\text{Im}(z-2)=0$.

**التمرين 59:** عدد مركب . $A$ ، $M$ و $M'$ نقط من المستوي لواحقها 1 ، $z$ و $z^2$ على الترتيب .

عين مجموعة النقط $M$ حتى تكون النقط $A$ , $M$ و $M'$ في استقامية .

**التمرين 60:** $p$ كثير حدود للمتغير المركب $z$ والمعرف بـ : $p(z)=z^3+(1-5i)z^2+(-7-4i)z-3+3i$

1) أثبت أنّ $p$ يقبل جذرين تخيليين صرفا يطلب تعيينهما .

2) تحقق أن العدد المركب $(-1+i)$ هو كذلك جذرا لِـ $p$.

**التمرين 61:** $A$ , $B$ و $C$ نقط من المستوي المركب لواحقها $3i$ , $-3i$ و $2-3i$.

1) عين لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$ .

2) عين مجموعة النقط $M$ من المستوي التي يكون من أجلها $AM^2+2BM^2-2CM^2=25$ .

**التمرين 62:** حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

أ - $2z+i\bar{z}=5-4i$ .

1) أحسب $\alpha-\bar{\alpha}$ بدلالة $x$ و $y$ .

2) برهن أن : " النقطة ذات اللاحقة $\alpha$ , تنتمي إلى محور الفواصل " تكافئ " النقطة ذات اللاحقة $z$ تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x-2$ " .

**التمرين 63:** نضع $z=x+iy$ مع $x$ و $y$ عددين حقيقيين . نرفق بكل عدد مركب $z$ العدد المركب $\alpha$ حيث $\alpha=2\bar{z}-2+6i$ .

1) أحسب بدلالة $x$ و $y$ الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعددالمركب $\alpha$.

2) هل يوجد عدد مركب $z$ يحقق $\alpha=z$.

**التمرين 64:** في المستوي المركب لاحقة النقطة $M$ هي العدد المركب $z=x+iy$ مع $x$ و $y$ عددين حقيقيين .

نرفق بكل عدد مركب $z$ يختلف عن 1 , العدد المركب $L$ حيث $L=\frac{5z-2}{z-1}$ .

1) عبر عن $L+\bar{L}$ بدلالة $z$ و $\bar{z}$ .

2) برهن أن " $L$ هو عدد تخيلي صرف " معناه أن " $M$ هي نقطة من دائرة باستثناء نقطة " .

**التمرين 65:** باستعمال الخاصية $z+\bar{z}=2\text{Re}(z)$ , حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية : أ - $z=2\bar{z}-2+6i$ .

ب) برهن أن مجموعة النقط $M$ بحيث يكون $Z$ تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة .

**التمرين 66:** نرفق بكل عدد مركب $z$ يختلف عن $-2i$ ، العدد المركب $Z=\frac{z-2+i}{z+2i}$

نضع $z=x+iy$ و $M$ نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد $z$

1) برهن أنّ $\text{Re}(Z)=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$

و $\text{Im}(Z)=\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$ .

2) استنتج طبيعة المجموعتين $E$ و $F$ بحيث :

$E$ هي مجموعة النقط $M$ حيث $Z$ حقيقي ؛ و $F$ هي مجموعة النقط $M$ حيث $Z$ تخيلي صرف .

3) أنشئ المجموعتين $E$ و $F$ .

**التمرين 67:** $A$ ، $M$ و $M'$ نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $i$ ، $z$ و $z'$ .

نرفق بكل نقطة $M$ تختلف عن $A$ النقطة $M'$ حيث : $z'=\frac{z^2}{i-z}$

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec u\,;\vec v)$

ب ـ $z\bar z+2z-5-2i=0$ .

جـ ـ $\bar z z-5\bar z-5(1+3i)=0$ .

**التمرين 68:** من أجل كل عدد مركب $z$ يختلف عن $-1$ نضع $Z=\frac{2+\bar z}{1+\bar z}$ .

$z=x+iy$ و $Z=X+iY$ مع $x$ , $y$ , $X$ و $Y$ أعداد حقيقية . $M$ نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد $z$ .

1) أحسب $X$ و $Y$ بدلالة $x$ و $y$ .

2) برهن أن مجموعة النقط $M$ بحيث يكون $Z$ حقيقيا هي مستقيم باستثناء نقطة

) برهن أن مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي يكون من أجلها $L$ تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

**التمرين 69:** $z$ عدد مركب يختلف عن 1 ، صورته النقطة $M$ في المستوي المركب .

نضع $L=\frac{z+1}{z-1}$ و $M'$ صورة العدد المركب $L$ .

عين مجموعة النقط $M$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ ـ يكون $L$ عددا حقيقيا . ب ـ يكون $L$ عددا تخيليا صرفا .

جـ ـ تكون النقط $O$ ، $M$ و $M'$ في استقامية .

**التمرين 70:** نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ ذات اللواحق $a=i\sqrt2$ , $b=\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$ و $c=\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i$ على الترتيب .

1) عين لاحقة النقطة $G$ مرجح النقط $A$ ، $B$ و $C$ المرفقة بالمعاملات $(-3)$ ، $(1+\sqrt6)$ و $(1-\sqrt6)$ على الترتيب .

2) بين أن النقطة $G$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ .

**التمرين 71:** $u$ و $v$ عددان مركبان غير حقيقيين ، نضع $z=\frac{u-\bar u v}{1-v}$ .

برهن أن : " $z$ حقيقي " يكافئ $|v|=1$ .

**التمرين 72:** $a$ و $b$ عددان مركبان حيث $|a|=|b|=1$ و $ab\neq-1$ .

نضع : $z=\frac{a+b}{1+ab}$ .

عبر عن $\bar z$ بدلالة $a$ و $b$ ، استنتج أن العدد $z$ حقيقي .

$z$ عدد مركب . $A$ و $M$ نقطتان من المستوي المركب لاحقتيهما $1-i$ و $z$ على الترتيب

1) عين النقط $M$ التي تنطبق على صورها $M'$ .

2) برهن أن $\mathrm{Re}(z')=\frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$ .

3) استنتج $\mathscr{C}$ ، مجموعة النقط $M$ التي تكون من أجلها $M'$ تنتمي إلى محور التراتيب .

أنشئ المجموعة $\mathscr{C}$ (وحدة الرسم $3cm$) .

**التمرين 73:** $z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq1$ و $x$ ، $y$ عددان حقيقيان

نعتبر العدد المركب $L$ حيث $L=\frac{z+2i}{z-1}$ .

1) أكتب العدد المركب $L$ على الشكل الجبري .

2) عين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي يكون من أجلها $L$ حقيقيا .

$\mathscr{C}$ هي مجموعة النقط $M$ التي يكون من أجلها $(z-1+i)(\overline{z-1+i})=2$ .

1) تحقق أن المبدأ $O$ ينتمي إلى المجموعة $\mathscr{C}$ .

2) عين المجموعة $\mathscr{C}$ ثم أنشئها .

**التمرين 74:** $z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq-1$ و $x$ ، $y$ عددين حقيقيين . $M$ نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد $z$ . نضع : $Z=\frac{2iz-i}{z+1}$ .

1) أحسب $\bar Z$ ، $\mathrm{Re}(Z)$ ، $\mathrm{Im}(Z)$ و $|Z|$ بدلالة $x$ و $y$ .

2) عين المجموعة $\mathscr{E}_1$ للنقط $M$ بحيث يكون $|Z|=1$ .

3) عين المجموعة $\mathscr{E}_2$ للنقط $M$ التي يكون من أجلها $Z$ تخيليا صرفا .

4) أرسم المجموعتين $\mathscr{E}_1$ و $\mathscr{E}_2$ وعين نقط تقاطعهما .

**التمرين 75:** $\alpha$ عدد مركب غير معدوم طويلته $r$ و $\theta$ عمدة له.

نعتبر العددين المركبين $z_1=\alpha i$ و $z_2=\alpha^2$

1) أحسب بدلالة $r$ و $\theta$ الطويلة وعمدة العددين المركبين $z_1$ و $z_2$.

2) حدد $r$ و $\theta$ حتى يكون $z_1$ و $z_2$ مترافقين .

**التمرين 76:** $A$ ؛ $B$ و $C$ نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1=1$ , $z_2=2i$ و $z_3=-1-i$ .

1) أحسب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$ .

2) أحسب $Arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$ . 3) استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

**التمرين 77:** أكتب على الشكل المثلّثي العدد المركب $z$ في كل حالة

# الأعداد المركبة — تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

**التمرين78:** أكتب على الشكل المثلّثي العدد المركب $z$ في كل حالة من الحالات التالية .

أ ـ $z=\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^6$ . ب ـ $z=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{20}$

جـ ـ $z=(i+1)\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ .

**التمرين79:** في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، يكون $z$ حقيقيا .

أ ـ $z=(-2-2i)^{8n}$. ب ـ $z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{3n}$.

جـ ـ $z=\left(3-i\sqrt{3}\right)^{12n}$

**التمرين80:** يعطى العددين المركبين $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=1-i$

1) أعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد $z_1$ ، $z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$

2) أعط الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$ .

3) استنتج أنّ : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

**التمرين81:** يعطى العدد المركب $z=\frac{1-3i}{2-i}$ .

1) أكتب $z$ على الشكل الجبري ثم استنتج طويلته وعمدة له .

2) عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $z^n$ عددا حقيقيا .

**التمرين82:** نضع : $a=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $b=1-i$ .

1) أكتب على الشكل الأسّي كلا من الأعداد $a$ ، $b$ و $\frac{a}{b}$

2) أكتب العدد $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري .

استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

3) حل في المجال $]-\pi;\pi[$ المعادلة

$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$ .

**التمرين83:** المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الرسم $4cm$).

من الحالات التالية أ ـ $z=(1-i)^2$ . ب ـ $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ .

جـ ـ $z=(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ . د ـ $z=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}{(1+i)^{12}}$.

$z_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_2=-\frac{1}{2}i$ .

1) أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_1-2iz_2$ .

2) عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد $(z_1-2iz_2)^n$ تخيليا صرفا .

**التمرين84:** نعتبر العدد المركب $z=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

1) أحسب $z^2$ ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب $z^2$ .

2) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب $z$ .

3) استنتج أن $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ .

**التمرين85:** $z$ ، $u$ و $v$ أعداد مركبة حيث

$z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\frac{z}{u}$ .

1) أكتب $v$ على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة $u$ ، $v$ و $z$.

3) استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

4) أثبت أن العدد $z^{2010}$ تخيلي صرف .

**التمرين86:** يعطى العددان المركبان $z_1=2+3i$ و $z_2=2+i$ .

1) أكتب $z_1^2-z_2^2$ على شكله المثلثي .

2) أكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1^2-z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على شكله الجبري.

**التمرين87:** $z$ عدد مركب حيث $z=1+e^{i\theta}$ مع $\theta\in]-\pi;\pi[$.

1) أ ـ تحقق أن $z=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$ .

ب ـ استنتج الطويلة $r$ وعمدة $\alpha$ للعدد المركب $z$ بدلالة $\theta$.

2) جد ، بدلالة $\theta$، الطويلة وعمدة للعدد المركب $L=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}$ .

**التمرين88:** نضع $z=e^{2i\frac{\pi}{5}}$ ، $A=z+z^4$ و $B=z^2+z^3$.

1) برهن أن $1+A+B=0$ و $AB+1=0$ .

استنتج أن $A$ و $B$ هما حلان للمعادلة $x^2+x-1=0$.

## الأعداد المركبة — تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ و $D$ ذات اللواحق على الترتيب
$a=1$ , $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ , $c=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

1) أكتب $c$ على الشكل الأسّي و $d$ على الشكل الجبري .

2) مثل النقط $A$ , $B$ , $C$ و $D$ في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .

**التمرين 89:** $\theta$ عدد حقيقي. عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة التالية . $z_1=-e^{i\theta}$ ؛ $z_2=-\cos\theta+i\sin\theta$ ؛ $z_3=\sin\theta-i\cos\theta$ .

**التمرين 90:** نعتبر العدد المركب $z$ حيث : $z=2\sin^2\alpha+i\sin 2\alpha$
مع $\alpha$ عدد حقيقي من المجال $[0;2\pi]$ .

عين حسب قيم العدد $\alpha$ الكتابة الأسّية للعدد المركب $z$

( $d$ مجموعة نقط نصف مستقيم مبدأه $O$ ، باستثناء $O$.

أ ـ عين مجموعة النقط $M$ عندما $m$ تمسح المجموعة $d$.

ب ـ عين مجموعة النقط $m$ عندما تمسح $M$ المجموعة $d$.

**التمرين 91:** في المستوي المركب ، نرفق بكل نقطة $m$ ذات اللاحقة العدد المركب $z$ ، النقطة $M$ ذات اللاحقة $Z=\frac{z^3}{2+|z|^3}$ .

تعطى الكتابة الأسّية لكل من العددين المركبين $z$ و $Z$ : $z=re^{i\alpha}$ و $Z=\rho e^{i\theta}$ .

1) عبر عن $\rho$ و $\theta$ بدلالة $r$ و $\alpha$ على الترتيب .

2) نرمز بـ $\mathscr{C}$ الدائرة ذات المركز $O$ ونصف القطر 1. $A$ النقطة ذات اللاحقة $1-i$ .

أ ـ عين مجموعة النقط $M$ لما النقطة $m$ تمسح الدائرة $\mathscr{C}$.

ب ـ عين مجموعة النقط $M$ لما النقطة $m$ تمسح نصف المستقيم $[OA)$ .

3) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x^3}{2+x^3}$

أ ـ بين أن الدالة $f$ متزايدة تماما وعين صورة المجال $[0;+\infty[$ بواسطة الدالة $f$ .

ب ـ استنتج أنه من أجل كل نقطة $m$ من المستوي , النقطة $M$ تنتمي إلى قرص يطلب تعيينه .

**التمرين 92:** 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، كلا من المعادلتين $z^2-2z+5=0$ ؛ $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$.

2) نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ صور الأعداد المركبة

2) بين أن $z^4=\bar{z}$ ثم عين $A$ بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$ .

3) حل المعادلة $x^2+x-1=0$ واستنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$.

**التمرين 93:**

1) برهن أنّ : $\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}=\frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

2) أحسب المجموع $1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$ .

2) عين قيمة لكل من المجموعين $S$ و $T$ حيث $S=\sum_{k=0}^{4}\cos\frac{k\pi}{5}$

و $T=\sum_{k=0}^{4}\sin\frac{k\pi}{5}$ .

**التمرين 94:** في المستوي المركب ، نرفق بكل نقطة $m$ ذات اللاحقة العدد المركب غير المعدوم $z$ , النقطة $M$ ذات اللاحقة $Z=\frac{1}{z^2}$

1. نضع $z=re^{i\theta}$

أ ـ أكتب $Z$ على الشكل الأسّي .

ب ـ $Z_0$ عدد مركب غير معدوم معطى . هل يمكن إيجاد عدد مركب $z_0$ يحقق $Z_0=\frac{1}{z_0^2}$ ؟

2) نفرض أن $|z|=1$ .

أ ـ تعطى النقطة $m$ أنشئ النقطة $M$ .

ب ـ عين النقط $m$ التي يكون من أجلها $Z=z$.

أ ـ عيّن لاحقة النقطة $G$ التي تحقق $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ .

ـ ماذا تمثل النقطة $G$ بالنسبة إلى النقط $A$ ، $B$ والمبدأ $O$ للمعلم ؟

**التمرين 95:** $r$ عدد حقيقي موجب تماماً و $\theta$ عدد حقيقي . $\alpha$ عدد مركّب طويلته $r$ و $\theta$ عمدة له.

1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية

$z^2-\alpha z+\alpha^2=0$ .

2) عبر بدلالة $r$ و $\theta$ على طويلتي الحلين وعمدتيهما .

**التمرين 96:** نضع من أجل كل عدد مركب $z$ ،
$p(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$ .

1) تحقق أنه من أجل كل عدد مركب $z$ ؛
$p(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$ .

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

$1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب

أ ـ ما هي طبيعة المثلث $ABC$ ؟

ب ـ أكتب معادلة للدائرة $\mathscr{C}$ المحيطة بالمثلث $ABC$ .

ج ـ أثبت أن النقطة $D$ تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}$.

د ـ أنشئ $\mathscr{C}$ والنقاط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ في المعلم المعطى .

**التمرين 97:** $\theta$ عدد حقيقي معطى .

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2-2z\sin\theta+1=0$ .

2 نعتبر النقطتين $A$ و $B$ لاحقتيهما حلي المعادلة $(E)$

عين قيم العدد الحقيقي $\theta$ التي يكون من أجلها المثلث $OAB$ متقايس أضلاع .

**التمرين 98:** $A(2;1)$ و $B(3;0)$ نقطتان من المستوي .

$h$ التحاكي ذو المركز $A$ والنسبة $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ؛ $r$ الدوران ذو المركز $B$ والزاوية $-\frac{\pi}{4}$ ؛ $t$ الانسحاب ذو الشعاع $\overrightarrow{BO}$.

أ ـ اكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات الثلاث .

ب ـ أكتب العبارة المركّبة للتحويل $(t\circ r\circ h)$ .

ج ـ عيّن النقطة $C$ حيث $(t\circ r\circ h)(C)=O$ .

**التمرين 99:** $A$، $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوي المركب ، لواحقها على الترتيب $z_A=2+2i$ ، $z_B=5+5i$ و $z_C=-2-2i$.

أ ـ أثبت أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ هو عدد حقيقي .

ب ـ استنتج طبيعة التحويل $T$ الذي يحوّل $B$ إلى $C$ و $A$ نقطته الصامدة الوحيدة .

جـ ـ أكتب العبارة المركّبة للتحويل $T$.

د ـ $\Gamma$ المنحنى ذي المعادلة $y=3x-\frac{1}{x}$ .

أكتب معادلة لصورة المنحنى $\Gamma$ بالتحويل $T$

$II-1$) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $Z=3$

. تعطى الحلول على الشكل الجبر ثم على الشكل الأسّي .

2) نفرض في هذا السؤال أن $z=1+e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$ .

أحسب $Z$ بدلالة $\theta$ ثم استنتج مجموعة النقط $M$ عندما $\theta$ يمسح $\mathbb{R}$

3) نضع $m(x;y)$ و $M(X;Y)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

أ - عين مجموعة النقط $M$ عندما النقطة $m$ تمسح المجموعة $d$

**التمرين 100:** 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+z+1=0$ .

2) استنتج , في $\mathbb{C}$ , حلول المعادلة $z^3-1=0$ .

3) نضع $u=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .

أ ـ أحسب $u^2$ , $u^3$ و $u^{2008}$ .

ب ـ أحسب $s=u+u^2+...+u^{2008}$ .

**التمرين 101:** نعتبر كثير الحدود : $p(z)=z^4-19z^2+52z-40$ حيث $z$ عدد مركب.

1) عين عددين حقيقيين $a$ و $b$ حتى يكون من أجل كل عدد مركب $z$ ، $p(z)=(z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$ .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$ .

**التمرين 102:** 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4-1=0$ .

2) استنتج، في $\mathbb{C}$ , حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$ .

**التمرين 103:** من أجل كل عدد مركب $z$ ، نضع : $p(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$ .

1) $a$ عدد حقيقي . عبر بدلالة $a$ عن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $p(ia)$ .

2) عين قيم $a$ التي يكون من أجلها $p(ia)=0$ .

3) عين عددين حقيقيين $b$ و $c$ حتى يكون من أجل كل عدد مركب $z$ , $p(z)=(z^2+9)(z^2+bz+c)$.

4) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$ .

**التمرين 104:** لتكن النقطتان $A$ و $B$ صورتي العددين المركبين $a=4+2i$ و $b=3-i$ على الترتيب.

أ ـ بين أن المثلث $OAB$ قائم ومتقايس الساقين.

ب ـ عين مركز وزاوية الدوران الذي يحول النقطة $A$ إلى النقطة $B$، والنقطة $B$ إلى النقطة $O$ .

جـ ـ لتكن النقطة $C$ صورة النقطة $O$ بهذا الدوران. ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$؟

**التمرين 105:** النقطتان $A$ و $B$ صورتا العددين المركّبين $z_1=3-2i$ و $z_2=-1+6i$

$\omega$ نقطة من حامل محور الفواصل و $r$ الدوران الذي مركزه $\omega$ و يحوّل $A$ إلى $B$ . ـ عيّن مركز و زاوية الدوران $r$ .

**التمرين 106:** النقاط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ لواحقها على الترتيب $2i$ ، $6$ ، $1+i$ و $3-3i$ .

$\alpha$ و $\beta$ عددان مركّبان ، $t$ تحويل نقطي في المستوي يحول

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

ب - عين مجموعة النقط $M$ عندما النقطة $m$ تمسح المجموعة $\Delta$.

4) أ ـ أحسب $X$ و $Y$ بدلالة $x$ و $y$ .

ب ـ عين مجموعة النقط $m$ عندما $M$ تمسح المحور $(O;\vec{u})$

**التمرين107:** $I-$ ليكن $A$ و $B$ عددين حقيقيين . نعتبر الدالة $F$ المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بِـ : $F(z)=Az+B\bar{z}$ .

1) أحسب $F(1)$ و $F(i)$ .

2) برهن أنه إذا كان من أجل كل عدد مركب $z$ , $F(z)=0$ فإن $A=B=0$ .

3) عين $A$ و $B$ حتى يكون من أجل كل عدد مركب $z$ , $F(z)=z$.

$II-$ ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين . نعتبر الدالة $f$ المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بِـ : $f(z)=az+b\bar{z}$ .

1) عبر عن $(f\circ f)(z)$ من أجل كل عدد مركب $z$ .

2) برهن أن " من أجل كل عدد مركب $z$ ، $(f\circ f)(z)=z$ " يكافئ $\begin{cases}a^2+b^2=1\\ab=0\end{cases}$.

3) عين كل الدوال $f$ التي تحقق من أجل كل عدد مركب $z$ ، $(f\circ f)(z)=z$ (الدوال $f$ تسمى تضامنية )

$III-$ نعتبر الدالة $g$ المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بِـ :

$g(z)=e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$

$M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=3\alpha z+\beta$ .

أ ـ عيّن $\alpha$ و $\beta$ علما أن $t(A)=B$ و $t(C)=D$ .

ب ـ ما هي طبيعة التحويل $t$ مع تعيّن عناصره المميّزة ؟

**التمرين108:** نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4-4z^3+14z^2-36z+45=0$.

1) بيّن أنّ المعادلة تقبل حلين تخيّليين صرفا مترافقين $z_0$ و $\overline{z_0}$ حيث $z_0$ جزئه التخيلي موجبا .

2) برّر أن الحلين الآخرين لهذه المعادلة هما كذالك مترافقين ثم عيّنهما . ونرمز بـ $z_1$ الحل الذي جزئه التخيلي موجبا .

3) استنتج تحويلا نقطيا يحوّل $A(z_0)$ إلى $B(z_1)$ ويحوّل $A'(\overline{z_1})$ إلى $B'(\overline{z_0})$

**التمرين109:** $I-$ نعتبر العدد المركب $u$ حيث $u=1+i$ .

1) أكتب $u$ و $\bar{u}$ على الشكل الأسّي .

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ , نضع : $s_n=u^n+\bar{u}^n$ .

بين أن $s_n=\lambda_n\cos\frac{n\pi}{4}$ مع $\lambda_n$ عدد حقيقي يطلب تعيينه .

3) عين قيم العدد الطبيعي $n$ ، التي يكون من أجلها $s_n=0$ .

4) أثبت أنه إذا كان $n$ عددا زوجيا ، فإن $s_n$ يكون عددا صحيحا .

$II-$ نفرض أن $n=2m$ مع $m\in\mathbb{N}^*$ .

1) باستعمال دستور ثنائي الحدين ، أنشر العددين $(1+i)^{2m}$ و $(1-i)^{2m}$

2) $p$ عدد طبيعي , أكتب على أبسط شكل العبارتين التاليتين : $i^{2p}+(-i)^{2p}$ و $i^{2p+1}+(-i)^{2p+1}$ .

3) تطبيق : نأخذ $m=12$ برهن أنّ $\sum_{p=0}^{12}(-1)^p C_{24}^{2p}=2^{12}$ .