

شعبة: علوم تجريبية.

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي 2017)

الموضوع I، الدورة 02، علوم تجريبية)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :  
 $(z-2)(z^2+2z+4)=0$ .

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  
( $O; \vec{u}; \vec{v}$ ) حيث:  $\|\vec{u}\|=2\text{cm}$ .

لتكن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها:  $z_A = 2$ ،

$z_B = -1+i\sqrt{3}$  و  $z_C = \overline{z_B}$  (هو مرافق  $z_B$ )

(1) أ) اكتب العدد  $z_B$  على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل  
الأسّي للعدد المركب  $z_C$ .

(ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ ،  
ثم أنشئ النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$ .

(2) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $O$  ونسبته  $\frac{1}{2}$   
وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$ .

(أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه  $S$  ثم عين لاحقة كل من  
 $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  صور النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  على الترتيب  
بالتشابه  $S$  ثم أنشئ في المعلم السابق النقط  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$ .  
(ب) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة المثلث  $A'B'C'$ .

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي 2017)

الموضوع II، الدورة 02، علوم تجريبية)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  
( $O; \vec{u}; \vec{v}$ )

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها  $z_A = -3-2i$  و  
 $z_B = 1+i$  و  $z_C = 4-3i$ .

(1) عين النسبة وزاوية التشابه المباشر  $S$  ذي المركز  $A$  والذي  
يحوّل النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$ .

(2) اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم

استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(3) نرسم  $G$  إلى مركز ثقل المثلث  $ABC$  و  $I$  إلى منتصف  
القطعة  $[AC]$

عين كلاً من  $z_G$  و  $z_I$  لاحقتي النقطتين  $G$  و  $I$ ، ثم بين أنّ  
النقط  $B$ ،  $G$  و  $I$  في استقامة.

(4) نعتبر النقطة  $D$  نظيرة  $B$  بالنسبة إلى  $I$ ، حدّد بدقة طبيعة  
الرباعي  $ABCD$ .

(5) نعتبر ( $\Gamma$ ) مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق:

$$\|\overline{MA} + \overline{MC}\| = 5\sqrt{2}$$

(أ) تحقق أنّ النقطة  $C$  تنتمي إلى ( $\Gamma$ ).

(ب) عين طبيعة المجموعة ( $\Gamma$ ) ثم أنشئها.

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي 2017)

الموضوع I، الدورة 01، علوم تجريبية)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  
 $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ .

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  
( $O; \vec{u}; \vec{v}$ )

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها:  $z_A = 2-2i$ ،  
 $z_B = z_A$  و  $z_C = -2$ .

(1) اكتب كلاً من  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.

(2) عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  حتى تكون النقطة  $B$  مركز ثقل  
المثلث  $ACD$ .

(3) ( $\Gamma$ ) مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$

$$M \text{ تختلف عن } A \text{ و } B \text{ حيث } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$$

تحقق أنّ مبدأ المعلم  $O$  هو نقطة من ( $\Gamma$ ) ثم عين طبيعة  
المجموعة ( $\Gamma$ ) وأنشئها.

(4) ليكن  $h$  التحاكي الذي مركزه النقطة  $C$  ونسبته 2، ( $\Gamma'$ )

صورة ( $\Gamma$ ) بالتحاكي  $h$

عين طبيعة المجموعة ( $\Gamma'$ ) مع تحديد عناصرها المميزة.  
التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي 2017)

الموضوع II، الدورة 01، علوم تجريبية

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  
( $O; \vec{u}; \vec{v}$ ).

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

(1) مجموعة حلول المعادلة  $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$  في المجموعة  $\mathbb{C}$  هي

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} + i \right\}$$

(2) من أجل كل عدد مركب  $z$ ,

$$(z+2) \times (\bar{z}+2) = |z+2|^2$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$

(4)  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة 1

ونسبته 3 وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة ( $C$ ) ذات المركز  $\omega(0;1)$  ونصف القطر 3

بالتشابه  $S$  هي الدائرة ( $C'$ ) ذات المركز  $\omega'(-2;-3)$  ونصف

القطر 9.

(5) من أجل كل عدد حقيقي  $\alpha$ : إذا كان

$$Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

فإن  $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$  حيث  $k$  عدد صحيح.

التمرين 01: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2016)

مكرر- الموضوع I، علوم تجريبية

1- نضع من أجل كل عدد مركب  $z$ :

$$P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$$

(أ) تحقق أن  $P(2\sqrt{3}) = 0$

(ب) جد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث من أجل كل عدد

$$P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$$

(ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة  $P(z) = 0$ .

2- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $O; \vec{u}; \vec{v}$ ).

$A$ ،  $B$  و  $C$  نقط من المستوي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = -\sqrt{3} + 3i, z_B = -\sqrt{3} - 3i, z_C = 2\sqrt{3}$$

(أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

(ب) بين أنه يوجد دوران  $r$  مركزه  $A$  ويحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$ ، يُطلب تعيين زاويته.

(ج) استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(د) عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالانسحاب

الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي  $ABDC$ .

3- عين ( $\Gamma$ ) مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة غير

$$\arg\left(\frac{z}{z-2}\right) = 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

(العدد  $\bar{z}$  هو مرافق العدد  $z$ ).

التمرين 02: (04,5 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2016-مكرر- الموضوع II، علوم تجريبية)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :

$$2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0 \dots (E)$$

يُشير الرمز  $\bar{z}$  إلى مرافق العدد المركب  $z$ .

1- (أ) أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة

$$(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$$

(ب) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة (E).

2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_B = \bar{z}_A, z_C = -1, z_D = -\frac{5}{2}$$

(أ) اكتب كلا من العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.

(ب) أنشئ النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ .

(ج) أثبت أن:  $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$ .

(د) استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

3- ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  ونسبته 2

ولتكن  $F$  صورة  $A$  بالتحويل  $S$ .

أنشئ النقطة  $F$  ثم حدد طبيعة المثلث  $AFC$ .

4-عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث  $z+1=kz_B$ . لما يتغير  $k$  في المجموعة  $\mathbb{R}_+$ .

التمرين 03: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان 2016-المسرب-الموضوع I، علوم تجريبية)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . من أجل كل نقطة  $M$  من المستوي لاحتها العدد المركب  $z$  حيث

(1) نرفق النقطة  $M'$  لاحتها العدد المركب  $z'$  حيث:  

$$z' = \frac{z-2}{z-1}$$

(2) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :  $z' = z$ .

(3) بين أن النقطتان  $A$  و  $B$  لاحتها على الترتيب  $z_1$  و  $z_2$  حيث:  

$$z_2 = \overline{z_1} \text{ و } z_1 = 1 - i$$

أ- اكتب  $\frac{z_2}{z_1}$  على الشكل الأسّي.

ب- بين أن النقطة  $B$  هي صورة للنقطة  $A$  بالدوران  $R$  الذي مركزه المبدأ  $O$ ، يُطلب تعيين زاوية له.

(3) نضع  $z' \neq z$ . نعتبر النقطتين  $C$  و  $D$  لاحتها  $2$  و  $1$  على الترتيب.

عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  حيث  $M'$  تنتمي إلى محور الترتيب ثم أنشئ  $(\Gamma)$ .

(4)  $h$  التحاكي الذي مركزه المبدأ  $O$  ونسبته  $2$ .

أ- عين طبيعة التحويل النقطي  $S = h \circ R$  وعناصره المميزة.

ب- اكتب العبارة المركبة للتحويل  $S$ .

ج- عين ثم أنشئ المجموعة  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحويل النقطي  $S$ .

التمرين 04: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان 2016-المسرب-الموضوع II، علوم تجريبية)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة:

$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $A$ ،  $B$  و  $C$  نقط المستوي التي لاحتها على

الترتيب:  $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ،  $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، و  $z_C = \overline{z_B}$ .

أ) اكتب  $z_A$ ،  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي.

ب) بين أنه يوجد تشابه مباشر  $S$  مركزه  $B$  ويحول النقطة  $C$  إلى النقطة  $A$  يُطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) عين للاحقة النقطة  $D$  حتى يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع، ثم حدّد بدقة طبيعته.

ب) عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق:

$$|z - z_A| = |z - z_B| \text{ حيث } \bar{z} \text{ هو مرافق } z.$$

ج) عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق:

$z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$  عندما يتغير  $\theta$  على  $\mathbb{R}$  ثم تحقق أن النقطة  $A$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$ .

التمرين 05: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان 2015 الموضوع I، علوم تجريبية)

(I) عين العددين المركبين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases} \text{ مع } \bar{\alpha} \text{ مرافق } \alpha \text{ و } \bar{\beta} \text{ مرافق } \beta.$$

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $A$ ،  $B$  و  $C$  النقط التي لاحتها على الترتيب:

$$z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ و } z_B = \overline{z_A}، z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) أ) اكتب  $z_A$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد

الطبيعي  $n$  حتى يكون  $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$  حقيقياً سالباً.

ب) تحقق أن العدد المركب

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$$

(2)  $D$  النقطة ذات اللاحقة  $z_D = 1 + i$

أ) حدّد النسبة وزاوية التشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $O$  ويحول  $D$  إلى  $A$ .

ب) اكتب  $\frac{z_A}{z_D}$  على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة

$$\text{المضبوطة لكل من: } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

3) عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  التي تحقق:

$$z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \text{ حيث } k \text{ يسمح } \mathbb{R}^+.$$

التمرين 06: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2015)

الموضوع II، علوم تجريبية

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  تعتبر النقط  $A, B, C$  التي لاحقاتها على الترتيب:  $z_A, z_B, z_C$  حيث:  $z_C = -\overline{(z_A + z_B)}$  و  $z_B = -\overline{z_A}$ ،  $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$  ( $z_A$  هو مرافق  $z_A$ ).

1) أ) اكتب كلا من العددين المركبين  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي.

ب) استنتج أن النقط  $A, B, C$  تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$  يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ج) أنشئ الدائرة  $(\gamma)$  والنقط  $A, B, C$ .

$$2) \text{ أ) تحقق أن: } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

ب) استنتج أن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع وأن النقطه  $O$  مركز ثقل هذا المثلث.

ج) عين وأنشئ  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:

$$|z| = |z - \sqrt{3} - i|$$

3) أ) عين زاوية للدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  ويحول  $C$  إلى  $A$ .

ب) أثبت أن صورة  $(E)$  بالدوران  $r$  هي محور القطعة  $[OB]$ .

التمرين 07: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2014)

الموضوع I، علوم تجريبية

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة

$$z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0.$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن النقط  $A, B, C, D$  التي لاحقاتها على

$$\text{الترتيب: } z_C = 6\sqrt{2}, z_B = \overline{z_A}, z_A = 3\sqrt{2}(1+i).$$

$$\text{و } z_D = \frac{z_C}{2}.$$

أ) اكتب  $z_A, z_B, z_C$  و  $(1+i)z_A$  على الشكل الأسّي.

$$\text{ب) احسب } \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$$

ج) بين أن النقط  $O, A, B, C$  تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $D$ ، يُطلب تعيين نصف قطرها.

د) احسب  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  ثم جد قياسا للزاوية  $(\overline{CA}; \overline{CB})$ . ما هي

طبيعة الرباعي  $OACB$ ؟

3) ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران  $R$ .

ب) عين لاحقة النقطه  $C'$  صورة  $C$  بالدوران  $R$  ثم تحقق أن النقط  $C, A, C'$  في استقامية.

ج) عين لاحقة النقطه  $A'$  صورة  $A$  بالدوران  $R$  ثم حدّد

صورة الرباعي  $OACB$  بالدوران  $R$ .

التمرين 08: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2014)

الموضوع II، علوم تجريبية

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة  $C$  ذات المجهول  $z$

$$\text{حيث: } (z-i)(z^2 - 2z + 5) = 0.$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$  (وحدة الطول  $1\text{cm}$ )، تُعطى النقط  $A, B, C$

التي لاحقاتها:  $z_A = i, z_B = 1+2i, z_C = 1-2i$  على

الترتيب.

أ) أنشئ النقط  $A, B, C$ .

ب) جد  $z_H$  لاحقة النقطه  $H$  المسقط العمودي للنقطه  $A$  على

المستقيم  $(BC)$ .

ج) احسب مساحة المثلث  $ABC$ .

3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

أ) عين الكتابة المركبة للتشابه  $S$ .

ب) بين أن مساحة صورة المثلث  $ABC$  بالتشابه  $S$  تساوي

$$\frac{1}{2} \text{ cm}^2.$$

4)  $M$  نقطة لاحقها  $z$ ، عين مجموعة النقط  $M$  حيث:

$$|z| = |iz + 1 + 2i|$$

التمرين 09: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2013)

(الموضوع I، علوم تجريبية)

1) حل في  $\mathbb{C}$  مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة ( $I$ ) ذات المجهول  $z$  التالية:

$$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \dots (I)$$

حيث  $\alpha$  وسيط حقيقي.

2) من أجل  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ؛ نمرز إلى حلي المعادلة ( $I$ )  $z_1$  و  $z_2$ .

$$\text{بين أن: } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$$

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها:

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C = 4 + i\sqrt{3}$$

الترتيب.

أ) أنشئ النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$ .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم

استنتج أن  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج) عين لاحقة النقطة  $G$  مرشح الجملة

$$\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\} \quad ; \quad \text{ثم أنشئ } G.$$

د) احسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$ ، بحيث يكون الرباعي

$ABDG$  متوازي أضلاع.

التمرين 10: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان

2013 الموضوع II، علوم تجريبية)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ( $E$ ) ذات المجهول  $z$

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \dots (E)$$

1) تحقق أن العدد المركب  $-2 - 3i$  حل للمعادلة ( $E$ )، ثم

جد الحل الآخر.

2)  $A$  و  $B$  نقطتان من المستوي المركب لاحقتهما

$S$  التشابه المباشر الذي  $z_B = i$  و  $z_A = -2 - 3i$

مركزه  $A$ ، نسبته  $\frac{1}{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$  والذي يحول كل نقطة

$M(z)$  من المستوي إلى النقطة  $M'(z')$ .

$$\text{أ) بين أن: } z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

ب) احسب  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$ ، علماً أن  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه  $S$ .

3) لتكن النقطة  $D$ ، حيث:  $2\overline{AD} + \overline{AB} = \vec{0}$ .

أ) بين أن  $D$  هي مرشح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بمعاملين حقيقيين يُطلب تعيينهما.

ب) احسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$ .

ج) بين أن:  $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ACD$ .

التمرين 11: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2012

الموضوع I، علوم تجريبية)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$

$$z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i} \quad (\text{حيث } z \neq 2 - 3i)$$

- حل في  $\mathbb{C}$  هذه المعادلة.

2) يُنسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $A$  و  $B$  نقطتان لاحقتهما على الترتيب:  $z_A$  و  $z_B$

$$\text{حيث: } z_A = 1 + i\sqrt{5} \quad ; \quad z_B = 1 - i\sqrt{5}$$

- تحقق أن  $A$  و  $B$  تنتميان إلى دائرة مركزها  $O$  يُطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي لاحقها  $z$ ، ( $z \neq 2 - 3i$ )

$$\text{النقطة } M' \text{ لاحقها } z' \text{ حيث } z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$$

النقط  $C$ ،  $D$ ،  $E$  لواقعها على الترتيب:  $z_C = -2i$ ،

$$z_D = 2 - 3i \quad ; \quad z_E = 3i \quad \text{و } (\Delta) \text{ محور القطعة } [CD].$$

أ- عبّر عن المسافة  $OM'$  بدلالة المسافتين  $CM$  و  $DM$ .

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة  $M$  من  $(\Delta)$  فإن النقطة

$M'$  تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$  يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

تحقق أن  $E$  تنتمي إلى  $(\gamma)$ .

التمرين 12: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان

2012 الموضوع II، علوم تجريبية)

1)  $P(z)$  كثير الحدود للمتغير المركب  $z$  حيث:

$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود  $P(z)$ .

ب- جد العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث من أجل كل عدد

$$P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة  $P(z) = 0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $A$ ،  $B$  و  $C$  نقط من المستوي المركب لواحقها

على الترتيب:  $z_A = 6$ ،  $z_B = 3 + i\sqrt{3}$  و  $z_C = 3 - i\sqrt{3}$ .

أ- اكتب كلاً من  $z_A$ ،  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي.

ب- اكتب العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$  على الشكل الجبري، ثم

على الشكل الأسّي.

ج- استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$ ، نسبته  $\sqrt{3}$  و زاويته

$$\frac{\pi}{2}$$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه  $S$ .

ب- عين  $z_{A'}$  لاحقة النقطة  $A'$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه  $S$ .

ج- بين أن النقط  $A$ ،  $B$ ،  $A'$  في استقامية.

التمرين 13: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2011

الموضوع I، علوم تجريبية)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A = -i$$

$$z_B = 2 + 3i$$

$$z_C = -4 + i$$

1- أ- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .

ب- عين طولاً العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  وعمدة له؛ ثم

استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

2. نعتبر التحويل النقطي  $T$  في المستوي الذي يرفق بكل نقطة

$M$  ذات اللاحقة  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل  $T$  محدداً عناصره المميزة.

ب- ما هي صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$ .

3. لتكن  $D$  النقطة ذات اللاحقة  $z_D = -6 + 2i$ .

أ- بين أن النقط  $A$ ،  $C$  و  $D$  في استقامية.

ب- عين نسبة التحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  ويحول النقطة  $C$  إلى

النقطة  $D$ .

ج- عين العناصر المميزة للتشابه  $S$  الذي مركزه  $A$  ويحول  $B$

إلى  $D$ .

التمرين 14: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2011

الموضوع II، علوم تجريبية)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A = 3 - 2i$$

$$z_B = 3 + 2i$$

$$z_C = 4i$$

1. أ- علم النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$ .

ب- ما طبيعة الرباعي  $OABC$ ؟ علل إجابتك.

ج- عين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي  $OABC$ .

2. عين ثم أنشئ  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق:

$$\|\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 12$$

3. أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول

$z$  التالية:  $z^2 - 6z + 13 = 0$ ؛ نسمي  $z_0$ ،  $z_1$  حلي هذه

المعادلة.

ب- لتكن  $M$  نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب  $z$ .

عين مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق:

$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

التمرين 15: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2010

الموضوع I، علوم تجريبية)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحقتيهما على الترتيب:

$$z_A = 1 + i$$

$$z_B = 3i$$

1) اكتب على الشكل الأسّي:  $z_A$  و  $z_B$ .

التمرين 17: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2009)

(الموضوع I، علوم تجريبية)

$P(Z)$  كثير حدود حيث:

$$P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$$

(1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(Z) = 0$ .

$$(2) \text{ نضع: } Z_1 = 1 + i; Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

(أ) أكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  على الشكل الأسّي.

(ب) أكتب  $\frac{Z_1}{Z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

(ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

(3) (أ)  $n$  عدد طبيعي. عين قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$

حقيقيا.

(ب) احسب قيمة العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ .

التمرين 18: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2009)

(الموضوع II، علوم تجريبية)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

2. نسمي  $z_1$ ؛  $z_2$  حلي هذه المعادلة.

(أ) أكتب العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.

(ب)  $A$ ،  $B$ ،  $C$  هي النقط من المستوي التي لواحقها على

الترتيب:  $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ؛  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ؛

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$$

( $i^2 = -1$  الذي يحقق  $i^2 = -1$ )

أحسب الأطوال  $AB$ ،  $AC$ ،  $BC$  ثم استنتج طبيعة

المثلث  $ABC$ .

(2) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي يُرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$

النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:  $z' = 2iz + 6 + 3i$ .

(أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$ .

(ب) عين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه المباشر  $S$ .

(ج) استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(3) لتكن النقطة  $D$  مرجح الجملة  $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$ .

(أ) عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$ .

(ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

(4) لتكن  $M$  نقطة من المستوي تختلف عن  $B$  وعن  $D$

لاحقتها  $z$  ولتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  التي

يكون من أجلها  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  عددا حقيقيا موجبا تماما.

(أ) تحقّق أنّ النقطة  $E$  ذات اللاحقة  $z_E = 6 + 3i$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ .

(ب) أعط تفسيراً هندسياً لعمدة العدد المركب  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ . عين

حينئذٍ المجموعة  $(\Delta)$ .

التمرين 16: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2010)

(الموضوع II، علوم تجريبية)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة

$$z^2 - 6z + 18 = 0$$

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  لاحقاتها على

الترتيب:  $z_A = 3 + 3i$ ،  $z_B = \overline{z_A}$ ،  $z_C = -z_A$  و

$$z_D = -z_B$$

أبين أنّ النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  تنتمي إلى نفس الدائرة

ذات المركز  $O$  مبدأ المعلم.

(ب) عين زاوية للدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  ويحوّل النقطة  $A$

إلى النقطة  $B$ .

(ج) بين أنّ النقط  $A$ ،  $O$  و  $C$  في استقامة وكذلك النقط  $B$ ،

$O$  و  $D$ .

(د) استنتج طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

(ج) جد الطويلة وعمدة للعدد المركب  $Z$  حيث:

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$$

(د) أحسب  $Z^3$  و  $Z^6$  ثم استنتج أن  $Z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي  $k$ .

التمرين 19: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان 2008 الموضوع I، علوم تجريبية)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$$

نرمز للحلين بـ  $z_1$  و  $z_2$  حيث:  $|z_1| < |z_2|$ .

بين أن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي.

2- المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  
لتكن  $A$ ،  $B$  و  $C$  نقط المستوى التي لاحقاتها على الترتيب  $1, z_1, z_2$ .

ليكن العدد المركب حيث:  $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ .

(أ) انطلاقاً من التعريف  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ومن الخاصية:  $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن:  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$  وأن  $e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$  حيث  $\theta, \theta_1$  و  $\theta_2$  أعداد حقيقية.

(ب) أكتب  $Z$  على الشكل الأسّي.

(ج) أكتب  $Z$  على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $B$  بتشابه مباشر مركزه  $A$ ، يطلب تعيين زاويته ونسبته.

التمرين 20: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2008 الموضوع II، علوم تجريبية)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:  $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$ .

2. نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحقاتهما  $z_A$  و  $z_B$  على الترتيب حيث:  $z_A = 2 + i$  و  $z_B = -2 - 2i$ .

عين  $z_\omega$  لاحقة النقطة  $\omega$  مركز الدائرة  $(\Gamma)$  ذات القطر  $[AB]$ .

3. لتكن  $C$  النقطة ذات الاحقة  $z_C$  حيث:  $z_C = \frac{4-i}{1+i}$ .

اكتب  $z_C$  على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$ .

4. أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $M_0(z_0)$

ونسبته  $k$  ( $k > 0$ ) وزاويته  $\theta$  والذي يرفق بكل نقطة

$M(z)$  النقطة  $M'(z')$  هي:  $M'(z') = ke^{i\theta}(z - z_0) + z_0$ .

ب- تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل  $S$  المعروف

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left( z + \frac{1}{2}i \right)$$

شعبة: تقني رياضي.

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع I، الدورة 02، تقني رياضي)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول

المركب  $z$  الآتية:  $0 = (z^2 - 2z + 4)(z - 4)$ .

(II) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها  $z_A = 4$ ،

$$z_B = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

(1) اكتب العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الأسّي ثم

استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(2) (أ) عين لاحقة النقطة  $D$  صورة  $B$  بالدوران  $r$  الذي مركزه

$$O \text{ وزاويته } \frac{2\pi}{3}.$$

(ب) عين طبيعة الرباعي  $ABDC$ .

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، نضع:

$$z_n = (z_B)^n + (z_C)^n$$

(أ) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،

$$z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $t_n = z_{6n}$ .



-عبر عن  $t_n$  بدلالة  $n$  ثم احسب  $P_n$  بدلالة  $n$  حيث:

$$P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n$$

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع II، الدورة 02، تقني رياضي)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$

$$\text{الآتية: } (z + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0.$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها  $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ،

$$z_B = -1 - i\sqrt{3} \text{ و } z_C = \overline{z_B}$$

(1) بين أن  $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$  ثم استنتج طبيعة

المثلث  $ABC$  واحسب مساحته.

(2) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $L$  حيث

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$$

(ب) بين أن:  $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$  ثم استنتج

القيمة المضبوطة لـ  $\tan \frac{\pi}{12}$ .

(3) نعتبر التحويل النقطي  $S$  الذي يُحوّل النقطة  $M$  ذات

اللاحقة  $z$  إلى النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  والمعروف

$$z' = (z - z_B)L + z_B$$

-بين أن  $S$  تشابه مباشر يُطلب تحديد عناصره المميزة.

(4) لتكن النقط  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  صور النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$

على الترتيب بالتحويل  $S \circ S$ .

-احسب مساحة المثلث  $A'B'C'$ .

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع I، الدورة 01، تقني رياضي)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لواحقتها:  $z_A = -1$ ،

$$z_B = 2 + i \text{ و } z_C = -i$$

(1) اكتب العدد المركب  $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$  على الشكل الأسّي ثم

استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(2) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $C$

ويُحوّل  $B$  إلى  $A$ .

(3) نعتبر النقطة  $D$  نظيرة  $B$  بالنسبة إلى  $C$  والنقطة  $E$  صورة

$D$  بالتشابه  $S$ .

(أ) عين  $z_D$  لاحقة  $D$  ثم تحقق أن:  $z_E = 1 - 2i$  حيث

$z_E$  لاحقة  $E$ .

(ب) حدّد طبيعة الرباعي  $ADEB$ .

(4)  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$ .

$M$  تختلف عن  $A$  و  $B$ )

حيث

$$\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

تحقق أن النقطة  $C$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$ ، ثم حدّد طبيعة

المجموعة  $(\Gamma)$  وأنشئها.

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع II، الدورة 01، تقني رياضي)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  التي لواحقتها:  $z_A = 1 + i$ ،

$$z_B = \overline{z_A}, z_C = \frac{1}{2}(1 - i) \text{ و } z_D = \overline{z_C}$$

(1) أ) اكتب  $z_C$  و  $z_A$  على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل

الأسّي للعددين  $z_B$  و  $z_D$ .

(ب) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي تحقق:  $(z_A)^n = (z_B)^n$ .

(2) أ) اوجد نسبة ومركز التحاكي  $h$  الذي يُحوّل  $D$  إلى  $A$

ويُحوّل  $C$  إلى  $B$ .

(ب) احسب طويولة العدد المركب  $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$  ثم استنتج

طبيعة الرباعي  $ADCB$ .

(3) جد  $z_G$  لاحقة النقطة  $G$  مرشح الجملة

$$\{(A;2), (B;2), (C;-1), (D;-1)\}$$

(4) لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي بحيث:

$$\|2\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MD}\| = \sqrt{5}$$

بين أن  $A$  نقطة من  $(\Gamma)$ ، ثم حدد طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  وعناصرها المميزة وأنشئها.

التمرين 21: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2016 الموضوع I، تقني رياضي)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$$

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن النقطتين  $A$  و  $B$  لاحقتاهما على الترتيب:

$$z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$

أ- اكتب كلاً من  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.

$$\text{ب- بين أن: } \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$$

ج- عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$  عدداً

حقيقياً.

(3)  $f$  التحويل النقطي الذي يُرفق بكل نقطة  $M$  لاحقتها  $z$

$$\text{النقطة } M' \text{ لاحقتها } z' \text{ حيث: } z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$$

أ- عين طبيعة التحويل النقطي  $f$  وعناصره المميزة.

ب- احسب  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتحويل  $f$ .

ج- عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  حتى تكون  $O$  مركز ثقل

الرباعي  $ABCD$ .

التمرين 22: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان

2016 الموضوع II، تقني رياضي)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات

$$\text{المجهول } z \text{ الآتية: } (z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

(2) اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ . نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  من المستوي التي

لواحقتها على الترتيب:  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ،  $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  و

$$c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

(1) علم النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  في المعلم السابق.

(2) نعتبر النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالتشابه  $S$  الذي مركزه  $A$

ونسبته 3 و زاويته  $\pi$ ، والنقطة  $E$  صورة النقطة  $C$  بالدوران

$R$  الذي مركزه  $O$  و زاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .

- احسب اللاحقتين  $d$  و  $e$  للنقطتين  $D$  و  $E$  على الترتيب.

$$\text{(III) نضع: } z = \frac{d-b}{e-b}$$

(1) اكتب العدد المركب  $z$  على الشكل المثلثي.

(2) نعتبر النقطة  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[DE]$ ،  $F$

نظيرة النقطة  $B$  بالنسبة إلى النقطة  $I$ .

ما طبيعة الرباعي  $BDFE$ ؟

التمرين 23: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2015 الموضوع I، تقني رياضي)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحقتيهما على الترتيب:

$$z_B = 3 + 3i \text{ و } z_A = 1 - i$$

(1) أ) اكتب  $z_A$ ،  $z_B$  على الشكل الأسّي.

ب)  $n$  عدد طبيعي، عين قيم  $n$  بحيث يكون العدد

$$\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$$

ج)  $z$  عدد مركب حيث:  $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ احسب طويولة

العدد  $z$  وعمدة له، ثم اكتب  $\frac{z}{z_A}$  على الشكل الجبري.

$$\text{د) استنتج } \cos \frac{\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{\pi}{12}$$

(2) أ) احسب اللاحقة  $z_C$  للنقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالدوران

الذي مركزه  $A$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ ، واستنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

ب) احسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  مرشح الجملة  
 $\{(A;-1), (B;1), (C;1)\}$ ، ثم بين أن  $ABCD$  مربع.  
 التمرين 24: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان  
 2015 الموضوع II، تقني رياضي)

ب) هل توجد قيم للعدد الطبيعي  $n$  يكون من أجلها العدد  
 المركب  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$  تخيليا صرفا؟ برر إجابتك.

3) أ) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$   
 ويحول  $B$  إلى  $C$ ، محددًا نسبته وزاويته.

ب) استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

4) أ) عين العناصر المميزة لـ  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من  
 المستوي ذات اللاحقة  $z$  والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

ب) عين  $(E')$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي لاحقها  
 $z$  حيث:  $|z - z_1| = |z - z_3|$ .

التمرين 26: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان  
 2014 الموضوع II، تقني رياضي)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  
 $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $z_0 = 1 + i$ .

1) أ) عين ثم أنشئ  $(\gamma)$  مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي  
 حيث:  $z = z_0 + 2e^{i\theta}$  و  $\theta$  يمسح  $\mathbb{R}$ .

ب) عين ثم أنشئ  $(\gamma')$  مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي  
 حيث:  $z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$  و  $k$  يمسح  $\mathbb{R}^+$ .

ج) عين إحداثيات نقطة تقاطع  $(\gamma)$  و  $(\gamma')$ .

2) نسمي  $B$  النقطة التي لاحقها  $z_1$  حيث:  
 $z_1 = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

أ) عين الشكل الجبري للعدد المركب  $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج  
 طبيعة المثلث  $OAB$ .

ب) عين  $z_2$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  
 الذي مركزه  $A$  وزاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .

1) حل في  $\mathbb{C}$  مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة ذات المجهول  
 $z$  التالية:

$$(I) \dots z^2 - 4(\sin \theta)z + 4 = 0 \text{ حيث } \theta \text{ وسيط حقيقي.}$$

2) من أجل  $\theta = \frac{\pi}{3}$  نرزم إلى حلي المعادلة  $(I)$  بـ  $z_1$  و  $z_2$ .

أكتب  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.

3) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  
 $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي لاحقها على الترتيب:

$$z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = 3\sqrt{3} + i$$

أ) أكتب العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الجبري، ثم

على الشكل الأسّي. واستنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

ب) استنتج أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $B$  بالتشابه  
 المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  ويطلب تعيين نسبته وزاوية له.

ج) عين لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالانسحاب  $t$   
 الذي شعاعه  $\overline{AC}$ ، ثم حدّد طبيعة الرباعي  $ABDC$ .

4) أ) عين  $(\Gamma_1)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:  
 $\frac{z - z_C}{z - z_B}$  تخيلي صرف مع  $z \neq z_B$ .

ب) عين  $(\Gamma_2)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:  
 $\frac{z - z_C}{z - z_B}$  حقيقيا مع  $z \neq z_B$ .

التمرين 25: (05,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان  
 2014 الموضوع I، تقني رياضي)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  
 $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  
 $(O; \vec{u}; \vec{v})$

-جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر  $S$ ، ثم عين العناصر المميزة له.

(3) أ) عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  مرشح الجملة  $\{(A;2), (B;-1), (C;1)\}$ .

ب) اكتب العدد المركب  $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$  على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABD$ .

ج) عين المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  من المستوي حيث:  $\|2\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\| = \|\overline{MA} - \overline{MB}\|$

التمرين 29: (06 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2012 الموضوع I، تقني رياضي)

1- عين العددين المركبين  $z_1$  و  $z_2$  بحيث:

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$$

2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$  و  $\Omega$  التي لاحقاتها

على الترتيب  $z_A$ ،  $z_B$  و  $z_\Omega$  حيث:  $z_A = 3 + 2i$ ،  $z_B = -3$  و  $z_\Omega = 1 - 2i$ .

أ) أثبت أن:  $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$ .

ب) عين طبيعة المثلث  $\Omega AB$ .

3-  $h$  هو التحاكي الذي مركزه النقطة  $A$  ونسبته 2.

أ) عين الكتابة المركبة للتحاكي  $h$ .

ب) عين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $\Omega$  بالتحاكي  $h$ .

ج) عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  مرشح الجملة

$$\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$$

د) بين أن  $ABCD$  مربع.

4-  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق:

$$\|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\| = 4\sqrt{5}$$

أ) تحقق أن النقطة  $B$  تنتمي إلى المجموعة  $(E)$ ، ثم عين

طبيعة  $(E)$  وعناصرها المميزة.

ب) أنشئ المجموعة  $(E)$ .

ج) عين العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون النقطة  $O$  مرشحاً للجملة  $\{(A;\alpha), (B;\beta)\}$  و  $\alpha + \beta = \sqrt{2}$ .

د) عين ثم أنشئ  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:  $((1 + \sqrt{2})\overline{MA} - \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MC}) = 0$ .

التمرين 27: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2013 الموضوع I، تقني رياضي)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :  $2z^2 + 6z + 17 = 0$ .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  لاحقاتها على الترتيب:

$$z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \text{ و } z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i, z_A = -4$$

-احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم

استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

3) أ) عين  $z_D$  و  $z_E$  لاحقتي النقطتين  $D$  و  $E$  على الترتيب حتى يكون الرباعي  $BCDE$  مربعاً مركزه  $A$ .

ب) عين  $(\Gamma_1)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:  $\|\overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} + \overline{ME}\| = 10\sqrt{2}$

4)  $(\Gamma_2)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي، ذات اللاحقة  $z$

$$\text{حيث: } \arg(z + 4) = \frac{\pi}{4}$$

-تحقق أن النقطة  $B$  تنتمي إلى  $(\Gamma_2)$ ، ثم عين المجموعة  $(\Gamma_2)$

التمرين 28: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان 2013 الموضوع II، تقني رياضي)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة ذات المجهول  $z$ :  $(z + 5 - i\sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$ .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_C = -5 + i\sqrt{3} \text{ و } z_B = -1 + i\sqrt{3}, z_A = -1 - i\sqrt{3}$$

$S$  التشابه المباشر الذي يحول  $A$  إلى  $C$  ويحول  $O$  إلى  $B$ .

التمرين 30: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2012 الموضوع II، تقني رياضي)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول  $z: (z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ .

2- المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $A, B, C$  و  $D$  نقط من المستوى لاحقاتها

على الترتيب:  $z_A = \sqrt{3} + i$ ،  $z_B = \sqrt{3} - i$ ،

$$z_C = -1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{و } z_D = -1 + i\sqrt{3}$$

أ) اكتب كلا من  $z_A, z_B, z_C, z_D$  على الشكل الأسّي.

ب) تحقق أن:  $i = \frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}$ ، ثم استنتج أن المستقيمين

$(AC)$  و  $(BC)$  متعامدان.

3-  $z_n$  العدد المركب الذي طويلته  $\frac{1}{2^n}$  و  $n$  عمدة له

حيث  $n$  عدد طبيعي.

$$L_n = z_D \times z_n \text{ العدد المركب المعروف بـ:}$$

أ) اكتب كلا من  $L_0, L_1$  على الشكل الجبري.

ب)  $(U_n)$  هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

$$n \text{ كما يلي: } U_n = |L_n|$$

- أثبت أن المتتالية  $(U_n)$  هندسية يُطلب تعيين أساسها

وحدها الأول.

$M_0, M_1, \dots, M_n$  صور الأعداد المركبة  $L_0, L_1, \dots$ ،

$L_n$  على الترتيب.

احسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث:

$$S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \dots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$$

- جد نهاية  $S_n$  عندما يُؤول  $n$  إلى  $+\infty$ .

التمرين 31: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2011 الموضوع I، تقني رياضي)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$(E) \quad z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \dots$$

1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$ ، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلي.

2) المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط  $A, B, C$  التي لاحقاتها على

الترتيب:  $z_A = 2i$ ،  $z_B = \sqrt{3} + i$  و  $z_C = \sqrt{3} - i$ ، نضع:

$$L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

أ) اكتب  $L$  على الشكل الأسّي.

ب) أثبت أن:  $L(z_C - z_B) = z_A - z_B$ ، ثم استنتج أن  $A$

صورة  $C$  بتحويل نقطي يُطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة.

ج) استنتج نوع المثلث  $ABC$  ثم احسب مساحته  $S$ .

التمرين 32: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2011 الموضوع II، تقني رياضي)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

$L$  العدد المركب المعروف كما يلي:  $L = \frac{-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{5 + 3i}$ .

1/أ) اكتب  $L$  على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

ب) بين أن:  $L^{12} + 1 = 0$ ، ثم احسب:

$$(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$$

ج)  $n$  عدد طبيعي فردي و  $p$  عدد طبيعي زوجي أثبت

$$\text{أن: } L^{4n} + L^{4p} = 0$$

2/أ) النقطتان  $A$  و  $B$  لاحقتهما على الترتيب:  $z_A = 5 + 3i$

و  $z_B = 5 - 3i$  عينّ اللاحقة  $z_A'$  للنقطة  $A'$  صورة النقطة

بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $B$  ونسبته  $\sqrt{2}$  وزاويته

$$\frac{3\pi}{4}$$

ب) عينّ للاحقة النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABA'$ .

التمرين 33: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2010 الموضوع I، تقني رياضي)

1/حلّ، في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة:

$$(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$$

$i$  هو العدد المركب الذي طويلته 1 و  $\frac{\pi}{2}$  عمدة له)

2/عالم في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

(O;  $\vec{u}; \vec{v}$ ) النقاط A ، C ، D ، I ذات اللاحقات:

الترتيب.  $z_A = 3 - 2i$  ،  $z_C = -3 + i$  ،  $z_D = -3 - i$  ،  $z_I = 1$  على  $z/3$  عدد مركب يحقق الجملة:

$$\begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases}$$

أ- بين أن الجملة تكافئ:  $i = \frac{z - 3 + 2i}{z - 1}$  ثم عين قيمة z.

ب- B النقطة التي لاحقها  $z_B = 3$  ، تحقق أن:

$\overline{AB} = \overline{DC}$  . ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

ج- لتكن J النقطة التي لاحقها  $z_J = 1 - 2i$  .

اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب حيث:

$$Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}$$

تحقق أن:  $\overline{AB} = \overline{JI}$  . ما هي طبيعة الرباعي ABIJ ؟

التمرين 34: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2010 الموضوع II ، تقني رياضي)

1) أ- اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب a حيث:

$a = -2 + 2i\sqrt{3}$  . (i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و

$\frac{\pi}{2}$  عمدة له)

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات

المجهول  $Z: Z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$  .

2) ينسب المستوى إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O;  $\vec{u}; \vec{v}$ ).

A ، B و C النقاط التي لاحقها  $z_A = -2$  ،

$z_B = -1 - \sqrt{3}i$  و  $z_C = 1 + \sqrt{3}i$  على الترتيب.

أ- احسب طويلة العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  وعمدة له.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن (E) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z حيث:

$$\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$$

أ- تحقق أن B تنتمي إلى (E) .

ب- عين المجموعة (E) .

التمرين 35: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2009 الموضوع I ، تقني رياضي)

1) أ) حل في C المعادلة  $z^2 - 2z + 2 = 0$  حيث z هو المجهول.

ب) استنتج في C حلول المعادلة ذات المجهول z:

$$0 = 2(\bar{z} + 3) - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0 \text{ حيث } \bar{z} \text{ مرافق } z.$$

2) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

(O;  $\vec{u}; \vec{v}$ ) ، النقاط A ، B و M لواحقتها  $(1 - i)$  ،  $(1 + i)$

و z على الترتيب.

أ- عين (Γ) مجموعة النقاط M من المستوى حيث:

$$z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ عندما } k \text{ يسمح } \mathbb{R}^+.$$

ب- عين (E) مجموعة النقاط M من المستوى حيث:

$$|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$$

التمرين 36: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2009 الموضوع II ، تقني رياضي)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

$$(1) \dots z^2 - 6z + 18 = 0$$

2. ليكن العدد المركب  $z_1$  حيث  $z_1 = 3 - 3i$  (i هو العدد

المركب الذي طويلته 1 و  $\frac{\pi}{2}$  عمدة له)

أ) اكتب  $z_1$  على الشكل الأسّي.

ب) احسب طويلة العدد  $z_3$  وعمدة له حيث

$$z_1 \times z_3 = 6 \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

استنتج قيمتي  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$  .

3. نعتبر في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس

(O;  $\vec{u}; \vec{v}$ ) النقاط A ، B و C ذات اللاحقات  $3 + 3i$  ،

$$3 - 3i ، \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ على الترتيب.}$$

شعبة: رياضي.

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع I، الدورة 02، رياضي)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$

$$\text{الآتية: } 2z^2 - 10z + \frac{29}{2} = 0.$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

نعتبر النقط  $A, B, C, D$  التي لاحقاتها

$$z_C = -\overline{z_A}, z_B = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{و } z_D = i.$$

(1) أ) اكتب العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الجبري ثم علم النقط  $A, B, C, D$  في المعلم السابق.

ب) اكتب العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$  على الشكل الأسّي

ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(2) جد لاحقة النقط  $E$  نظيرة  $B$  بالنسبة إلى  $D$  ثم استنتج طبيعة الرباعي  $ABCE$ .

(3) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $B$  ويحول  $A$  إلى  $D$  ثم حدّد نسبته وزاويته.

(4) نعرّف متتالية النقط  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  كما يلي:  $A_0 = A$  و

$$A_{n+1} = S(A_n) \text{ (} z_n \text{ هي لاحقة } A_n \text{)}$$

أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,

$$z_n - z_B = 5 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$$

ب) عين قيم  $n$  الطبيعية حتى تنتمي النقط  $A_n$  إلى المستقيم  $(AB)$ .

التمرين الثاني: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع II، الدورة 02، رياضي)

(I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة

$$z^2 - 2(1 - \sin \alpha)z + 2(1 - \sin \alpha) = 0 \dots (E)$$

أ) عين قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تقبل الجملة المثقلة

$$\{(A; 1), (B; -1), (C; \alpha)\}$$

ب) عين مجموعة النقط  $G_\alpha$  لما يتغير  $\alpha$  في  $\mathbb{R}^*$ .

التمرين 37: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2008 الموضوع I، تقني رياضي)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة (\*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3 + (2 - 4i)Z^2 - (6 + 9i)Z + 9(-1 + i) = 0 \dots (*)$$

1/ بين أنّ:  $Z_0 = 3i$  هو حل للمعادلة (\*).

2/ حل، في  $\mathbb{C}$ ، المعادلة (\*) ثم اكتب حلولها  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الشكل الأسّي حيث  $|Z_1| < |Z_2|$ .

3/ لتكن  $A, B, C$  صور الحلول  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الترتيب

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . عين

النقطة  $G$  مرّح الجملة  $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\}$ .

4/ عين المجموعة  $(E)$  للنقط  $M$  حيث:

$$AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$$

بين أنّ النقطة  $A$  تنتمي إلى المجموعة  $(E)$  ثم أنشئ  $(E)$ .

5/ تحقّق أنّ النقط  $O, B, G$  في استقامة ثم عين صورة

المجموعة  $(E)$  بالتحاكي الذي مركزه النقطة  $O$  ويحول  $B$  إلى

$G$  محددًا عناصره المميزة.

التمرين 38: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2008 الموضوع II، تقني رياضي)

$r$  عدد حقيقي موجب تماما و  $\theta$  عدد حقيقي كفي.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$

$$z^2 - 2i \left( r \cos \frac{\theta}{2} \right) z - r^2 = 0:$$

اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  صورتا الحلين.

عين  $\theta$  حتى يكون المثلث  $OAB$  متقايس الأضلاع.

حيث  $\alpha$  عدد حقيقي. (نرمز بـ  $z_1$  و  $z_2$  إلى حلّي المعادلة (E))

(1) عيّن الحلين  $z_1$  و  $z_2$  بدلالة  $\alpha$ .

(2) نضع  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . بين أنّ:  $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$ .

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

نعتبر النقط  $A, B$  و  $C$  التي لاحقاتها  $z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_C = 2z_A$$

(1) عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$

عددا حقيقيا موجبا تماما.

(2) ليكن  $S$  التحويل النقطي الذي يحول النقطة  $M$  ذات الاحقة  $z$  إلى النقطة  $M'$  ذات الاحقة  $z'$

$$\text{حيث } z' = (1 + z_A)z + 2z_B$$

- عيّن طبيعة التحويل  $S$  ثم حدّد عناصره المميزة.

(3) مجموعة النقط  $M$  ذات الاحقة  $z$  حيث

$$\arg(\overline{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

- تحقق أنّ النقطة  $C$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$ ، ثم حدّد طبيعة  $(\Gamma)$  وأنشئها.

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع I، الدورة 01، رياضي)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$ ، المعادلة ذات المجهول

$$z: (z^2 - 2\sqrt{2}z + 8)(z - 2 + 2i) = 0$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $A, B$  و  $C$  التي لاحقاتها

$$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_C = 2(1 - i)$$

(أ) اكتب  $z_A, z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي ثم استنتج أنّ النقط  $A, B$  و  $C$  تنتمي إلى دائرة  $(\Omega)$  يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون العدد المركب  $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$  تخيليا صرفا.

(ج) نسمّي  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات الاحقة  $z$  حيث: مع  $k$  يسمح  $\mathbb{R}_+$

تحقق أنّ النقطة  $C$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$ ، ثم عيّن وأنشئ  $(\Gamma)$ .

(3) الدوران الذي مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$ ،  $h$

التحاكي الذي مركزه النقطة  $O$  ونسبته  $-2$ .

عيّن طبيعة التحويل  $h \circ r$  وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة  $(\Omega)$  بالتحويل  $h \circ r$ .

التمرين الثالث: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة ماي

2017 الموضوع II، الدورة 01، رياضي)

(I) اكتب العدد  $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$  على الشكل الجبري ثم استنتج

الجذرين التربيعيين للعدد المركب:  $\frac{21}{4} + 5i$ .

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $I$  ذات اللواحق:

$$z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, z_B = -\frac{3}{2}i, z_C = -\overline{z_A}$$

$$\text{و } z_I = i$$

(1) اكتب  $z_A$  و  $z_C$  على الشكل الجبري.

(2) اكتب العدد المركب  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$  على الشكل الأسّي

مستنتجا طبيعة المثلث  $ABC$ .

(3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $B$  ويحول  $A$  إلى  $I$ .

(أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  ثم عيّن نسبته وزاويته.

(ب) نعرّف من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq 2$

التحويل النقطي  $T_n$  كما يلي:  $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مرّات}}$

عيّن قيم  $n$  حتى يكون  $T_n$  تحاكيًا، عيّن عندئذٍ عناصره المميزة.



(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

(ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب  $z$  الآتية:

$$\left( z + 1 + i(1 - \sqrt{3}) \right)^2 - 4z + 1 - 4i(1 - \sqrt{3}) = 0$$

(2)  $\theta$  عدد حقيقي حيث:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  و  $z_0$  عدد مركب

طويلته 1 و  $\theta$  عمدة له.

(أ) اكتب العدد المركب  $1 + i\sqrt{3}$  على الشكل الأسّي.

(ب) عين  $\theta$  علما أن:  $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{z_0}$  هو مرافق العدد

(المركب  $z_0$ )

(ج)  $n$  عدد طبيعي. من أجل قيمة  $\theta$  المتحصل عليها،

اكتب العدد المركب  $\left[ \frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2} \right]^n$  على الشكل المثلث.

(د) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون

$$\left[ \frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2} \right]^n$$
 عددا حقيقيا موجبا تماما.

(3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ . نعتبر النقط  $A, B, C$  التي لاحقاتها على

الترتيب:  $z_A, z_B$

و  $z_C = 1 + i\sqrt{3}$  حيث:  $z_A = 2 - i, z_B = 2 + i$

(أ) عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  مرشح الجملة المثقلة

$$\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$$

(ب) استنتج أن الرباعي  $ABCD$  متوازي الأضلاع.

(ج)  $E$  النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة  $z_E$

$$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} \right| = 2 \end{cases}$$

حيث:

$$z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$$

- بين أن النقطة  $A$  هي صورة النقطة  $B$  بتشابه مباشر

يطلب تعيين عناصره المميزة.

(4)  $M$  نقطة من المستوي المركب لاحقها  $z$ ، النقطة  $I$

منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$ .

(أ) عين  $z_1$  لاحقة النقطة  $I$ .

(ب)  $\alpha$  عدد حقيقي، نسمي  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من

المستوي المركب التي تُحقق:  $z - z_1 = e^{i\alpha}$ .

- تحقق أن النقطة  $E$  تنتمي إلى المجموعة  $(\Gamma)$ .

- عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  وعناصرها المميزة عندما يتغير

$\alpha$  في  $\mathbb{R}$ .

### التمرين 40: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

### 2016 الموضوع II، رياضي)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

(2) جد العددين المركبين  $z_1$  و  $z_2$  حيث:

$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ . النقط  $A, B, C, D$  و  $H$  لاحقاتها على

الترتيب:  $z_A = i\sqrt{2}, z_B = -i\sqrt{2}, z_C = 1 + i$

و  $z_D = 1 - i$  حيث  $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$  النقطة التي تُحقق:

$$\overline{DE} = 2\overline{DO}$$

(1) اكتب  $z_H$  على الشكل الأسّي واستنتج نوع المثلث

$BEC$ .

(2)  $S$  تحويل نقطي في المستوي يُرفق بكل نقطة  $M$

لاحقتها  $z$  النقطة  $M'$  لاحقها  $z'$  حيث:  $z' = z_A z + z_B$

(أ) ما هي طبيعة التحويل  $S$ ? وما هي عناصره المميزة؟

(ب) احسب مساحة الدائرة  $(\gamma)$  التي مركزها  $C$  ونصف

قطرها  $CD$ .

(ج) عين  $(\gamma')$  صورة  $(\gamma)$  بالتحويل  $S$  واستنتج مساحتها.

(3) عين  $(\delta)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي  $(M)$  تختلف عن  $(B$  و  $C)$  ذات اللاحقات  $z$  التي يكون من أجلها العدد حقيقيا سالبا تماما.

التمرين 41: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2015 الموضوع I، رياضي)

يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . نعتبر النقط  $A, B, C, H$  و  $I$  لاحتقتها على الترتيب:  $z_A = i, z_B = -2 + i, z_C = -3, z_H = -3 + 4i$  و  $z_I = -1 - i$

(1) أ) مثل النقط  $A, B, C, H$  و  $I$  في المعلم  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  
ب) عين النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه  $B$  ويحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $C$ .

(2) عين  $z_G$  لاحقة النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

(3) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ .

ب) استنتج أن المستقيمين  $(AH)$  و  $(BC)$  متعامدان.  
ج) بين أن  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $ABC$ .  
د) بين أن النقط  $G, H, I$  في استقامية.

(5)  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث:  $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$  مع  $\theta \in \mathbb{R}$ .

أ) بين أن النقطة  $A$  تنتمي إلى المجموعة  $(\Gamma)$ .  
ب) عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  مع تحديد عناصرها المميزة.  
ج) أنشئ المجموعة  $(\Gamma)$ .

د) تحقق أن النقطتين  $B$  و  $C$  تنتميان إلى المجموعة  $(\Gamma)$ .

التمرين 42: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2014 الموضوع I، رياضي)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية:

$$(z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$$

(2)  $A, B, C, D$  نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  لاحتقتها على الترتيب:  $z_C = 1 + \sqrt{3} - i, z_B = 1 + \sqrt{3} + i, z_A = 1 + 2i$  و  $z_D = 1 - 2i$ .

أ) بين أن:  $AB = CD$  و  $(AD)$  يوازي  $(BC)$ .

ب) تحقق أن:  $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$  ثم استنتج طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

(3) أ) بين أن:  $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

استنتج أن  $D$  هي صورة  $A$  بتشابه مباشر مركزه  $B$  يُطلب تعيين نسبته وزاويته.

ب) بين أن المثلث  $ADB$  قائم وأن النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.  
ج) استنتج إنشاء للرباعي  $ABCD$ .

التمرين 43: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2014 الموضوع II، رياضي)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ,  $A$  و  $B$  النقطتان اللتان لاحتقاهما على الترتيب:  $a = -2 + 6i$  و  $b = -1 + 2i$ .

(1) اكتب العدد المركب  $1 + i$  على شكل أسّي.  
(2)  $S$  التحويل النقطي الذي يُرفق بكل نقطة  $M$  لاحتقتها  $z$  النقطة  $M'$  لاحتقتها  $z'$  حيث:  $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2$ .

أ) النقطة  $D$  ذات اللاحقة  $d$  حيث  $d = 2i$ , جد لاحقة النقطة  $D'$  صورة  $D$  بالتحويل  $S$ . ماذا تستنتج؟

ب) بين أن:  $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)$  واستنتج طبيعة وعناصر التحويل  $S$ .

(3)  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة:  $3x + 5y = 11$ .

أ) تحقق أن النقطة  $M_0(-3; 4)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  ثم عين نقط  $(\Delta)$  التي إحداثياتها أعدادا صحيحة.

ب)  $M_0'$  صورة  $M_0$  بالتحويل  $S$ . بين أن المستقيمين  $(BM_0')$  و  $(BA)$  متعامدان.

4)  $x$  و  $y$  عدداً صحيحان من المجال  $[-5;5]$ . عين مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوي بحيث يكون المستقيمان  $(BA)$  و  $(BM')$  متعامدين، حيث  $M'$  هي صورة  $M$  بالتحويل  $S$ .

التمرين 44: (06 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2013 الموضوع I، رياضي)

$I$   $a$  و  $b$  عدداً حقيقيين موجبان تماماً. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $E$  التي لاحقاتها:  $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ،  $z_B = -a\sqrt{2}$ ،  $z_C = \overline{z_A}$  و  $z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}}$  على الترتيب.

1.أ- اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثم

استنتج طبيعة المثلث  $OAB$ .

ب- حدّد طبيعة الرباعي  $OABC$ ، ثم استنتج مساحته.

2. التسابه المباشر  $S$  ذو المركز  $O$  والنسبة  $\frac{b}{a}$  والزاوية  $\frac{3\pi}{4}$ ، ويُحوّل كل نقطة  $M(z)$  من المستوي إلى النقطة  $M'(z')$ .  
أ- اكتب العبارة المركبة للتسابه المباشر  $S$ ، ثم تحقّق أنّ:  $S(A) = E$

ب- بين أنّ مساحة الرباعي  $OEF G$  هي  $b^2$  (مقدرة بوحدة المساحة)، حيث  $S(B) = F$  و  $S(C) = G$ .

3.أ- احسب بدلالة  $a$  و  $b$  العبارة:

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos \left[ \arg \left( \frac{z_E}{z_C} \right) \right]$$

ب- استنتج قيمة  $CE^2$  بدلالة  $a$  و  $b$ .

$II$   $n$  عدد طبيعي و  $M_n$  نقطة من المستوي تختلف عن  $O$  لاحقتها  $z_n$ .

نضع:  $M_0 = A$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $M_{n+1} = S(M_n)$

نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، ب:  $u_n = |z_n|$  و  $v_n = \arg(z_n)$ .

1. اكتب العدد المركب  $\frac{z_{n+1}}{z_n}$  على الشكل الأسّي بدلالة  $a$  و  $b$ .

2. نفرض أنّ:  $a < b$  و  $\arg \left( \frac{z_{n+1}}{z_n} \right) \in ]-\pi; \pi]$ .

بين أنّ المتتالية  $(u_n)$  هندسية، والمتتالية  $(v_n)$  حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

3. احسب، بدلالة  $a$ ،  $b$  و  $n$  المجموع  $T_n$ ، حيث:

$$T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$$

4. عين قيم الأعداد الطبيعية  $n$  التي تكون من أجلها النقط  $O$ ،  $A$  و  $M_n$  في استقامية.

التمرين 45: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان 2013 الموضوع II، رياضي)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول  $z$ ، التالية:  $z^2 + z + 1 = 0$ .

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$  و  $M$  ذات اللاحقات:

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad z_B = \overline{z_A} \quad z \text{ و } z \text{ على الترتيب. (يرمز } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A)$$

أ- اكتب  $z_A$  على الشكل الأسّي.

ب- عين مجموعة النقط  $M$  من المستوي، حيث:

$$\arg \left[ (z - z_A)^2 \right] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

3.أ- التحويل النقطي  $r$ ، يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة

$$M'(z') \text{، حيث: } z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$$

ب- ما طبيعة التحويل  $r$ ؟ عين عناصره المميزة.

ب- التحاكي  $h$ ، يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$ ، حيث:

$$z' = -2z + 3i$$

ب- عين نسبة ومركز التحاكي  $h$ .

ج- نضع:  $S = h \circ r$ . (يرمز  $\circ$  إلى تركيب التحويلين  $r$  و  $h$ )

ب- عين طبيعة التحويل  $S$ ، مبرزاً عناصره المميزة، ثم

تحقّق أنّ عبارته المركبة هي:  $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$

4. نعتبر النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $i$  والنقط  $C$ ،  $D$  و  $E$ ؛

حيث:  $S(D) = E$  و  $S(C) = D$ ،  $S(O) = C$ .

-بين أن النقط  $O$ ،  $\Omega$  و  $E$  في استقامة.

1.5- عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي، حيث:

$$z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ مع } \theta \in \mathbb{R}$$

ب- عين  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحويل  $S$ .

التمرين 46: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2012 الموضوع I، رياضي)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة ذات المجهول  $z$

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0:$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $A$ ،  $B$  و  $C$  نقط المستوي التي لاحتقاتها على

$$\text{الترتيب: } z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{، } z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_C = z_A + z_B$$

أ- اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة:  $z_A$ ،  $z_B$

$$\text{و } \frac{z_A}{z_B}$$

ب- عين لاحقة كل من  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  صور النقط  $A$ ،

$B$  و  $C$  على الترتيب بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

ج- بين أن الرباعي  $OA'B'C'$  مربع.

3) نسمي  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$

$$\text{حيث: } |z - z_A| = |z - z_B|$$

أ- بين أن  $(\Delta)$  هو محور الفواصل.

$$\text{ب- بين أن حلي المعادلة: } \left( \frac{z - z_A}{z - z_B} \right)^2 = i \text{ عددان}$$

حقيقيان. (لا يُطلب حساب الحلين)

التمرين 47: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2012 الموضوع II، رياضي)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة ذات المجهول  $z$

$$\text{التالية: } (z^2 + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  التي

$$\text{لواحقها على الترتيب: } z_A = \sqrt{3} + i \text{، } z_B = \overline{z_A}$$

$$z_C = -2i \text{ و } z_D = \overline{z_C}$$

-بين أن النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$

يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط  $A$ ،  $B$ ،

$C$  و  $D$ .

3) نرسم بـ  $z_E$  إلى لاحقة النقطة  $E$  نظيرة النقطة  $B$  بالنسبة

إلى المبدأ  $O$ .

$$\text{أ- بين أن: } \frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

ب- بين أن النقطة  $A$  هي صورة النقطة  $E$  بدوران  $R$  مركزه

$C$  يُطلب تعيين زاويته.

ج- استنتج طبيعة المثلث  $AEC$ .

د-  $H$  هو التحاكي الذي مركزه  $O$  ونسبته 2.

عين طبيعة التحويل  $R \circ H$  وعناصره المميزة، ثم

استنتج صورة الدائرة  $(\gamma)$  بالتحويل  $R \circ H$ .

التمرين 48: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان

2011 الموضوع I، رياضي)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  $A$ ،

$B$  و  $C$  ثلاث نقط من المستوي لاحتقاتها على الترتيب:

$$z_A = 1 - i \text{، } z_B = -1 + i \text{ و } z_C = \sqrt{3}(1 + i)$$

1/ اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة:  $z_A$ ،  $z_B$  و  $z_C$ .

$$2/ \text{احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \text{، ثم}$$

فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب/ حدّد طبيعة المثلث  $ABC$ .

3/ عين لاحقة النقطة  $D$  بحيث يكون الرباعي  $ACBD$

معينا.

4/  $T$  التحويل النقطي الذي يُرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي

لاحقتها  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:

$$z' = (-1 + i)z + 1 - 3i$$

أ/عين طبيعة التحويل  $T$  وعناصره المميزة.

ب/استنتج طبيعة التحويل  $T \circ T$  وعناصره المميزة.

التمرين 49: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2011 الموضوع II، رياضي)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/أ) الشكل المثلثي للعدد المركب  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  هو

$$-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

ب)  $a^{2011} + \bar{a} = 0$  حيث  $\bar{a}$  مرافق  $a$ .

2/في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

أ) التحويل  $T$  الذي كتابته المركبة:

$$z' = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) z$$

المعلم.

ب) مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:

$$\arg(z - i) = \frac{-\pi}{4}$$

أ) ذات اللاحقة  $i$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}$  للاحقته  $1 + i$ .

3/  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = \frac{1}{12}$  ومن أجل

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}, \quad n \text{ طبيعي}$$

$$u_n = -\frac{7}{12} \left( \frac{3}{4} \right)^n + \frac{2}{3} \quad (\text{أ})$$

ب)  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$ .

ج)  $(u_n)$  متباعدة.

التمرين 50: (04,5 نقطة) الأعداد المركبة (دورة جوان

2010 الموضوع I، رياضي)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(E) \dots$

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = 0$$

1) أ) تحقق أن 3 حل للمعادلة  $(E)$ ، ثم عين الأعداد

الحقيقية  $a, b$  و  $c$  بحيث، من أجل كل عدد مركب  $Z$

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = (Z - 3)(aZ^2 + bZ + c)$$

ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$ .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

النقط  $A, B, C$  صور الأعداد المركبة  $Z_A = 3$ ,

$$Z_B = i\sqrt{3} \text{ و } Z_C = -i\sqrt{3}$$

بين أن المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع.

3)  $D$  النقطة التي لاحتقتها  $Z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$  و  $E$  صورتها

بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

عين  $Z_E$  لاحقة النقطة  $E$ .

4)  $F$  النقطة التي لاحتقتها  $Z_F = 1 - i\sqrt{3}$ .

أ) احسب  $\frac{Z_F}{Z_E}$  واستنتج أن المستقيمين  $(OE)$  و  $(OF)$

متعامدان.

ب) عين  $Z_G$  لاحقة النقطة  $G$  بحيث يكون  $OEGF$  مربعا.

التمرين 51: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2010 الموضوع II، رياضي)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. نسمي  $A, B, I$  والنقط التي لاحتقتها على الترتيب:

$$Z_A = 1 - 4i, \quad Z_B = -1 - 2i \text{ و } Z_I = 1 - 2i$$

أ- علم النقط  $A, B, I$ .

ب- اكتب على الشكل الجبري العد المركب

$$Z = \frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}$$

ج- ما هو نوع المثلث  $IAB$ ؟

د- صورة  $I$  بالتحاكي الذي مركزه  $A$  ونسبته 2. احسب

اللاحقة  $Z_C$  للنقطة  $C$ .

هـ-  $D$  مرشح الجملة  $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$ . احسب

اللاحقة  $Z_D$  للنقطة  $D$ .

و- بين أن  $ABCD$  مربع.

2. عين وأنشئ  $(\Gamma_1)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$$

3. عين وأنشئ  $(\Gamma_2)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$$

التمرين 52: (04 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2009 الموضوع II، رياضي)

نزفق بكل عدد مركب  $z$  يختلف عن 1 العدد المركب

$$f(z) = \frac{z-i}{z-1} \text{ حيث: } f(z)$$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$$

(2) لتكن  $M$  صورة العدد المركب  $z$  في المستوي المنسوب إلى

$$\text{المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{u}; \vec{v}).$$

أ- عين مجموعة النقط  $M$  بحيث يكون  $f(z)$  عددا حقيقيا

سالبا تماما.

ب- احسب العدد المركب  $z_0$  بحيث:  $|f(z_0)| = 1$

$$\text{و } \arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$$

(3) في المستوي المركب نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  صور

الأعداد المركبة 1،  $i$  و  $z_0$  على الترتيب.

أ- ما نوع المثلث  $ABC$ ؟

ب- عين النقطة  $D$  نظيرة  $C$  بالنسبة إلى المستقيم  $(AB)$  و

استنتج طبيعة الرباعي  $ACBD$ .

التمرين 53: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2008 الموضوع I، رياضي)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحتقيهما  $\sqrt{3} - i$  و  $\sqrt{3} + 3i$

على الترتيب.

1. أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $O$

ويحوّل  $A$  إلى  $B$

ثم عين زاويته ونسبته.

2. نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي:

$$A_0 = A \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, A_{n+1} = S(A_n)$$

نرمز إلى لاحقة  $A_n$  بالرمز  $z_n$ .

أ) أنشئ في المستوي المركب النقط  $A_0$ ،  $A_1$  و  $A_2$ .

ب) برهن أن:  $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

ج) عين مجموعة الأعداد الطبيعية  $n$  التي تنتمي من أجلها

النقطة  $A_n$  إلى المستقيم  $(OA_1)$ .

3. نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي  $u_0 = A_0 A_1$  و

$u_n = A_n A_{n+1}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

أ) بين أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول

$u_0$  وأساسها  $q$ .

ب) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج) احسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

التمرين 54: (05 نقاط) الأعداد المركبة (دورة جوان

2008 الموضوع II، رياضي)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  كثير الحدود  $P(z)$

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

(1) بين أنه إذا كان  $a$  جذرا لكثير الحدود  $P(z)$  فإن  $\frac{1}{a}$

جذر له أيضاً.

(2) تحقق أن  $1+i$  جذر لكثير الحدود  $P(z)$ .

(3) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z) = 0$ .

(4) اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

(5) لتكن  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  النقط من المستوي المركب

المنسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  والتي

لاحقاتها على الترتيب:  $1+i$ ،  $-1+i$ ،  $-\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$  و

$\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$  حيث  $m$  عدد حقيقي. عين  $m$  حتى يكون الرباعي

$ABCD$  مربعاً.

بوعزة مصطفى.