إعداد: عبد المطلب

تقني رياضي

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

تمرين1

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن مجموعهما يساوي 99 وقاسمهما المشترك الأكبر يساوي 11.

(55،44)	(77،22)	(88،11)	(44،55)	(22،77)	(11،88)

تمرين2

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن جداءهما يساوي 2700 وقاسمهما المشترك الأكبر يساوي 6.

(150،18)	(450،6)	(18،150)	(6،450)

تمرين3

1- حلل العدد الطبيعي 975 إلى جداء عوامل أولية.

2- عين عددين طبيعيين a و b أوليان فيما بينهما حيث:

$$a \times b = 975 \quad و \quad a > b$$

(39،25)؛(75،13)؛(325،3)؛(975،1)	$13 \times 5 \times 5 \times 3$

تمرين4

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 13 وأكبر هذين العددين يساوي 117.

(104،117)	(91،117)	(65،117)	(52،117)	(26،117)	(13،117)
(117،104)	(117،91)	(117،65)	(117،52)	(117،26)	(117،13)

تمرين5

1- حلل العدد الطبيعي 1432 إلى جداء عوامل أولية.

2- عين مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5728 \\ PGCD(x,y) = 2 \end{cases}$$

(362،354) ؛ (718،714)	$179 \times 2 \times 2 \times 2$

تمرين6

α و β عددان طبيعيان.

1- عين مجموعة الأزواج (α,β) بحيث $\alpha \times \beta = 51$.

2- استنتج مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

أ) $x^2 - y^2 = 51$

ب) $x.y + 2x - 51 = 0$

ج) $x.y - 3x + 3y = 60$

(26،25) ؛ (10،7)	(17،3) ؛ (3،17) ؛ (51،1) ؛ (1،51)
(14،6) ؛ (0،20) ؛ (48،4)	(17،1) ؛ (3،15) ؛ (1،49)

تمرين7

عين كل الثنائيات $(x\,,y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق:

1) $(x-1)(2y-3) = 11$

2) $4x^2 - y^2 = 36$

3) $x^2y + xy^2 + 2 = 0$

4) $x^2 + 5y^2 = 45$

(-5،8) ؛ (-5،-8) ؛ (5،-8) ؛ (5،8) ؛ (-3،0) ؛ (3،0)	(-10،1) ؛ (0،-4) ؛ (12،2) ؛ (2،7)
(0،-3) ؛ (-5،-2) ؛ (-5،2) ؛ (5،-2) ؛ (5،2) ؛ (0،3)	(2،-1) ؛ (-1،2) ؛ (-1،-1)

تمرين8

1- حلل العدد 608 إلى جداء عوامل أولية.

2- α و β عددان طبيعيان.

نضع: $a = \alpha + 2\beta$ و $b = 2\alpha + 3\beta$

بين أن $PGCD\,(a\,,b) = PGCD\,(\alpha\,,\beta)$

3- عين مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

$$\begin{cases} (x+2y)(2x+3y) = 9728 \\ PGCD(x,y) = 4 \end{cases}$$

(28،24)	$19 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

تمرين9

n ، a و b أعدادا طبيعية. عين قيم العدد n بحيث a يقسم b في كل حالة من الحالات التالية:

1) $a = n+1$ و $b = n+5$ حيث $n \geq 0$.

2) $a = n-1$ و $b = 2n+3$ حيث $n > 1$.

3) $a = n-2$ و $b = n^2 + 3n + 4$ حيث $n > 2$.

16 ، 9 ، 4 ، 3	6 ، 2	3 ، 1 ، 0

تمرين10

n عدد طبيعي غير معدوم. ليكن: $a = 3n - 2$ و $b = n + 5$

1- عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

2- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون الكسر $\dfrac{a}{b}$ قابلا للاختزال (العددان a و b غير أوليان فيما بينهما).

3- عين قيم n حتى يكون الكسر $\dfrac{a}{b}$ عددا طبيعيا.

4- أثبت أن العددين: $a + 6$ و $2b - 7$ أوليان فيما بينهما.

12	17k+12	17 ، 1

تمرين11

نعتبر العددين: $a=3n-1$ و $b=5n-4$، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

1- ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـــ a و b. عين قيم d.

2- بين أنه إذا كان $d=7$، فإن العدد 7 يقسم العدد $n+2$.

3- عين قيمتي a و b حتى يكون $d=7$.

$7 ، 1$	$b=35k-14\ ;\ a=21k-7$

تمرين12

n عدد صحيح. نضع: $a=n-2$ و $b=2n^2-7n+17$.

1- عين قيم العدد n بحيث b يقبل القسمة على a.

2- ليكن $(\mathscr{C})$ منحني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$-{2} بـــ:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x+17}{x-2}$$

عين نقط المنحني $(\mathscr{C})$ التي إحداثياها أعدادا صحيحة.

$(3،14)$ ؛ $(13،24)$ ؛ $(1،-12)$ ؛ $(-9،-22)$

تمرين13

n عدد طبيعي. نضع: $a=n+3$ و $b=2n^2+7n+4$.

1- بين أن العدد a يقسم العدد $2n^2+7n+3$.

2- استنتج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

3- عين قيم العدد n بحيث a يقسم العدد $b+7$.

$5 ، 1$

تمرين14

n عدد طبيعي.

1- بين أن العددين: $a=n^2+5n+6$ و $b=n^2+6n+8$ يقبلان القسمة على $n+2$.

2- بين أن $n+2$ هو القاسم المشترك الأكبر لـــ a و b.

3- عين قيم العدد n بحيث العدد $c=2n^2+5n+11$ يقبل القسمة على $n+2$.

4- استنتج أن العدد c غير قابل للقسمة على a و b.

$7 ، 1$

تمرين15 بكالوريا 2008 تقني رياضي

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1- a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$.

أ) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

ج) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD\,(a\,;b)=7$.

2- نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:

$$p=2n^2-7n-15 \quad \text{و} \quad q=n^2-7n+10$$

أ) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب) عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD\,(p\,;q)$.

$7 ، 1$	$7k-5$	$d=n-5$ أو $d=7(n-5)$

تمرين16

1- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 8044 و 4022.

2- عين أصغر عدد طبيعي x ، متكون من أربعة أرقام بحيث: باقي قسمة العدد 4024 على x هو 2 ، و باقي قسمة العدد 8048 على x هو 4.

2011

تمرين17

1- أثبت أن عددين طبيعيين متتاليين أوليان فيما بينهما.

2- بين أنه إذا كان a و b عددين أوليين فيما بينهما، فـــإن $a+b$ و $a\times b$ كذلك أوليان فيما بينهما.

3- استنتج أن الكسر $\dfrac{2n+1}{n^2+n}$ غير قابل للاختزال.$(n\in\mathbb{N})$

4- عين قيمة العدد n حتى يكون $\dfrac{2n+1}{n^2+n}=\dfrac{15}{56}$.

7

تمرين18 بكالوريا

n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العـــددين $\mathrm{N}=9n+1$ و $\mathrm{M}=9n-1$.

1- نفرض أن n زوجي. نضع $n=2p$، حيـــث p عـــدد طبيعي غير معدوم.

أ) بين أن M و N عددان فرديان.

ب) بملاحظة أن $\mathrm{N}=\mathrm{M}+2$ ، عين $PGCD\,(\mathrm{M}\,;\mathrm{N})$.

2- نفرض أن n فردي. نضع $n=2p+1$، حيث p عـــدد طبيعي.

أ) بين أن M و N عددان زوجيان.

ب) بملاحظة أن $\mathrm{N}=\mathrm{M}+2$ ، عين $PGCD\,(\mathrm{M}\,;\mathrm{N})$.

3- n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العدد $81n^2-1$.

أ) عبر عن $81n^2-1$ بدلالة M و N.

ب) بين أنه إذا كان n زوجي فإن $81n^2-1$ فردي.

ج) بين أن $81n^2-1$ مضاعف لـــ 4 إذا وفقط إذا n فردي.

إعداد: عبد المطلب

الموافقات في $\mathbb{Z}$

Congruence

تمرين1

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 5.

2- ما هو باقي قسمة العدد 123^{456} على 5؟

3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد: $48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1$ مضاعفا للعدد 5.

4- عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $3^{4n}+3^n-4$ قابلا للقسمة على 5.

4k+1	1

تمرين2 بكالوريا 2010 تقني رياضي

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.

2- تحقق أن: $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0\ [13]$.

3- عين قيم n بحيث يكون: $10^{2n}+10^n+1\equiv 0\ [13]$.

6k+4 ; 6k+2

تمرين3

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 9.

2- ليكن: $a=925^{34}$ و $b=88^{3n+2}$

أ) عين باقي قسمة العدد: $2a-3b-39$ على 9.

ب) عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $a-b+3n\equiv 0\ [9]$.

3- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $7^{2n}+7^n+7\equiv 0\ [9]$.

3k+2	8

تمرين4

1- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11.

2- عين قيم الأعداد الطبيعية n بحيث يكون:

أ) $100^n+97^{n+1}+5$ مضاعفا للعدد 11.

ب) $9^{5n+2}+n^2-16$ مضاعفا للعدد 11.

3- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد: $\alpha=2\times10^n+2012^{1433}-10$ على 11.

9 أو 2	11k+10 ; 11k+1	5k+3

تمرين5

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 4^n و 5^n على 7.

2- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*$ فإن: $39^{3n+2}+40^{6n-5}\equiv 0\ [7]$.

3- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة كل من العددين 4^n و 5^n على 7 هو 1.

4- حل في $\mathbb{N}$: $1432^x+1433^x+1434^x\equiv 0\ [7]$.

6k+4 ; 6k+2	6k

تمرين6

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 9.

2- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $24^{98n}+25^{99n}+26\equiv 0\ [9]$.

3- عين قيم n بحيث يكون: $-8^{2n+1}+n^2-3n\equiv 5\ [9]$.

4- عين الأعداد الصحيحة λ التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases}5^{6n+2}+4\lambda\equiv 0\ [9]\\ -13<\lambda\le 30\end{cases}$$

$\lambda=\{-4,5,14,23\}$	9k+8 ; 9k+4

تمرين7

1- نعتبر العددان الطبيعيان: $a=\overline{413}^{(5)}$ و $b=\overline{102}^{(3)}$.

أ) اكتب كل من a و b في النظام العشري.

ب) احسب في النظام ذي الأساس 7 العددين $a+b$ و $a\times b$.

2- عين العدد x في الحالتين التاليتين:

أ) $\overline{12}^{(x)}\times\overline{34}^{(x)}=\overline{452}^{(x)}$ ب) $\overline{xxx}^{(9)}=\overline{52\alpha}^{(11)}$

7	6	$\overline{3315}^{(7)}$	$\overline{230}^{(7)}$	108	11

تمرين8 بكالوريا 2010 تقني رياضي

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n=\overline{11\alpha00}$ حيث α عدد طبيعي.

1- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3- نأخذ $\alpha=4$ اكتب العدد n في النظام العشري.

2940	4	4	4 , 1

إعداد: عبد المطلب

تقني رياضي

القواسم والمضاعفات

Diviseurs et multiples communs

تمرين 1

1- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $3x-8y=1$.

لاحظ أن الزوج $(3,1)$ حلها الخاص.

2- من بين حلول هذه المعادلة عين تلك التي تحقق:

$$y^2-x=5$$

3- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة الجملة التالية:

$$\begin{cases}21x-56y=7\\ -5\le x<27\end{cases}$$

(-5,-2);(3,1);(11,4);(19,7)	(11,4)	(8k+3,3k+1)

تمرين 2

1- عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد التالية:

2189 ، 1393 ، 398.

2- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $2189x+1393y=398$

لاحظ أن الزوج $(-3,\alpha)$ حلها الخاص، حيث α عدد صحيح يطلب تعيينه.

3- من بين حلول المعادلة السابقة عين تلك التي تحقق:

أ) $x<11$ و $y<18$

ب) $x^2+6y-39<0$

(4,-6);(11,-17)	(-10,16);(-3,5);(4,-6)	(7k-3,-11k+5)

تمرين 3

1- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E): $85x-51y=0$

2- من بين حلول المعادلة (E) عين الثنائيات (x,y) والتي تحقق: $|x-y|\le 4$

3- حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلتين التاليتين:

أ) $85x-51y=867$

ب) $85x+51y=867$

(-6,-10);(-3,-5);(0,0);(3,5);(6,10)	(3k,5k)
(9,2);(6,7);(3,12);(0,17)	(3k,5k-17) k≥4

تمرين 4

1- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية:

$$95(x-2)=76(y+1)\quad ...\quad [I]$$

2- من بين حلول المعادلة [I] عين الثنائيات (α,β) والتي تحقق: $\alpha^2\equiv\beta[5]$.

3- حل في مجموعة الأعداد الطبيعية الجملة التالية:

$$\begin{cases}5(2-x)=-4(y+1)\\ x^2-y^2\ge 0\end{cases}$$

(14,14);(10,9);(6,4)	(20k'+2,25k'-1);(20k'-2,25k'-6)	(4k+2,5k-1)

تمرين 5 بكالوريا

1- أثبت أن العددين 993 ، 170 أوليان فيما بينهما.

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين x و y حيث: $993x-170y=143$

أ) عين الحل الخاص (x_0,y_0)، للمعادلة (E) بحيث: $x_0+y_0=6$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3- أوجد أصغر عدد طبيعي a بحيث يكون باقي قسمة العدد $(a-1)$ على كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب.

2001	(170k+1,993k+5)	(1,5)

تمرين 6

1- عين الأعداد الصحيحة x بحيث: $7x\equiv-19[9]$

2- استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة:

$$7x-9y=-19\quad ...\quad [I]$$

3- من بين حلول المعادلة [I] عين تلك التي تحقق:

$x\equiv 0[y]$ (أي y يقسم العدد x)

4- نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2\alpha 5}$ في نظام العد ذي الأساس 7، ويكتب $\overline{1\beta 3}$ في نظام العد ذي الأساس 9. عين α و β ثم اكتب n في النظام العشري.

n=138 , β=6 , α=5	(-4,-1)	(9k+5,7k+6)	9k+5

تمرين 7

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة:

$$7x+13y=119\quad ...\quad [I]$$

1- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة [I] فإن y مضاعف للعدد 7. استنتج جميع حلول المعادلة [I].

2- عين الأعداد الطبيعية α ، β و γ (غير معدومة) حيث:

$$\overline{\alpha\gamma 1}^{(6)}+\overline{1\beta 3\beta}^{(8)}=\overline{32\gamma\alpha}^{(7)}$$

γ=5 , β=7 , α=4	(-13k+17,7k)

تمرين8

1- بين أن العددين 27 و 22 أوليان فيما بينهما.

- باستعمال خوارزمية إقليدس، عين عددين صحيحين a و b يحققان: $27a+22b=1$

2- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $405x-330y=15$

3- استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حل الجملة التالية:

$$\begin{cases}\lambda\equiv 0\,[27]\\ \lambda\equiv 1\,[22]\end{cases}$$

594k′+243	(22k+9,27k+11)	(9,-11)

تمرين9

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلتين:

$$2011x'-2010y'=-1\ \ .\ .\ .\ [I]$$

$$2011x-2010y=3\ \ .\ .\ .\ [II]$$

1- أثبت أن عددين طبيعيين متتابعين أوليان فيما بينهما.

2- عين حلا خاصا للمعادلة [I].

استنتج حلا خاصا للمعادلة [II].

3- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة [II].

4- لتكن (x,y) حلول المعادلة [II] في مجموعة الأعداد الطبيعية و d القاسم المشترك الأكبر لـ (x,y).

- ما هي القيم الممكنة للعدد d؟
- عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة [II] بحيث يكون x و y غير أوليين فيما بينهما.

(6030l+3,6033l+3)	3 ,1	(2010k+3,2011k+3)	(3,3)	(-1,-1)

تمرين10

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة:

$$4\alpha-7\beta=3\ \ .\ .\ .\ [I]$$

1- عين حلا خاصا لهذه المعادلة وليكن (α_0,β_0) حيث $0<\alpha_0<7$ ثم استنتج جميع حلولها.

2- استنتج مما سبق حلول المعادلة التالية:

$$68x-119y=102\ \ .\ .\ .\ [II]$$

حيث x و y عددان طبيعيان.

3- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y حلول المعادلة [II]. ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

4- عين كل الثنائيات (α,β) حلول المعادلة [I] بحيث يكون $PGCD\,(\alpha\,;\beta)=1$.

(7k′+12,4k′+6) k′≥-1	(7k+6,4k+3) k≥0	(6,3)
(21l+13;12l+7);(21l+20,12l+11) l≥0	6,3;2;1	

تمرين11 بكالوريا

1- حلل العدد الطبيعي 1995 إلى جداء عوامل أولية.

2- عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية والتي تحقق: $x+7y=1995$ و $PGCD\,(x\,;y)=19$.

(1862,19);(1729,38);(1463,76);(931,152);(532,209);(266,247)

تمرين12

x و y عددان طبيعيان؛ d قاسمهما المشترك الأكبر و m مضاعفهما المشترك الأصغر. عين كل الثنائيات (x,y) في كل حالة من الحالات التالية:

1- $\begin{cases}d=3\\ m=120\end{cases}$ **2**- $\begin{cases}m-d=9\\ x\le y\end{cases}$

3- $\begin{cases}x+y=30\\ m+6d=45\end{cases}$ **4**- $\begin{cases}-d+m=y+18\\ d\ge 9\end{cases}$

(9,18);(3,12);(2,5);(1,10)	(24,15);(120,3);(15,24);(3,120)
(18,27);(36,9);(54,18)	(27,3);(3,27)

تمرين13 جامعة التكوين المتواصل

1- أ) حلل العدد الطبيعي 1996 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين مجموعة قواسم العدد 1996.

بين أن جداء قواسم 1996 هو $8(998)^3$.

ج) أوجد العددين الطبيعيين الذي مربع كل منهما يقسم العدد 1996.

2- عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m^2+49d^2=1996$، حيث m هو المضاعف المشترك الأصغر لـ x و y و d هو القاسم المشترك الأكبر لـ x و y. ملاحظة: 499 عدد أولي.

(30,2);(10,6);(6,10);(2,30)	2 ; 1	1996,998,499,4,2,1

تمرين14

حافلة صغيرة لنقل المسافرين بها 16 راكبا مصنفون إلى 3 أصناف: مجموعة دفعت 20 دج (صنف a) ومجموعة أخرى دفعت 15 دج (صنف b) أما المجموعة الثالثة فلم تدفع شيئا (صنف c). إذا علمت أن المبلغ الإجمالي المدفوع هو 285 دج، احسب عدد الركاب من كل صنف.

1 ; 3 ; 12