



$$\pi \quad \bar{z} = a - ib$$

الرياضيات

شعبة علوم تجريبية

بكالوريا

الأستاذ عبد الحميد بوقطوف



05 56 24 69 06

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

﴿ هذه التمارين مقترحة من دورات البكالوريا من 2008 إلى 2015 ﴾

التمرين 1: ﴿ دورة جواه 2008 - الموضوع الأول ﴾

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$
نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث: $|z_1| < |z_2|$

- بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A, B, C , نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $1, z_1, z_2$.

ليكن Z العدد المركب حيث: $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$

أ- انطلاقا من التعريف: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ و من الخاصية: $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$
برهن أن: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ حيث: $\theta, \theta_1, \theta_2$, أعداد حقيقية.
ب- أكتب Z على الشكل الأسّي.

ج- أكتب Z على الشكل المثلثي، واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A , يطلب تعيين زاويته ونسبته.

التمرين 2: ﴿ دورة جواه 2008 - الموضوع الثاني ﴾

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

(2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$, النقطتين A و B اللتين لاحقتهما

$z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$ حيث:

- عين لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

(3) لتكن النقطة C ذات اللاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$

- أكتب z_C على الشكل الجبري، ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

(4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(Z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة

$M(Z)$ النقطة $M'(Z')$ هي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

ب- تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ: $z' - \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$

التمرين 3: ﴿ دورة جواه 2009 - الموضوع الأول ﴾

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و Z عدد مركب.

(1) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $P(Z) = 0$

(2) نضع: $Z_1 = 1 + i$ و $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسّي.

ب- أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج- استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

...بصياحتها...
...وآثارها...
...نجاحها

(3) $n-1$ عدد طبيعي. عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب- أحسب قيمة العدد: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

التمرين 4: ﴿ دورة جواه 2009 – الموضوع الثاني ﴾

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$

(2) نسمي z_1, z_2 حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الآسي.

ب- A, B, C هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب:

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}), \quad z_B = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

($i^2 = -1$)

أحسب الأطوال AB, AC, BC , ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- جد الطويلة وعمدة العدد المركب Z حيث: $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

د- أحسب Z^3 و Z^6 , ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

التمرين 5: ﴿ دورة جواه 2010 – الموضوع الأول ﴾

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحتيهما على الترتيب:

$$z_B = 3i \quad \text{و} \quad z_A = 1 + i$$

(1) أكتب على الشكل الآسي z_A و z_B .

(2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = 2iz + 6 + 3i$

أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب- عين z_C للاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) لتكن النقطة D مرجح الجملة: $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$

أ- عين z_D للاحقة النقطة D .

ب- عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

(4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحتها z وتلك (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون

من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة: $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

ب- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$, عين حينئذ المجموعة (Δ) .

التمرين 6: ﴿ دورة جواه 2010 – الموضوع الثاني ﴾

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0$, ثم أكتب الحلين على الشكل الآسي.

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$, نعتبر النقط A, B, C و D لاحتها على الترتيب:

$$z_D = -z_B \quad \text{و} \quad z_C = -z_A, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = 3 + 3i$$

أ- بين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب- عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B .

ج- بين أن النقط A, O و C في استقامة، وكذلك النقط B, O و D .

د- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين 7: ﴿ دورة جواه 2011 – الموضوع الأول ﴾

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ، B و C التي لاحتقاتها على الترتيب:

$$z_C = -4 + i \quad \text{و} \quad z_B = 2 + 3i \quad , \quad z_A = -i$$

(1) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

ب- عين طولية العدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب- ماهي صورة النقطة B بالتحويل T .

(3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة: $z_D = -6 + 2i$

أ- بين أن النقط A ، C و D في استقامة.

ب- عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C إلى النقطة D .

ج- عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة D .

التمرين 8: ﴿ دورة جواه 2011 – الموضوع الثاني ﴾

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ، B و C التي لاحتقاتها على الترتيب:

$$z_C = 4i \quad \text{و} \quad z_B = 3 + 2i \quad , \quad z_A = 3 - 2i$$

(1) أ- علم النقط A ، B و C .

ب- ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؛ علل إجابتك.

ج- عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

(2) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$

(3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$

نسمي z_0 و z_1 حلي هذه المعادلة.

ب- لتكن M نقطة من المستوي لاحتقتها العدد المركب z .

- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$

التمرين 9: ﴿ دورة جواه 2012 – الموضوع الأول ﴾

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث: $z \neq 2 - 3i$)

- حل في \mathbb{C} هذه المعادلة.

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A و B نقطتان لاحتقاتهما على الترتيب: z_B و z_A

$$z_B = 1 - i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_A = 1 + i\sqrt{5}$$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحتقتها z ، $(z \neq 2 - 3i)$ النقطة M' لاحتقتها z' حيث: $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقتها على الترتيب: $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ ، و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

- تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين 10: ﴿ دورة جواه 2012 – الموضوع الثاني ﴾

(1) كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $P(z) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C نقط من المستوي المركب لواقعها على

الترتيب: $z_A = 6$, $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

أ- أكتب كلا من z_A, z_B, z_C على الشكل الآسي.

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الآسي.

ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب- عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

ج- بين أن النقط A, B, A' في استقامة.

التمرين 11: ﴿ دورة جواه 2013 – الموضوع الأول ﴾

(1) حل في \mathbb{C} مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$$(1) \dots\dots\dots z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \text{ حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي.}$$

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ: z_1 و z_2 .

$$\text{- بين أن: } 1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}$$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B و C التي لاحقاتها:

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 4 + i\sqrt{3} \text{ على الترتيب.}$$

أ- أنشئ النقط A, B و C .

ب- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب

تعيين نسبته وزاويته.

ج- عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$ ، ثم أنشئ G .

د- أحسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين 12: ﴿ دورة جواه 2013 – الموضوع الثاني ﴾

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: $z^2 + 4z + 13 = 0 \dots\dots\dots (E)$

(1) تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحتاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي

مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

$$\text{أ- بين أن: } z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

ب- أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

$$(3) \text{ لتكن النقطة } D, \text{ حيث: } 2\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{0}$$

أ- بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب- أحسب z_D لاحقة النقطة D .

ج- بين أن: $i = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين 13: دورة جواه 2014 – الموضوع الأول

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A, B, C, D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_D = \frac{z_C}{2}$ و $z_C = 6\sqrt{2}$, $z_B = \bar{z}_A$, $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$.
- أ- أكتب z_A, z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الآسي.

ب- أحسب: $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

ج- بين أن النقط O, A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D . يطلب تعيين نصف قطرها.

د- أحسب: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. ثم جد قياسا للزاوية $(\vec{CA}; \vec{CB})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

(3) ليكن الدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- أكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب- عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R . ثم تحقق أن النقط A, C, C' في استقامة.

ج- عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R . ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين 14: دورة جواه 2014 – الموضوع الثاني

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z حيث: $(z-i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول 1 cm)، تعطى النقط A, B, C التي لاحقاتها: $z_A = i$, $z_B = 1 + 2i$ و $z_C = 1 - 2i$ على الترتيب.

أ- أنشئ النقط A, B و C .

ب- جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

ج- أحسب مساحة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عين الكتابة المركبة للتشابه S .

ب- بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}\text{ cm}^2$.

ج- M نقطة لاحقتها z . عين مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz + 1 + 2i|$

التمرين 15: دورة جواه 2015 – الموضوع الأول

(I) عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{و} \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الآسي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ب- تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

(2) النقطة ذات اللاحقة: $z_D = 1 + i$

أ- حدد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A .

ب- أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يسمح \mathbb{R}^+ .

في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A, z_B, z_C \text{ حيث: } z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, z_B = -\bar{z}_A, z_C = -(z_A + z_B), (\bar{z}_A \text{ هو مرافق } z_A).$$

- (1) أ- أكتب كلا من العددين المركبين z_C و z_B على الشكل الأسّي.
 ب- استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
 ج- أنشئ الدائرة (γ) والنقط A ، B و C .

$$(2) \text{ أ- تحقق أن: } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

- ب- استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع، وأن النقطه O مركز ثقل هذا المثلث.
 ج- عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

- (3) أ- عين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .
 ب- أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

تخطيطي...
 التتبع...
 نجاح