

تمرين 01:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B, C نقاط لواحقها $z_A = 1+2i, z_B = -1-4i, z_C = -5i$.

- (1) عيّن لاحقة النقطة D حتى تكون A مركز ثقل المثلث BCD .
- (2) عيّن لاحقة النقطة H حتى يكون $ABCH$ متوازي أضلاع.
- (3) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;2), (C;-1)\}$.

تمرين 02:

$$z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$$

(1) اكتب z على الشكل الجبري، ثم على الشكل المثلثي.

(2) استنتج قيمتي $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

(3) اكتب z^{2010} على الشكل الجبري.

تمرين 03:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 6z + 12 = 0$.

2. نعتبر العددين المركبين $a = 3+i\sqrt{3}$ ، $b = 3-i\sqrt{3}$.

اكتب a على الشكل المثلثي ثم الشكل الأسّي، ثم احسب $\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^{2012}$.

3. A, B نقطتان من المستوي لاحقتاهما a و b على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

أ - بيّن أنّ المثلث ABO متقايس الأضلاع، ثم عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABO .

ب - لتكن المجموعة (E) للنقط M من المستوي حيث: $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24$.

- تحقق أنّ النقطة A عنصر من (E) .

ج - بيّن أنّ (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

تمرين 04:

(1) $p(z) = z^3 + z^2 - 4z - 24$ عدد مركب حيث

احسب $p(3)$ ، ثم حل في \mathbb{C} المعادلة: $p(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقط ذات اللاحقات $z_A = 3, z_B = -2+2i, z_C = -2-2i, z_D = -1-10i$.

(أ) احسب الأطوال BC, AC, AB ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|z+2+2i| = |z+2-2i|$.

(ج) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D ، ثم عين نسبته وزاويته.

تمرين 05:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1- حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

- 2- نعتبر النقطتين A و B لاحتقاهما على الترتيب: $a = 4\sqrt{3} - 4i$ و $b = 4\sqrt{3} + 4i$.
 - أكتب العددين a و b على الشكل الأسّي.
 3- احسب المسافات OA ، OB و AB ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .
 4- نرمز بـ C إلى النقطة التي لاحتقتها $c = -\sqrt{3} + i$ ولتكن النقطة D صورة النقطة C بواسطة الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.
 - عيّن لاحقة النقطة D .
 5- نسمي G مركز المسافات المتناسبة للنقط O ، D ، B ، المرفقة بالمعاملات 1 ، 1 ، -1 على الترتيب
 أ- برّر وجود G ثم بيّن أنّ هذه النقطة لاحتقتها $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
 ب- أنشئ النقط A ، B ، C ، D و G في المعلم.
 ج- برهن أنّ النقط C ، D و G على استقامة واحدة.
 د- برهن أنّ الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.
 6- أ- بيّن أنّ: $\frac{z_C - z_G}{z_A - z_G} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
 ب- ماهي طبيعة المثلث AGC .

تمرين 06:

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب
 $z_A = 1+i$ ، $z_B = 2-i$ و $z_C = 3+2i$.
 1) احسب لاحتقتي الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} .
 2) فسّر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 3) بيّن أنّ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 4) عيّن لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ثم احسب نصف قطرها.
 - احسب مساحة المثلث ABC .
 5) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون $ABDC$ مربّعاً.

تمرين 07:

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 1) A ، B نقطتين من المستوي لاحتقيهما على الترتيب: $z_A = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ و $z_B = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.
 أ) عيّن اللاهقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O .
 ب) عيّن اللاهقة z_I للنقطة I منتصف القطعة $[AC]$.
 ج) عيّن اللاهقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I .
 د) أنشئ النقاط A ، B ، C ، D و I .
 1) أ) فسّر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

$$(ب) \text{ تحقق أن: } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(ج) ماذا يمكن القول عن القطعتين $[AC]$ و $[BD]$ ؟

(3) ماهي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

(4) بين أن النقاط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها r .

(5) لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل

(أ) عيّن لاحقة النقطة E .

(ب) احسب الجداء $\overline{BD \cdot BE}$.

(ج) ماذا يمثل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة (γ)؟

تمرين 08:

(1) نعتبر العددين المركبين $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 1 - 2i$

(أ) تحقق أن $z_1 + \overline{z_2} = 4(1 + i)$.

(ب) اكتب العدد $z_1 + \overline{z_2}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسّي.

(ج) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_1 + \overline{z_2})^n$ حقيقياً.

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B, C و D التي لواحقها على

الترتيب: $z_A = 3 + 2i, z_B = -3, z_C = 1 - 2i$ و $z_D = -1 - 6i$.

(أ) عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) عيّن لاحقة النقطة E صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

ج - مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (D; 1)\}$.

- عيّن لاحقة النقطة G ، ثم بين أن $ABDG$ مربع.

(3) (F) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MD}\| = 4\sqrt{5}$

(أ) تحقق أن B تنتمي إلى (F) .

(ب) عيّن ثم أنشئ (F) .

تمرين 09:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط: A, B, I و

لواحقها على الترتيب: $z_A = 2 + i, z_B = 4 + 3i, z_I = 2 - i$.

أ - عيّن لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة I ونسبته 3.

ب - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$.

ج - بين أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = iz + 5 + i$.

ب - ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة.

ج - عین النقطتين $r(A)$ و $r(C)$.د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.**تمرين 10:**المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.أ، B و C نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = 2\sqrt{3}$ ، $z_C = 2i$ (1) عین الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A .(2) أ) احسب طويلة كل من الأعداد المركبة التالية: $z_A - z_C$ ، $z_B - z_A$ و $z_C - z_B$.ب) عین لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ، وحدد نصف قطر هذه الدائرة.ج) بين أن النقطة O تنتمي للدائرة (Γ) .(3) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.أ) بين أن $z_D = \sqrt{3} - i$.ب) احسب لاحقة منتصف القطعة $[AD]$.ج) عین طويلة العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$.د) ماهي طبيعة الرباعي $ABDC$.**تمرين 11:**نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي: $P(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$ (1) بين أنه من كل عدد مركب z لدينا: $P(z) = (z + 4)(2z^2 + 6z + 17)$ (2) حل في \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$.(3) لتكن النقط A ، B ، C من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ والتي للاحقاتها على الترتيب: $z_A = -4$ ، $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ و $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$.أ) اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي f الذي يحقق الشرطين $f(A) = A$ و $f(C) = B$.ج) عین لاحقتي كل من النقطتين D و E حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعاً مركزه A .**تمرين 12:**1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $4z^2 - 12z + 153 = 0$.2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و P التي لواحقتها علىالترتيب: $z_A = \frac{3}{2} + 6i$ و $z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ، $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ و $z_P = 3 + 2i$ والشعاع \vec{w} حيث: $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.أ - عین لاحقة z_Q لاحقة Q صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه \vec{w} .ب - عین z_R لاحقة R صورة P بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته $-\frac{1}{3}$.

ج - عيّن z_S لاحقة S صورة P بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

د - علم النقط P, Q, R, S .

3. أ - برهن أنّ $PQRS$ متوازي أضلاع.

ب - احسب $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $PQRS$.

ج - تحقق أنّ النقط P, Q, R, S تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين لاحقة مركزها ونصف قطرها.

تمرين 13:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقطتين A, B صورتين العدديين المركبين

$z_A = 4 + 2i$ و $z_B = 3 - i$ على الترتيب.

أ - بين أنّ المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ب - عيّن مركز وزاوية الدوران R الذي يحول A إلى B ويحول B إلى O .

ج - لتكن النقطة C صورة O بهذا الدوران

- ماهي طبيعة الرباعي $ABOC$.

تمرين 14:

نعتبر العددين المركبين: $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

A, B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_A, z_B, z_C .

(1) بين أنّ المثلث ABO متساوي الساقين ثم عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقله.

(2) بين أنّه يوجد دوران T يحول O إلى G ويحول A إلى C يُطلب تعيين مركزه وزاويته.

(3) استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T .

تمرين 15:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن A نقطة لاحقها: $z_A = i$ و B لاحقها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

(1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، نسمي C صورة B بواسطة r .

أ - اعط الكتابة المركبة لـ r ثم عيّن z_C - الشكل الأسّي - لاحقة C .

ب - اكتب كلا من z_C و z_B على الشكل الجبري.

ج - علم النقط A, B, C .

(2) لتكن D مرجح النقط A, B, C المرفقة على الترتيب بالمعاملات $2, -1$ و 2 .

أ - عيّن z_D لاحقة D

ب - بين أنّ A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

(3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H .

- اعط الكتابة المركبة لـ H ثم عيّن z_E لاحقة E ، ثم علم E .

(4) أ - احسب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ ، تعطى الكتابة على الشكل الأسّي.

ب - استنتج طبيعة المثلث CDE

تمرين 16:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B ، C نقط من المستوي

$$\text{لاحقاتها على الترتيب: } z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ ، } z_C = z_A + z_B$$

- أ - اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A ، z_B ، $\frac{z_A}{z_B}$.
- ب - عين لاحقة كل من A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ج - بين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$.
- أ - بين أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب - بين أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i$ عدنان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين).

تمرين 17:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،

1 (حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2z + 4 = 0$)

- 2) نسمي A ، B النقطتان التي لاحقتاهما $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ - عين الطويلة وعمدة لكل من العددين z_A و z_B .

ب - أعط الشكل الأسّي للعدد z_A .

- 3) نسمي R التحويل النقطي في المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z'

$$\text{حيث: } z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$$

أ - ما طبيعة التحويل R ، عين عناصره المميزة.

- ب - نسمي C صورة النقطة A بالتحويل R ، أعط الشكل الأسّي للعدد المركب z_C لاحقة النقطة C .

ثم استنتج الشكل الجبري للعدد z_C .

ج - بين أن النقطة B هي صورة النقطة C بالتحويل R . ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

تمرين 18:

1) $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

(أ) تحقق أن العدد i جذر لكثير الحدود $P(z)$.

(ب) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - i)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

(ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$.

- 2) نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب:

$$z_A = i \text{ ، } z_B = 2 + 3i \text{ و } z_C = 2 - 3i \text{ على الترتيب.}$$

ليكن الدوران r الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$

- عيّن z_A لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r .

- برهن أنّ النقط A' ، B و C في استقامية، ثمّ عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h الذي مركزه B والذي يحول النقطة C إلى A' .

تمرين 19:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 6z + 13 = 0$

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A = 3 - 2i, \quad z_B = 3 + 2i \quad \text{و} \quad z_C = 4i$$

أ - بيّن أنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

ب - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

(3) عيّن وأنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 12$.

(4) لتكن M نقطة من المستقيم (AB) ؛ نرسم β إلى ترتيب النقطة M .

نضع N صورة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - بيّن أنّ لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$

ب - كيف يجب أن نختار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) .

تمرين 20:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ تعطى النقط A ، B و C و D التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = -3 + 3i, \quad z_C = -1 - 3i \quad \text{و} \quad z_D = -2$$

(1) احسب كلا من: $|z_D - z_A|$ ، $|z_D - z_B|$ و $|z_D - z_C|$ ثمّ استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(2) نضع: $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ احسب طويلة وعمدة العدد L ، ثمّ استنتج نوع المثلث ABC .

(3) نسمة (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z + 3 - 3i| = |z + 1 + 3i|$

أ - تحقق أن $A \in (\delta)$ و $D \in (\delta)$.

ب - عيّن طبيعة المجموعة (δ) ثمّ أنشئها.

(4) لتكن (E) المجموعة للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = z_A + z_B e^{\left(\frac{-3\pi}{4} + q\right)i}$ حيث q عدد حقيقي

أ - أكتب العدد z_B على الشكل الأسّي.

ب - عيّن طبيعة المجموعة (E) عندما يسمح q كل الأعداد الحقيقية.

تمرين 21:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 6z + 13 = 0$

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, Ω التي لواحقها على الترتيب $z_A = 3+2i$ ، $z_B = 3-2i$ و $z_\Omega = 2$

والشعاع \vec{w} ذو اللاحقة $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

- أ - علم النقط A, B, Ω .
 ب - عيّن اللاحقة z_E للنقطة E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه \vec{w} .
 ج - عيّن اللاحقة z_D للنقطة D صورة Ω بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .
 د - عيّن اللاحقة z_C للنقطة C صورة E بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

(3) أ - بين أنّ $ACDE$ متوازي أضلاع.

ب - اكتب العدد المركب $L = \frac{z_A - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري و الأسي.

ج - استنتج طبيعة المثلث EAD .

د - ماهي طبيعة الرباعي $ACDE$ ؟

هـ - استنتج أن النقط A, C, D, E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

تمرين 22:

(1) حل في \mathbb{C} مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$$(1) \dots z^2 - (4\cos \alpha)z + 4 = 0 \text{ حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي.}$$

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرّمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2 . بين أنّ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و

التي لآحقاتها: $z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1-i\sqrt{3}$ و $z_C = 4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ - أنشئ النقط A, B, C .

ب - اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر

الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج - عيّن لآحقة النقطة G مرجح الجملة : $\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$ ، ثم أنشئ G .

د - احسب z_D لآحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

تمرين 23:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2- لتكن النقط M, L, K لواحقها $z_K = 1+i$ ، $z_L = 1-i$ ، $z_M = -i\sqrt{3}$

في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

- علم هذه النقط .

3- (أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L ، عيّن z_N لآحقة N .

(ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C

- عيّن z_A و z_C لآحقتي النقطتين A و C على الترتيب.

- عيّن لاحقة صورة النقطة L بالدوران r .

4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه \vec{u} ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B .

- عيّن z_B و z_D لاحتتي النقطتين D و B على الترتيب.

- عيّن لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t .

5- (أ) بيّن أن: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

تمرين 24:

الجزء الأول:

1- z_1 و z_2 عدنان مركبان. حل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} \sqrt{3}z_1 - z_2 = -2 \\ z_1 - \sqrt{3}z_2 = -2i \end{cases}$$

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = -\sqrt{3} + i$ و $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

- اكتب z_B و z_A على الشكل الأسّي، ثم علم النقطتين A و B .

3- احسب الطويلة وعمدة لـ $\frac{z_A}{z_B}$.

- استنتج طبيعة المثلث ABO وقيسا للزاوية $(\overline{OA}, \overline{OB})$.

4- عيّن لاحقة صورة النقطة C بحيث يكون $ACBO$ معيناً. علم النقطة C ثم احسب مساحة المثلث ABC .

الجزء الثاني:

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

1- عرّف هذا التحويل واعط عناصره المميزة.

2- ماهي على الشكل الأسّي لواحق A' ، B' و C' صور A ، B و C بالتحويل f ؟

3- ماهي مساحة المثلث $A'B'C'$ ؟

تمرين 25:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) : $z^3 - 3z^2 + 3z - 3 = 0$.

1. أ- تحقق أنّ حل للمعادلة (E) ، ثم عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z فإن:

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 3 = (z - 3)(z^2 + az + b)$$

ب- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

النقط A ، B و C صور الأعداد المركبة $z_A = 3$ ، $z_B = i\sqrt{3}$ و $z_C = -i\sqrt{3}$.

- بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. D النقطة التي لاحتقتها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

- عيّن z_E لاحقة النقطة E .

4. F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

أ - احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

ب - عيّن z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

تمرين 26:

1. $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

أ - تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب - جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة $P(z) = 0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B, C و A, B, C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.

أ - اكتب كلا من z_A, z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب - اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

ج - استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب - عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

ج - بين أن النقط A, B, A' في استقامية

تمرين 27:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C, D التي

لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A, z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

د) بين أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

هـ) احسب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثم جد قياسا للزاوية $(\overline{OB}; \overline{OA})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A .

- (أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R محددًا زاويته.
 (ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أنّ النقط C ، A و C' على استقامية.
 (ج) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

تمرين 28:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B ، C لاحقتها على الترتيب:

$$z_C = 2 + 4i\sqrt{3} \text{ و } z_B = 3 - i\sqrt{3} \text{ ، } z_A = 3 + i\sqrt{3}$$

- (1) احسب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_B - z_A|$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .
 (2) نسمي G مركز ثقل المثلث OAB ؛ احسب z_G لاحقة النقطة G .
 (3) S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى G .
 (أ) جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم عيّن العناصر المميزة له.
 (ب) عيّن z_B' لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتشابه S .
 (ج) استنتج صورة المثلث OAB بالتشابه S .
 (4) نسمي (C) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|-z|^2 + |z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 24$
 (أ) بيّن أنّ (C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .
 (ب) ماهي صورة الدائرة (C) بالتشابه S .

تمرين 29:

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $z^2 - 4z + 8 = 0$ ، ثم اكتب حلها على الشكل الأسّي.
 (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B ، C لاحقتها على الترتيب:

$$z_C = -3 - i \text{ ، } z_B = -z_A \text{ و } z_A = 2 - 2i$$

$$(أ) احسب \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2012}$$

- (ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}} \right)^n$ حقيقياً.
 (3) ليكن S التشابه المباشر الذي نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ويحول B إلى C .
 (أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S ، ثم عيّن مركزه.
 (ب) عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه S .
 (ج) ماهي طبيعة الرباعي $ACBD$.
 (د) عيّن z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;-1), (C;2), (D;-1)\}$.
 (4) عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $(\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} - \overline{MD})(\overline{MA} - \overline{MB}) = 0$.

تمرين 30:

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$
 (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = -2i$ ، $z_C = 3 - i$ ، $z_D = 3 + i$ و $z_E = 2 - 2i$.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} \text{ نضع}$$

أ - احسب طولية العدد المركب L وعمدة له، ثم فسر النتائج هندسياً.

ب - استنتج أنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

$$(3) \text{ نسمي } (\Gamma_1) \text{ مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ والتي تحقق: } \arg(iz+1-3i) = -\frac{\pi}{4}.$$

أ - بين أن B تنتمي إلى (Γ_1) ، ثم عيّن المجموعة (Γ_1) .

ب - نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r . عيّن المجموعة (Γ_2) .

(4) بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z نرفق بالدوران r النقطة M' ذات اللاحقة z' .

أ - اكتب العبارة المركبة للدوران r . ثم عيّن سابقة النقطة O بالدوران r .

ب - عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz+2+2i| = |z_A|$.

(5) أعط تفسيراً هندسياً لعمدة العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ ، ثم استنتج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ حقيقياً سالباً.

تمرين 31:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, D و F

$$\text{التي لواحقها على الترتيب: } z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_B = \overline{z_A}, z_C = -2, z_D = -2 + 2\sqrt{3}i, \text{ و } z_F = \overline{z_D}$$

أ - اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي، ثم علم النقط A, B, C, D و F .

ب - ما طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'+2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$.

أ - عيّن مركز وزاوية الدوران R .

ب - لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R . بين أن لاحقة النقطة E هي $z_E = 1 + \sqrt{3}i$.

ج - اكتب العدد $\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان.

(4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E ، نرفق العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z - z_C}{z - z_E}$.

- لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عدداً تخيلياً صرفاً. عيّن المجموعة (Γ_1) .

(5) لتكن G مرجح الجملة $\{(A; |z_A|), (B; |z_B|), (C; |z_C|)\}$.

أ - عيّن z_G لاحقة النقطة G .

ب - (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\|$.

- تحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عيّن طبيعة (Γ_2) .

تمرين 32:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 2z + 10 = 0$.
2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب:
- $$z_D = 1 - 3i \text{ و } z_C = -3 + i, \quad z_B = 1 + 3i, \quad z_A = 2 + i$$
- أ - أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي؛ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- ب - اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويجول A إلى C ثم حدّد نسبته وزاويته.
- ج - عيّن z_E لاحقة النقطة E ؛ علماً أنّ D هي صورة E بالتشابه S .
3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\frac{1}{2}$.
- أ - بيّن أنّ F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ: -3 و 1 على الترتيب.
- ب - عيّن z_F لاحقة النقطة F .

تمرين 33:

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$.
- (1) بيّن أنّ العدد -1 حلا لهذه المعادلة، ثم جد الحلين الآخرين.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, G لواحقها على الترتيب: z_1, z_2, z_3, z_4 حيث $z_4 = -1, z_3 = 2 + \sqrt{3}i, z_2 = 2 - \sqrt{3}i, z_1 = 3$ و $z_4 = 3$.
- اكتب العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ACG .
- (3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: (1) $(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}) \cdot \overline{CG} = 12$.
- أ - أثبت أنّ G هي مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$.
- ب - بيّن أنّ المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل (2) $\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4$.
- ج - تأكد أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ) .
- د - بيّن أنّه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overline{AM} \cdot \overline{CG} = 0$ ، ثم استنتج طبيعة (γ) وارسمها.

تمرين 34:

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نسمي A, B, C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = i$.
- (أ) اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.
- (ب) استنتج قياساً للزاوية $(\overline{OB}; \overline{OA})$ وطبيعة المثلث OAB .
- (ج) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً موجباً.

(د) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برّر إجابتك.

(3) أ) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددًا نسبته وزاويته.
ب) استنتج طبيعة المثلث ABC

(4) أ) عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

ب) عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $|z - z_1| = |z - z_3|$.

تمرين 35:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B ، و M ذات اللاحقات:

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z \text{ على الترتيب (يرمز } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A \text{).}$$

أ - أكتب z_A على الشكل الأسّي .

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة .

ب - التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h .

ج - نضع: $S = h \circ r$. (يرمز ه إلى تركيب التحويلين r و h) .

- عيّن طبيعة التحويل S ، مبرزًا عناصره المميزة، ثم تحقق أنّ عبارته المركبة هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D ، و E ؛ حيث: $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ ، و $S(D) = E$.

- بيّن أنّ النقط O ، Ω ، و E في استقامية.

5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ حيث θ عدد حقيقي.

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

تمرين 36:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$
2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب $z_C = -1 - 2i$ ، $z_B = -1 + 2i$ ، $z_A = 1$.
- اكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .
3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 + 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in]-\pi; \pi[$ ولتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ حيث λ عدد حقيقي.
أ - تحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من (E) و (F) .
ب - اكتب معادلة ديكارتية لكل من (E) و (F) ؛ وعين نقطتي تقاطعهما.
4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B .
أ - اكتب العبارة المركبة للتشابه S وعين نسبته وزاويته.
ب - عين (E') و (F') صورتا (E) و (F) بالتشابه S .
ج - استنتج تقاطع (E') و (F')

Mostefai
A/Elaziz

الخطول

aziz - mus1@hotnail.fr



حل التمرين 01:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

A ، B و C نقط لواحقتها $z_A = 1+2i$ ، $z_B = -1-4i$ ، $z_C = -5i$.

(1) تعيين لاحقة النقطة D حتى تكون A مركز ثقل المثلث BCD .

A مركز ثقل المثلث BCD معناه $z_A = \frac{z_B + z_C + z_D}{3}$ ومنه

$$z_D = 3z_A - z_B - z_C = 3(1+2i) - (-1-4i) + 5i = 4+15i$$

(2) تعيين لاحقة النقطة H حتى يكون $ABCH$ متوازي أضلاع.

$ABCH$ متوازي أضلاع معناه $\overline{AB} = \overline{HC}$ أي $z_B - z_A = z_C - z_H$ ومنه

$$z_H = 2+i \text{ وعليه } z_H = z_C + z_A - z_B = -5i + 1 + 2i + 1 + 4i = 2+i$$

(3) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;2), (C;-1)\}$.

$$z_G = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ إذن } z_G = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{1+2-1} = \frac{1+2i - 2 - 8i + 5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

حل التمرين 02:

$$z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$$

(1) كتابة z على الشكل الجبري

$$z = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) \text{ بالتالي } z = \sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1 \text{ أي } z = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+i(\sqrt{3}+i)$$

الشكل المثلثي للعدد المركب z

$$\text{لدينا } |z| = 2\sqrt{2} \text{ ومنه } |\sqrt{3}+i| = 2 \text{ و } |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} \text{ بالتالي } \arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ و } \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{وعليه } z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

(2) استنتاج قيمتي $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

$$\text{لدينا } z = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) \text{ ومن جهة أخرى } z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\text{ومنه } 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) \text{ أي } \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

(3) كتابة z^{2010} على الشكل الجبري.

$$\text{لدينا } z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \text{ ومنه } z^{2010} = (2\sqrt{2})^{2010} \left(\cos \frac{2010 \times 5\pi}{12} + i \sin \frac{2010 \times 5\pi}{12} \right)$$

$$z^{2010} = (2\sqrt{2})^{2010} \left(\cos \frac{10050\pi}{12} + i \sin \frac{10050\pi}{12} \right) \text{ أي}$$

$$\frac{10050\pi}{12} = \frac{10056\pi - 6\pi}{12} = 838\pi - \frac{\pi}{2} \text{ ولدينا}$$

$$z^{2010} = (2\sqrt{2})^{2010} \left(\cos \left(838\pi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(838\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right) = (2\sqrt{2})^{2010} \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right) \text{ ومنه}$$

$$z^{2010} = -i 2^{3015} \text{ بالتالي}$$

حل التمرين 03:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 6z + 12 = 0$.

$$z_2 = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = \frac{6 + 2i\sqrt{3}}{2} = 3 + i\sqrt{3} \text{ هما } \Delta = 36 - 48 = -12 = 12i^2$$

2. نعتبر العددين المركبين $a = 3 + i\sqrt{3}$ ، $b = 3 - i\sqrt{3}$.

كتابة a على الشكل المثلثي ثم الشكل الأسّي.

$$a = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ والتالي } \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ و } |a| = 2\sqrt{3}$$

الشكل الأسّي للعدد a .

$$a = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{حساب } \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^{2012}$$

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^{2012} = \left(\frac{2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}} \right)^{2012} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{2012} = e^{i\frac{2012\pi}{6}}$$

$$\frac{2012\pi}{6} \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ومنه } \frac{2012\pi}{6} = \frac{2016\pi - 4\pi}{6} = 336\pi - \frac{2\pi}{3} \text{ ولدينا}$$

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^{2012} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي } \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^{2012} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$$

3. A, B نقطتان من المستوي لاحقتهما a و b على الترتيب في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

أ - تبين أن المثلث ABO متقايس الأضلاع ،

$$\text{لدينا } OA = |a| = \sqrt{12} \text{ و } OB = |b| = \sqrt{12} \text{ و } AB = |b - a| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

ومنه $OA = OB = AB$ والمثلث ABO متقايس الأضلاع.

تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABO .

$$z_G = \frac{a+b+0}{3} = \frac{3+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{3} \text{ ومنه } z_G = \frac{6}{3} \text{ أي } z_G = 2$$



ب - لتكن المجموعة (E) للنقط M من المستوي حيث: $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24$.
- التحقق أن النقطة A عنصر من (E).

A عنصر من (E) معناه $AO^2 + AA^2 + AB^2 = 24$ أي $AO^2 + AB^2 = 24$ ولدينا $AO = \sqrt{12}$ ومنه $AO^2 = 12$ و $AB = \sqrt{12}$ ومنه $AB^2 = 12$ وهذا يعني أن $AO^2 + AB^2 = 24$ ومنه A عنصر من (E).

ج - تبين أن (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

نضع $M(x; y)$

$$MO^2 = x^2 + y^2 \text{ ومنه } MO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$MA^2 = (3-x)^2 + (\sqrt{3}-y)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 \text{ ومنه } MA = \sqrt{(3-x)^2 + (\sqrt{3}-y)^2}$$

$$MB^2 = (3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 \text{ ومنه } MB = \sqrt{(3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2}$$

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = x^2 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$$

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 3x^2 + 3y^2 - 12x + 24 \text{ أي}$$

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24 \text{ تعني } 3x^2 + 3y^2 - 12x + 24 = 24 \text{ ونكافئ } x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$\text{أي } (x-2)^2 + y^2 = 4 \text{ ومنه } (x-2)^2 + y^2 - 4 = 0$$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $G(2;0)$ ونصف قطرها 2

حل التمرين 04:

(1) $p(z) = z^3 + z^2 - 4z - 24$ عدد مركب حيث

حساب $p(3)$ ، ثم حل في \mathbb{C} المعادلة: $p(z) = 0$.

$$p(3) = 3^3 + 3^2 - 4(3) - 24 = 27 + 9 - 12 - 24 = 0 \text{ ومنه 3 حل للمعادلة } p(z) = 0$$

ومنه $p(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$ أي $p(z) = (z-3)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$

$$\text{وبالمطابقة مع } z^3 + z^2 - 4z - 24 \text{ نجد } \begin{cases} a-3=1 \\ -3b=-24 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a=4 \\ b=8 \end{cases}$$

$$\text{إذن } p(z) = (z-3)(z^2 + 4z + 8)$$

$$p(z) = 0 \text{ معناه } z = 3 \text{ أو } z^2 + 4z + 8 = 0 \dots (1)$$

$$\Delta' = 4^2 - 4 \cdot 8 = -4 = (2i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = -2 + 2i, z_2 = -2 - 2i$$

بالتالي حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{3, -2 + 2i, -2 - 2i\}$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقط A، B، C ذات اللاحقات $z_A = 3$ ، $z_B = -2 + 2i$ ، $z_C = -2 - 2i$ ، $z_D = -1 - 10i$.

(أ) حساب الأطوال BC، AC، AB، ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC.

$$AB = |z_B - z_A| = |-5 + 2i| = \sqrt{27} \text{ و } AC = |z_C - z_A| = |-5 - 2i| = \sqrt{27} \text{ ، } BC = |z_C - z_B| = |-4i| = 4$$

ومنه $AB = AC$ بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A .
 (ب) تعيين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|z + 2 + 2i| = |z + 2 - 2i|$.
 معناه $|z + 2 + 2i| = |z + 2 - 2i|$ وتكافئ $CM = BM$ بالتالي مجموعة النقط M المطلوبة هي محور القطعة $[CB]$.

(ج) كتابة العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D .

$$\alpha = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 - 10i}{-5 + 2i} = \frac{2i(2i - 5)}{-5 + 2i} = 2i \text{ ومنه } z_D - z_A = \alpha(z_B - z_A)$$

إذن $z_D - z_A = 2i(z_B - z_A)$ ومنه العبارة المركبة للتشابه S هي $z' - z_A = 2i(z - z_A)$

$$\text{أي } z' = 2iz + 3 - 6i$$

نسبة التشابه و زاويته

لدينا $|2i| = 2$ ومنه نسبة التشابه هي 2.

و $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ ومنه زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$.

حل التمرين 05:

1- حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

$$\Delta' = 48 - 64 = -16 = (4i)^2$$

2- نعتبر النقطتين A و B لاحقتهما على الترتيب: $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ و $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$

كتابة العددين z_B و z_A على الشكل الأسّي.

$$\arg(z_A) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ أي } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ حيث } \arg(z_A) = \theta \text{ و } |z_A| = 8$$

$$\text{ومنه } z_B = \overline{z_A} = 8e^{i(\frac{\pi}{6})}, z_A = 8e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

3- حساب المسافات OA ، OB و AB ، و استنتاج طبيعة المثلث OAB .

$$AB = |z_B - z_A| = |8i| = 8, OB = |z_B| = 8, OA = |z_A| = 8$$

ومنه $OA = OB = AB$ بالتالي المثلث OAB متقايس الأضلاع.

4- نرسم C إلى النقطه التي لاحقتها $z_C = -\sqrt{3} + i$ ولتكن النقطه D صورة النقطه C بواسطة

$$\text{الدوران الذي مركزه } O \text{ و زاويته } -\frac{\pi}{3}.$$

- تعيين لاحقة النقطه D .

$$z_D = 2i \text{ وعليه } z_D = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-\sqrt{3} + i) \text{ ومنه } z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_C$$

5- نسمي G مركز المسافات المتناسبه للنقط O ، D ، B المرفقة بالمعاملات 1، 1، -1 على الترتيب

أ- تبرير وجود G و تبين أن هذه النقطه لاحقتها $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$.

بما أن $1 - 1 + 1 \neq 0$ فإن G موجوده

$$z_G = \frac{z_B + z_D - z_O}{1+1-1} = \frac{4\sqrt{3}+4i+2i}{1} = 4\sqrt{3}+6i$$

ج - اثبات أن النقط C ، D و G على استقامة واحدة.

$$z_G - z_D = -4(z_C - z_D) \text{ أي } \frac{z_G - z_D}{z_C - z_D} = -4 \text{ ومنه } \frac{z_G - z_D}{z_C - z_D} = \frac{4\sqrt{3}+6i-2i}{-\sqrt{3}+i-2i} = \frac{4\sqrt{3}+4i}{-\sqrt{3}-i} = -4$$

وهذا يعني أن $\overline{DG} = -4\overline{DC}$ بالتالي النقط C ، D و G على استقامة واحدة.

ملاحظة: لإثبات أن النقط C ، D و G على استقامة واحدة يكفي إثبات أن $\frac{z_G - z_D}{z_C - z_D}$ هو عدد حقيقي.

د - إثبات أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع

$$\overline{DG} = \overline{OB} \text{ لدينا } z_G - z_D = 4\sqrt{3}+6i-2i = 4\sqrt{3}+4i \text{ ومنه } z_G - z_D = z_B \text{ وهذا يعني أن } \overline{DG} = \overline{OB}$$

بالتالي الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.

$$\text{تبيين أن: } \frac{z_C - z_G}{z_A - z_G} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_C - z_G}{z_A - z_G} = \frac{-\sqrt{3}+i-4\sqrt{3}-6i}{4\sqrt{3}-4i-4\sqrt{3}-6i} = \frac{-5\sqrt{3}-5i}{-10i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2i}$$

$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب - طبيعة المثلث AGC .

$$\text{لدينا } \frac{z_C - z_G}{z_A - z_G} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } GC = GA \text{ و } \arg\left(\frac{z_C - z_G}{z_A - z_G}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ إذن المثلث } AGC \text{ متقايس الأضلاع.}$$

حل التمرين 06:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب

$$z_A = 1+i, z_B = 2-i, z_C = 3+2i$$

(1) حساب لاحتتي الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} .

$$z_{\overline{AC}} = z_C - z_A = 3+2i-1-i = 2+i, z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 2-i-1-i = 1-2i$$

(2) تفسير هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(\overline{AB}; \overline{AC}) \text{ و } \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$$

(3) تبيين أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، واستنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+2i-1-i}{2-i-1-i} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$= \frac{5i}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \text{ إذن } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وهذا يعني أن $AC = AB$ و $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

4) تعيين لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ثم احسب نصف قطرها.

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2 - i + 3 + 2i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \text{ ذات اللاحقة } [BC]$$

$$IA = |z_A - z_I| = \left| -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ حيث } IA \text{ نصف قطرها}$$

وعليه نصف قطره الدائرة (Γ) هو $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

حساب مساحة المثلث ABC .

$$AB = |z_C - z_A| = |2 + i| = \sqrt{5}, \quad AC = |z_B - z_A| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} \text{ ua}$$

5) تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون $ABDC$ مربعاً.

حتى يكون $ABDC$ مربعاً يكفي أن يكون متوازي أضلاع لأن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

$$ABDC \text{ متوازي أضلاع معناه } \overline{CD} = \overline{AB} \text{ ومعناه } z_D - z_C = z_B - z_A$$

$$\text{أي } z_D = z_B - z_A + z_C = 1 - 2i + 3 + 2i = 4 \text{ وعليه } z_D = 4$$

حل التمرين 07:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$$(1) \text{ } A, B \text{ نقطتين من المستوي لاحتقتهما على الترتيب: } z_A = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i \text{ و } z_B = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

(أ) تعيين اللاحقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O .

$$z_C = -z_B = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

(ب) تعيين اللاحقة z_I للنقطة I منتصف القطعة $[AC]$.

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

(ج) تعيين اللاحقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I .

$$\text{لدينا } \overline{ID} = -\overline{IB} \text{ معناه } z_D - z_I = -(z_B - z_I) \text{ ومنه } z_D = -(z_B - z_I) + z_I$$

$$z_D = -(\sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2} - \sqrt{2}i) - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

(1) أ) تفسير هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = (\overline{BD}; \overline{AC}) + 2k\pi \text{ و } \left|\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_D - z_B|} = \frac{AC}{BD}$$

$$(ب) \text{ تحقق أن: } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_C - z_A = -4\sqrt{2}i \text{ بالتالي } z_C - z_A = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i + \sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$$

$$z_D - z_B = -4\sqrt{2} \text{ بالتالي } z_D - z_B = -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{-4\sqrt{2}i}{-4\sqrt{2}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(ج) ماذا يمكن القول عن القطعتين $[AC]$ و $[BD]$ ؟

D نظيرة B بالنسبة إلى I معناه I منتصف $[BD]$ وبما أن I منتصف $[AC]$ فإن القطعتان $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان.

(3) تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$.

$$\text{لدينا } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ إذن } \left| \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} \right| = 1 \text{ ومنه } AC = BD \text{ و } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ومنه } (\overline{BD}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} \text{ وعليه } (AC) \perp (BD).$$

الرباعي $ABCD$ قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتقايسان ومتعامدان إذن $ABCD$ مربع.

(4) تبين أن النقاط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها r .

لدينا I منتصف $[BD]$ ومنتصف القطعة $[AC]$ و $AC = BD$ ومنه $IA = IB = IC = ID = 2\sqrt{2}$

بالتالي النقط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها I ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$

(5) لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل

(أ) تعيين لاحقة النقطة E .

$$z_E = \overline{z_B} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

(ب) حساب الجداء $\overline{BD} \cdot \overline{BE}$.

$$\text{لدينا } B(\sqrt{2}; \sqrt{2}), D(-3\sqrt{2}; \sqrt{2}), E(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), BE(0; -2\sqrt{2}), BD(-4\sqrt{2}; 0)$$

$$\overline{BD} \cdot \overline{BE} = -4\sqrt{2} \times 0 + 0 \times -2\sqrt{2} = 0$$

(ج) ماذا يمثل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة (γ) ؟

المستقيم (BE) مماس للدائرة (γ) في النقطة B .

حل التمرين 08:

(1) نعتبر العددين المركبين $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 1 - 2i$

$$(أ) \text{ التحقق أن } z_1 + \overline{z_2} = 4(1+i)$$

$$z_1 + \overline{z_2} = 3 + 2i + 1 + 2i = 4 + 4i = 4(1+i)$$

(ب) كتابة العدد $z_1 + \overline{z_2}$ على الشكل المثلثي

$$z_1 + \overline{z_2} = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

الشكل الأسّي للعدد $\overline{z_1 + z_2}$.

$$z_1 + \overline{z_2} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(ج) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_1 + \overline{z_2})^n$ حقيقياً.

$$\text{لدينا } (z_1 + \overline{z_2})^n = (4\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

يكون $(z_1 + \overline{z_2})^n$ حقيقياً إذا كان $\sin \frac{n\pi}{4} = 0$ أي $\frac{n\pi}{4} = k\pi$ ومنه $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}$ (2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B و C و D التي لواحقها على

$$\text{الترتيب } z_C = 1 - 2i, z_B = -3, z_A = 3 + 2i$$

(أ) تعيين الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{3 + 2i - 1 + 2i}{-3 - 1 + 2i} = \frac{1 + 2i}{-2 + i} = \frac{(1 + 2i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{-5i}{5} = -i$$

$$\arg \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}, \quad \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = |-i| = 1$$

وهذا يعني أن $CA = CB$ و $(\overline{CB}; \overline{CA}) = -\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في C .(ب) تعيين لاحقة النقطة D صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. D صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 معناه $\overline{AD} = 2\overline{AC}$ أي $z_D - z_A = 2(z_C - z_A)$

$$\text{ومنه } z_D = -1 - 6i \text{ بالتالي } z_D = 2(z_C - z_A) + z_A = 2z_C - z_A$$

ج - G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (D; 1)\}$.تعيين z_G لاحقة النقطة G .

$$z_G = \frac{z_A - z_B + z_D}{1 - 1 + 1} = \frac{3 + 2i + 3 - 1 - 6i}{1} = 5 - 4i$$

تبيين أن $ABDG$ مربع.لدينا G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (D; 1)\}$ معناه $z_G = z_A - z_B + z_D$ ومنه $z_G + z_B = z_A + z_D$ وتكافئ $\frac{z_G + z_B}{2} = \frac{z_A + z_D}{2} = 1 - 2i$ ومنه $\frac{z_G + z_B}{2} = \frac{z_A + z_D}{2}$ وهذا يعني أن C هي منتصف $[DA]$ ومنتصف $[BG]$ ومنه $ABDG$ متوازي أضلاعبما أن $(CA) \perp (CB)$ فإن $(DA) \perp (GB)$ ولدينا $CA = CD = CB = CG$ بالتالي $DA = BG$ لأن C هي منتصف $[DA]$ ومنتصف $[BG]$. $ABDG$ متوازي أضلاع وقطره $[DA]$ و $[BG]$ متعامدان ومتقايسان وبالتالي فهو مربع.

$$(3) (F) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق } \|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MD}\| = 4\sqrt{5}$$

(أ) التحقق أن B تنتمي إلى (F) .

B تنتمي إلى (F) إذا كان $\|\overline{BA} - \overline{BB} + \overline{BD}\| = 4\sqrt{5}$.

لدينا $\|\overline{BA} - \overline{BB} + \overline{BD}\| = \|\overline{BA} + \overline{BD}\| = \|\overline{BG}\|$ ولدينا $\|\overline{BG}\| = |z_G - z_B| = |-8 - 4i| = 4\sqrt{5}$

بالتالي $\|\overline{BA} - \overline{BB} + \overline{BD}\| = 4\sqrt{5}$ ومنه B تنتمي إلى (F) .

(ب) تعيين (F) .

لدينا $\overline{MG} = \overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MD}$

$\|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MD}\| = 4\sqrt{5}$ تعني $\|\overline{MG}\| = 4\sqrt{5}$ أي $MG = 4\sqrt{5}$

بالتالي (F) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $4\sqrt{5}$.

حل التمرين 09:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$.

$\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$ للمعادلة حلان هما $z_1 = 2 + i$ ، $z_2 = 2 - i$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط: A, B, I و

لواحقها على الترتيب: $z_A = 2 + i$ ، $z_B = 4 + 3i$ و $z_I = 2 - i$.

أ - تعيين z_C للاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة I ونسبته 3.

$h(A) = C$ تعني $\overline{IC} = 3\overline{IA}$ وتكافئ $z_C - z_I = 3(z_A - z_I)$ ومنه $z_C = 3(z_A - z_I) + z_I$

بالتالي $z_C = 2 + 5i$

ب - تعيين z_D للاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$.

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = \frac{2 + i - 4 - 3i + 2 + 5i}{1} = 3i$$

ج - تبين أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

لدينا $z_C - z_D = 2 + 5i - 3i = 2 + 2i$ و $z_B - z_A = 4 + 3i - 2 - i = 2 + 2i$

إذن $z_B - z_A = z_C - z_D$ وهذا يعني أن $\overline{AB} = \overline{DC}$ بالتالي $ABCD$ متوازي أضلاع.

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = iz + 5 + i$.

ب - طبيعة التحويل r وعناصره المميزة.

لدينا عبارة التحويل r من الشكل $z' = az + b$ مع $a = i$ و $b = 5 + i$

ولدينا $|a| = |i| = 1$ و $\arg(a) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ إذن التحويل r دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ω

$$z_\omega = \frac{b}{1 - a}$$

$$z_\omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{(5 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

ج - تعيين النقطتين $r(A)$ و $r(C)$.

$$r(A) = B \quad \text{ومنه} \quad z' = iz_A + 5 + i = i(2 + i) + 5 + i = 2i - 1 + 5 + i = 4 + 3i = z_B$$

$$r(C) = D \text{ ومنه } z' = iz_C + 5 + i = i(2 + 5i) + 5 + i = 2i - 5 + 5 + i = 3i = z_D$$

د - استنتاج طبيعة الرباعي ABCD .

$$\text{لدينا } r(A) = B \text{ و } r(C) = D \text{ وحسب الخاصية المميزة للدوران فإن } AC = BD \text{ و } (\overline{AC}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{2}$$

ABCD متوازي أضلاع وقطره متقايسان ومتعامدان إذن ABCD مربع.

حل التمرين 10:

أ، B و C نقط من المستوي لواقعها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = 2\sqrt{3}$ ، $z_C = 2i$
 1) تعيين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A .

$$|z_A| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$$

$$z_A = \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right] \text{ ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{3} \text{ وعليه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ بحيث } \arg(z_A) = \theta$$

2) أ) حساب طويلة كل من الأعداد المركبة التالية: $z_C - z_A$ ، $z_B - z_A$ و $z_C - z_B$.

$$|z_C - z_A| = |2i - \sqrt{3} - 3i| = |-\sqrt{3} - i| = 2$$

$$|z_B - z_A| = |2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3i| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$|z_C - z_B| = |2i - 2\sqrt{3}| = \sqrt{16} = 4$$

ب) تعيين لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC، ونصف قطر هذه الدائرة.

$$\text{لدينا } \begin{cases} AC = |z_C - z_A| = 2 \\ AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{3} \\ BC = |z_C - z_B| = 4 \end{cases} \text{ ومنه } AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ بالتالي المثلث } ABC \text{ قائم في } A.$$

بما أن المثلث ABC قائم في A فإن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو منتصف الوتر [BC]

$$z_K = \sqrt{3} + i \text{ بالتالي } z_K = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2}$$

ونصف قطرها $\frac{BC}{2}$ أي نصف قطر الدائرة (Γ) هو 2.

ج) تبين أن النقطة O تنتمي للدائرة (Γ).

$$OK = |z_K| = 2 \text{ ومنه } O \text{ تنتمي للدائرة (Γ).}$$

3) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

أ) تبين أن $z_D = \sqrt{3} - i$.

$$z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$$

(ب) حساب لاحقة منتصف القطعة $[AD]$.

$$\frac{z_A + z_D}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3i + \sqrt{3} - i}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i = z_K$$

(ج) تعيين طولية العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$.

$$\left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} \right| = \frac{|z_D - z_A|}{|z_C - z_B|} = \frac{4}{4} = 1$$

(د) طبيعة الرباعي $ABDC$.لدينا K هي منتصف $[BC]$ ومنتصف $[AD]$.

$$\text{ولدينا } \left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} \right| = 1 \text{ وهذا يعني أن } AD = BC$$

وعليه القطعتان $[AD]$ و $[BC]$ متناصفتان ومتقايستان وبالتالي الرباعي $ABDC$ مستطيل.**حل التمرين 11:**نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي: $P(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$ (1) تبين أنه من كل عدد مركب z لدينا: $P(z) = (z + 4)(2z^2 + 6z + 17)$

$$(z + 4)(2z^2 + 6z + 17) = 2z^3 + 6z^2 + 17z + 8z^2 + 24z + 68 = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$$

$$P(z) = (z + 4)(2z^2 + 6z + 17) \text{ ومنه}$$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \text{ معناه } z = -4 \text{ أو } 2z^2 + 6z + 17 = 0$$

$$z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \text{ و } z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \text{ هما للمعادلة حلان هما } \Delta' = 9 - 34 = -25 = (5i)^2$$

(3) لتكن النقط A, B, C من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$\text{والتي لاحقاتها على الترتيب: } z_A = -4, z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \text{ و } z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

(أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسّي.

$$z_C - z_A = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + 4 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = \frac{5}{2}(1 - i) \text{ و } z_B - z_A = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + 4 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5}{2}(1 + i)$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ وعليه } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{5}{2}(1+i)}{\frac{5}{2}(1-i)} = \frac{(1+i)}{(1-i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

(ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي f الذي يحقق الشرطين $f(A) = A$ و $f(C) = B$.

$$\text{لدينا } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A) \text{ نستنتج أن } B \text{ هي صورة } C \text{ بالدوران } f \text{ الذي}$$

مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ج) تعيين لاحقتي كل من النقطتين D و E حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعاً مركزه A .

لدينا A منتصف $[BD]$ ومنه $z_A = \frac{z_B + z_D}{2}$ وعليه $z_D = 2z_A - z_B = -8 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$ أي $z_D = -\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i$

و A منتصف $[CE]$ ومنه $z_A = \frac{z_C + z_E}{2}$ وعليه $z_E = 2z_A - z_C = -8 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ أي $z_E = -\frac{13}{2} + \frac{5}{2}i$.

حل التمرين 12:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $4z^2 - 12z + 153 = 0$.

$$\Delta' = 36 - 612 = -576 = (24i)^2$$

$$z_1 = \frac{6 + 24i}{4} = \frac{3}{2} + 6i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 - 24i}{4} = \frac{3}{2} - 6i$$

2. نعتبر النقط A, B, C و P التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = \frac{3}{2} + 6i \quad \text{و} \quad z_B = \frac{3}{2} - 6i, \quad z_C = -3 - \frac{1}{4}i \quad \text{و} \quad z_P = 3 + 2i$$

و الشعاع \vec{w} حيث: $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

أ- تعيين z_Q لاحقة صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه \vec{w} .

العبارة المركبة للانسحاب t الذي شعاعه \vec{w} هي $z' = z + z_{\vec{w}}$ أي $z' = z - 1 + \frac{5}{2}i$

$$z_Q = z_B - 1 + \frac{5}{2}i = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$$

بالتالي $z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$.

ب- تعيين z_R لاحقة صورة P بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته $-\frac{1}{3}$.

$$z_R - z_C = \frac{-1}{3}(z_P - z_C) \quad \text{ومنه} \quad z_R = \frac{-1}{3}(z_P - z_C) + z_C$$

تكافئ $z_R = \frac{-1}{3}z_P + \frac{4}{3}z_C$

$$z_R = \frac{-1}{3}(3 + 2i) + \frac{4}{3}\left(-3 - \frac{1}{4}i\right) = -5 - i$$

بالتالي $z_R = -5 - i$.

ج- تعيين z_S لاحقة صورة P بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$z_S - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A) \quad \text{ومعناه} \quad z_S - z_A = -i(z_P - z_A)$$

ومنه $z_S = -i(z_P - z_A) + z_A$

$$z_S = -i\left(3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i\right) + \frac{3}{2} + 6i = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$$

وتكافئ $z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$ بالتالي $z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$.

د- تعليم النقط P, Q, R, S .

3. أ- اثبات أن $PQRS$ متوازي أضلاع.

$$z_Q - z_R = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i + 5 + i = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i \quad \text{و} \quad z_P - z_S = 3 + 2i + \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i$$

ومنه $z_P - z_S = z_Q - z_R$ وهذا يعني أن $\vec{SP} = \vec{RC}$ بالتالي $PQRS$ متوازي أضلاع.

ب - حساب $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ ثم استنتاج طبيعة الرباعي $PQRS$.

$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-5-i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i}{3+2i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i} = \frac{-10-2i-1+7i}{6+4i-1+7i} = \frac{-11+5i}{5+11i} = i$$

وهذا يعني أن $QR = QP$ و $(\overline{QP}; \overline{QR}) = \frac{\pi}{2}$ إذن المثلث QPR متساوي الساقين وقائم في Q . وبالتالي $PQRS$ مربع.

ج - التحقق أن النقط P, Q, R, S تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين لاحقة مركزها ونصف قطرها.

بما أن $PQRS$ مربع فإن النقط P, Q, R, S تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها ω منتصف $[PR]$

ونصف قطرها $\frac{PR}{2}$

$$\frac{PR}{2} = \frac{|z_R - z_C|}{2} = \frac{|-8-3i|}{2} = \frac{\sqrt{73}}{2} \text{ و } z_\omega = \frac{z_P + z_R}{2} = \frac{3+2i-5-i}{2} = -1 + \frac{1}{2}i$$

حل التمرين 13:

أ - تبين أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

$$\text{لدينا } \begin{cases} OA = |z_A| = \sqrt{20} \\ OB = |z_B| = \sqrt{10} \\ AB = |z_B - z_A| = |-1-3i| = \sqrt{10} \end{cases} \text{ ومنه } AB^2 + OB^2 = OA^2$$

إذن المثلث OAB قائم في B ومتساوي الساقين.

ب - تعيين مركز وزاوية الدوران R الذي يحول A إلى B ويحول B إلى O .

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \dots (1) \\ z_O = az_B + b \dots (2) \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} R(A) = B \\ R(B) = O \end{cases}$$

$$a = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_B} = \frac{3-i}{1+3i} = -i \text{ ومنه } z_B - z_O = a(z_A - z_B) \text{ نجد (1) من (2)}$$

$$b = -az_B = i(3-i) = 1+3i \text{ نجد (2)}$$

العبارة المركبة للدوران R هي $z' = -iz + 1+3i$.

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} \text{ ومنه زاوية الدوران هي } \frac{\pi}{2} \text{ ومركزه } \omega \text{ ذات اللاحقة}$$

$$z_\omega = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

ملاحظة: يمكن تعيين زاوية ومركز الدوران R مباشرة بما أن المثلث OAB قائم في B ومتساوي الساقين فإن

زاوية الدوران R هي $-\frac{\pi}{2}$ ومركزه هو ω منتصف الوتر $[OA]$. (ω هي نقطة تقاطع محوري $[AB]$ و $[BO]$)

ج - لتكن النقطة C صورة O بهذا الدوران

- تعيين طبيعة الرباعي ABOC .

لدينا $\begin{cases} R(A) = B \\ R(O) = C \end{cases}$ و ω منتصف $[AO]$ ومنه منتصف $[BC]$ هو النقطة $R(\omega)$ لأن الدوران يحافظ على المنتصف

وبما أن $R(\omega) = \omega$ فإن ω هو منتصف $[BC]$.

ولدينا حسب الخاصية المميزة للدوران $AO = BC$ و $(\overline{AO}; \overline{BC}) = -\frac{\pi}{2}$.

وعليه القطعتان $[AO]$ و $[BC]$ متناصفتان ومتقايستان ومتعامدتان بالتالي $ABOC$ مربع.

حل التمرين 14:

نعتبر العددين المركبين: $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواقعها على الترتيب z_A ، z_B و z_C .

(1) تبين أن المثلث ABO متساوي الساقين.

إذن المثلث ABO متساوي الساقين رأسه O .

$$\begin{cases} OA = |z_A| = 2\sqrt{3} \\ OB = |z_B| = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقله.

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_O}{3} = \frac{3 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}}{3} = 2$$

(2) تبين أنه يوجد دوران T يحول O إلى G ويحول A إلى C يُطلب تعيين مركزه وزاويته.

$$\begin{cases} z_G = az_O + b \dots\dots\dots(1) \\ z_C = az_A + b \dots\dots\dots(2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} T(O) = G \\ T(A) = C \end{cases}$$

من (1) نجد $b = z_G = 2$

$$a = \frac{z_C - b}{z_A} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 3i)(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

اذن العبارة المركبة للتحويل T هي $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2$

بما أن $|a| = 1$ فإن T دوران زاويته $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$ ومركزه النقطة الصامدة ω ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

(3) استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T .

$$\text{إذن صورة المستقيم } (OA) \text{ بالدوران } T \text{ هو المستقيم } (GC).$$

$$\begin{cases} T(O) = G \\ T(A) = C \end{cases}$$

حل التمرين 15:

لتكن A نقطة لاحقتها: $z_A = i$ و B لاحقتها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

(1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، نسمي C صورة B بواسطة r .

أ. اعطاء الكتابة المركبة لـ r

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحقتهما z و z' على الترتيب

$$r(M) = M' \text{ معناه } z' - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O) \text{ أي } z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$$

تعيين z_C - الشكل الأسّي - لاحقة C .

$$r(B) = C \text{ يكافئ } z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B \text{ أي } z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ وعليه } z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

ب. كتابة كلا من z_C و z_B على الشكل الجبري.

$$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

ج. انشاء النقط A, B, C .

(2) لتكن D مرجح النقط A, B, C والمرفقة على الترتيب بالمعاملات $2, -1$ و 2 .

أ. تعيين z_D لاحقة D

$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2 - 1 + 2} = \frac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ب. تبين أن A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1$ وهذا يعني أن $OA = OB = OC = OD = 1$ بالتالي A, B, C و D تنتمي

إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي الدائرة المثلثية.

(3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H .

الكتابة المركبة لـ H .

$$AM' = 2AM \text{ معناه } z' - z_A = 2(z - z_A) \text{ وتكافئ } z' = 2z - z_A \text{ أي } z' = 2z - i$$

تعيين z_E لاحقة E .

$$H(D) = E \text{ يكافئ } z_E = 2z_D - i \text{ ومنه } z_E = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3}$$

(4) أ. حساب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$.

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{3} + i}$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب - استنتاج طبيعة المثلث CDE .

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ وهذا يعني أن } CD = CE \text{ و } (\overline{CE}; \overline{CD}) = \frac{\pi}{3}$$

المثلث CDE متساوي الساقين وإحدى زواياه $\frac{\pi}{3}$ بالتالي المثلث CDE متقايس الأضلاع .

حل التمرين 16:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } z_1 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B ، C و C نقط من المستوي

$$\text{لاحقاتها على الترتيب: } z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_C = z_A + z_B$$

أ - كتابة على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ، } z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب - تعيين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$$z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_A \text{ ومنه } z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ وعليه } z_{A'} = i$$

$$z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_B \text{ ومنه } z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i(0)} = 1 \text{ وعليه } z_{B'} = 1$$

$$z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_C \text{ ومنه } z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A + z_B) = e^{i\frac{\pi}{4}} z_A + e^{i\frac{\pi}{4}} z_B = z_{A'} + z_{B'} = 1 + i$$

ج - تبين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

$$\text{لدينا } z_{A'} = i \text{ و } z_{C'} - z_{B'} = 1 + i - 1 = i \text{ ومنه } z_{C'} - z_{B'} = z_{A'} \text{ وهذا يعني أن } \overline{B'C'} = \overline{OA'}$$

ومنه الرباعي $OA'C'B'$ متوازي أضلاع

$$\text{ولدينا من جهة أخرى } \frac{z_{A'}}{z_{B'}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ وهذا يعني أن } OA' = OB' \text{ و } (\overline{OB'}; \overline{OA'}) = \frac{\pi}{2}$$

إذن $OA'C'B'$ مربع.

3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$

أ - تبين أن (Δ) هو محور الفواصل.

بالتالي $AM = BM$ تعني $|z - z_A| = |z - z_B|$ هو محور القطعة $[AB]$ وبما أن $z_B = \overline{z_A}$ فإن محور القطعة $[AB]$ هو محور الفواصل أي (Δ) هو محور الفواصل.

ب - تبين أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i$ عدنان حقيقيان.

يتساوى عدنان مركبان إذا تساوى طويلاتهما وعمدتهما بترديد 2π

$$\left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right| = |i| \text{ ومنه } \left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i \text{ ومنه } \left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = 1 \text{ وتكافئ } \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = 1 \text{ أي } |z - z_A| = |z - z_B|$$

ومن صور العدد المركب z تنتمي (Δ) (محور الفواصل) وهذا يعني أن الحلين حقيقيين.

حل التمرين 17:

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2z + 4 = 0$

$$\Delta' = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

2 نسمي A, B النقطتان التي لاحقتاهما $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ - تعيين الطويلة وعمدة لكل من العددين z_A و z_B .

$$z_A = \left[2; \frac{\pi}{3}\right] \text{ إن } \arg(z_A) = \frac{\pi}{3} \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ بحيث } \arg(z_A) = \theta, |z_A| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$z_B = \left[2; -\frac{\pi}{3}\right]$$

ب الشكل الأسّي للعدد z_A . الشكل الأسّي للعدد z_A هو $z_A = |z_A| e^{i\theta}$

$$\text{وعليه } z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

3 نسمي R التحويل النقطي في المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z'

$$\text{حيث: } z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$$

أ - طبيعة التحويل R ، وتعيين عناصره المميزة.

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه M_0 ذات اللاحقة z_0 وزاويته θ هي $z' - z_0 = e^{i\theta} (z - z_0)$

$$\text{وعليه } R \text{ دوران مركزه } O \text{ وزاويته } \frac{2\pi}{3}$$

ب - نسمي C صورة النقطة A بالتحويل R ،

الشكل الأسّي للعدد المركب z_C لاحقة النقطة C .

$$z_C = e^{i\pi} z_A \text{ ومنه } z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} \text{ وعليه } z_C = e^{i\pi}$$

الشكل الجبري للعدد z_C .

$$z_C = e^{i\pi} = -1$$

ج- اثبات أن النقطة B هي صورة النقطة C بالتحويل R .

$$z'_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_C = -e^{i\frac{2\pi}{3}} = -(1+i\sqrt{3}) = z_B$$

طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\begin{cases} R(A) = C \\ R(C) = B \end{cases}$ ينتج - حسب خاصية الدوران - أن $AC = CB$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه C .

طريقة ثانية: لدينا $z_B = \overline{z_A}$ ومنه النقطتان A و B متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل بالتالي محور القطعة $[AB]$

هو محور الفواصل وبما أن z_C عدد حقيقي فإن C تنتمي لمحور الفواصل أي تنتمي لمحور القطعة $[AB]$ ومنه $CA = CB$ وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين رأسه C .

حل التمرين 18:

$$(1) P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i \text{ حيث } z \text{ كثير الحدود للمتغير المركب } z$$

(أ) التحقق أن العدد i جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(i) = i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i \\ = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$$

(ب) تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

$$(z-i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha-i)z^2 + (\beta-i\alpha)z - i\beta$$

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 13 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \alpha - i = -4 - i \\ \beta - i\alpha = 13 + 4i \\ -i\beta = -13i \end{cases} \text{ نجد } z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$$

$$\text{إذن } P(z) = (z-i)(z^2 - 4z + 13)$$

(ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$.

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \text{ أو } z = i \text{ يكافئ } P(z) = 0$$

نحل المعادلة (1).

$$\Delta' = 4 - 13 = -9 = (3i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = 2 + 3i \text{ و } z_2 = 2 - 3i$$

و بالتالي حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي $\{i; 2+3i; 2-3i\}$

(2) نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B و C لواحقتها على الترتيب:

$$z_A = i, z_B = 2 + 3i \text{ و } z_C = 2 - 3i \text{ على الترتيب.}$$

ليكن الدوران r الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

- تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r .

$$z_{A'} - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A - z_B) \text{ هي الكتابة المركبة للدوران } r$$

$$z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A - z_B) + z_B \text{ ومنه } z_{A'} - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A - z_B)$$

وتكافئ $z_{A'} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}(-2-2i) + 2+3i$ أي $z_{A'} = -2\sqrt{2}i + 2+3i$ بالتالي $z_{A'} = 2+i(3-2\sqrt{2})$

- إثبات أن النقط A' ، B و C في استقامية.

$$\frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2\sqrt{2}i + 2 + 3i - 2 - 3i}{2 - 3i - 2 - 3i} = \frac{-2\sqrt{2}i}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

بما أن $\frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B}$ عدد حقيقي فإن النقط A' ، B و C في استقامية.

تعيين الكتابة المركبة للتحاكي h الذي مركزه B والذي يحول النقطة C إلى A' .

$$z_{A'} - z_B = \frac{\sqrt{2}}{3}(z_C - z_B) \text{ ومنه } \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

إن الكتابة المركبة للتحاكي h هي $z' - z_B = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - z_B)$ أي $z' = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - z_B) + z_B$

حل التمرين 19:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 6z + 13 = 0$

نحسب المميز المختصر $\Delta' = 9 - 13 = -4 = (2i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 3 - 2i$.

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_C = 4i \text{ و } z_B = 3 + 2i \text{ ، } z_A = 3 - 2i$$

أ - إثبات أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

$$\overline{CB} = \overline{OA} \text{ وهذا يعني أن } z_B - z_C = z_A \text{ ومنه } z_B - z_C = 3 + 2i - 4i = 3 - 2i$$

بالتالي $OABC$ متوازي أضلاع.

ب - تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3 - 2i + 4i}{2} = \frac{3}{2} + i \text{ ومنه } [AC] \text{ منتصف}$$

(3) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 12$

$$4\overline{M\Omega} = \overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} \text{ لدينا}$$

$$\|\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 12 \text{ تعني } \|4\overline{M\Omega}\| = 12 \text{ أي } M\Omega = 3.$$

إن (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 3.

(4) لتكن M نقطة من المستقيم (AB) ؛ نرمز بـ β إلى ترتيب النقطة M .

نضع N صورة M بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{أ - تبين أن لاحقة النقطة } N \text{ هي } \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$$

المستقيم (AB) معادلته $x = 3$ ومنه احداثيات النقطة M هي $(3; \beta)$

$$\text{بالتالي لاحقة النقطة } M \text{ هي } z_M = 3 + i\beta$$

$$z_N = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega) + z_\Omega = i\left(\frac{3}{2} + i(\beta - 1)\right) + \frac{3}{2} + i \text{ ومنه } z_N - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega)$$

$$= \frac{3}{2}i - \beta + 1 + \frac{3}{2} + i$$

$$\cdot z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i \text{ وعليه}$$

ب - كيف يجب أن نختار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) .

N تنتمي إلى المستقيم (BC) معناه الشعاعان \overrightarrow{CN} و \overrightarrow{BC} مرتبطان خطياً

$$\cdot \overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \beta \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ ومنه } z_N - z_C = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 4i = \frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}i$$

$$\cdot \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ومنه } z_C - z_B = 4i - 3 - 2i = -3 + 2i \text{ و}$$

$$\cdot \beta = \frac{1}{4} \text{ إذن } \frac{\frac{5}{2} - \beta}{-3} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} \text{ ومنه } 5 - 2\beta = \frac{9}{2} \text{ يكافئ } 10 - 4\beta = 9 \text{ أي } \beta = \frac{1}{4}$$

طريقة ثانية:

لدينا معادلة المستقيم (BC) هي $2x + 3y - 12 = 0$

$$N \text{ تنتمي إلى المستقيم } (BC) \text{ معناه } 2x_N + 3y_N - 12 = 0 \text{ وتكافئ } 2\left(\frac{5}{2} - \beta\right) + 3\left(\frac{5}{2}\right) - 12 = 0$$

$$\cdot \beta = \frac{1}{4} \text{ أي } 5 - 2\beta + \frac{15}{2} - 12 = 0 \text{ وتكافئ } 10 - 4\beta + 15 - 24 = 0 \text{ ومنه } \beta = \frac{1}{4}$$

حل التمرين 20:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ تعطى النقط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب:

$$\cdot z_D = -2 \text{ و } z_C = -1 - 3i, z_B = -3 + 3i, z_A = 1 + i$$

(1) حساب كلا من: $|z_D - z_A|$ ، $|z_D - z_B|$ و $|z_D - z_C|$

$$|z_D - z_B| = |-2 + 3 - 3i| = |1 - 3i| = \sqrt{10}, |z_D - z_A| = |-2 - 1 - i| = |-3 - i| = \sqrt{10}$$

$$|z_D - z_C| = |-2 + 1 + 3i| = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$$

استنتاج أن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $|z_D - z_A| = |z_D - z_B| = |z_D - z_C| = \sqrt{10}$ وهذا يعني أن $DA = DB = DC = \sqrt{10}$ وبالتالي النقط

A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $\sqrt{10}$.

$$(2) \text{ نضع: } L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

حساب طويلة وعمدة العدد L ، واستنتاج نوع المثلث ABC .

$$z_B - z_A = -3 + 3i - 1 - i = -4 + 2i, z_C - z_A = -1 - 3i - 1 - i = -2 - 4i$$

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2-4i}{-4+2i} = \frac{i(2i-4)}{-+2i} = i$$

$$(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } AC = AB \text{ وهذا يعني أن } \arg(L) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ و } |L| = |i| = 1$$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

(3) نسمي (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z+3-3i| = |z+1+3i|$.

أ - التحقق أن $A \in (\delta)$ و $D \in (\delta)$.

$$|z_A + 3 - 3i| = |z_A + 1 + 3i| \text{ إذا كان } A \in (\delta)$$

$$\text{لدينا } |z_A + 3 - 3i| = |1 + i + 3 - 3i| = |4 - 2i| = \sqrt{20} \text{ و } |z_A + 1 + 3i| = |1 + i + 1 + 3i| = |2 + 4i| = \sqrt{20}$$

ومنه $|z_A + 3 - 3i| = |z_A + 1 + 3i|$ وهذا يعني أن $A \in (\delta)$.

$$|z_D + 3 - 3i| = |-2 + 3 - 3i| = |1 - 3i| = \sqrt{10} \text{ و } |z_D + 1 + 3i| = |-2 + 1 + 3i| = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$$

ومنه $|z_D + 3 - 3i| = |z_D + 1 + 3i|$ وهذا يعني أن $D \in (\delta)$.

ب - تعيين طبيعة المجموعة (δ) .

4) لتكن (E) المجموعة للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: أي $BM = CM$ بالتالي (δ) هي محور القطعة $[BC]$.

أ - كتابة العدد z_B على الشكل الأسّي.

$$z_B = -3 + 3i = 3(-1 + i) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب - تعيين طبيعة المجموعة (E) عندما يسمح q كل الأعداد الحقيقية

$$z - z_A = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4} + (-\frac{3\pi}{4} + q)i} \text{ وتكافئ } z - z_A = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times e^{(-\frac{3\pi}{4} + q)i} \text{ معناه } z = z_A + z_B e^{(-\frac{3\pi}{4} + q)i}$$

أي $z - z_A = 3\sqrt{2}e^{iq}$ وتكافئ $|z - z_A| = 3\sqrt{2}$ بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $3\sqrt{2}$.

حل التمرين 21:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 6z + 13 = 0$

$$\Delta' = 4 - 13 = -9 = (3i)^2 \text{ و } z_1 = 2 + 3i \text{ و } z_2 = 2 - 3i$$

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, Ω التي لواحقها على الترتيب $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 3 - 2i$ و $z_\Omega = 2$

$$\text{والشعاع } \vec{w} \text{ ذو اللاحقة } z_w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

أ - تعليم النقط A, B, Ω .

ب - تعيين اللاحقة z_E للنقطة E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه \vec{w} .

$$z_w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i \text{ ولدينا } z' = z + z_w \text{ هي العبارة المركبة للانسحاب}$$

ومنه $z' = z + 1 + i$ إذن $z_E = z_B + 1 + i = 3 - 2i + 1 + i = 4 - i$ أي $z_E = 4 - i$

ج - تعيين اللاحقة z_D للنقطة D صورة Ω بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

$$z_D - z_A = 2(z_\Omega - z_A) \text{ معناه } z_D = 2z_\Omega - z_A \text{ تكافئ } z_D = 4 - 3 - 2i \text{ أي } z_D = 1 - 2i$$

د - تعيين اللاحقة z_C للنقطة C صورة E بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

$$z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_A) \text{ معناه } z_C = -i(z_E - z_A) + z_A \text{ تكافئ } z_C = -i(4 - i - 3 - 2i) + 3 + 2i$$

$$\text{أي } z_C = i$$

(3) أ - تبين أن $ACDE$ متوازي أضلاع.

$$\text{لدينا } z_D - z_E = 1 - 2i - 4 + i = -3 - i \text{ و } z_C - z_A = i - 3 - 2i = -3 - i$$

ومنه $z_C - z_A = z_D - z_E$ وهذا يعني أن $\overline{AC} = \overline{ED}$ بالتالي $ACDE$ متوازي أضلاع.

ب - كتابة العدد المركب $L = \frac{z_A - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري و الأسّي.

$$\frac{z_A - z_E}{z_D - z_E} = \frac{-1 + 3i}{-3 - i} = \frac{(-1 + 3i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} = \frac{-10i}{10} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ج - استنتاج طبيعة المثلث EAD .

$$\text{لدينا } \frac{z_A - z_E}{z_D - z_E} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } \left| \frac{z_A - z_E}{z_D - z_E} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_D - z_E}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

وهذا يعني أن $EA = ED$ و $(\overline{ED}; \overline{EA}) = -\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث EAD متساوي الساقين وقائم في E .

د - طبيعة الرباعي $ACDE$.

بما أن $ACDE$ متوازي أضلاع والمثلث EAD قائم و متساوي الساقين فإن $ACDE$ مربع.

هـ - استنتاج أن النقط A, C, D, E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

النقط A, C, D, E هي رؤوس مربع فهي تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها Ω منتصف $[AD]$ ونصف قطرها ΩA .

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |3 + 2i - 2| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$$

نصف قطر الدائرة (γ) هو $\sqrt{5}$.

حل التمرين 22:

(1) حل في \mathbb{C} مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$$(1) z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \dots \text{حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي.}$$

$$\Delta = [-4(\cos \alpha)]^2 - 16 = 16 \cos^2 \alpha - 16 = 16(\cos^2 \alpha - 1)$$

$$\text{ولدينا } \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha \text{ ومنه } \Delta = -16 \sin^2 \alpha = (4i \sin \alpha)^2$$

$$\text{للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{4 \cos \alpha + 4i \sin \alpha}{2} = 2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha$$

$$\text{و } z_2 = \frac{4 \cos \alpha - 4i \sin \alpha}{2} = 2 \cos \alpha - 2i \sin \alpha$$

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2 .

$$\cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{2013} = 1 \text{ : تبيين أن :}$$

$$\cdot \text{ لدينا } z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ و } z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{2013} = 1 \text{ وعليه } \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{2013} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} \right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{2013} = e^{i(1342\pi)}$$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و

التي لاحقاتها: $z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1-i\sqrt{3}$ و $z_C = 4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ - إنشاء النقط A, B, C .

ب - كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{3i}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

$$\cdot \text{ لدينا } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A) \text{ وعليه } C \text{ هي صورة } B \text{ بالتشابه}$$

المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ج - تعيين لاحقة النقط G مرجح الجملة : $\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$.

$$\cdot z_G = 4+2i\sqrt{3} \text{ بالتالي } z_G = \frac{1+i\sqrt{3} - (1-i\sqrt{3}) + 2(4+i\sqrt{3})}{2} \text{ ومنه } z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1-1+2}$$

د - حساب z_D لاحقة النقط D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

$$ABDG \text{ متوازي أضلاع معناه } \overline{GD} = \overline{AB} \text{ أي } z_D - z_G = z_B - z_A$$

$$\cdot \text{ ومنه } z_D = z_B - z_A + z_G = 1-i\sqrt{3} - 1-i\sqrt{3} + 4+2i\sqrt{3} \text{ وبالتالي } z_D = 4$$

حل التمرين 23:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \text{ و } z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ هما للمعادلة حلان هما } \Delta = 4-8 = -4 = (2i)^2$$

2- لتكن النقط M, L, K لواحقتها $z_M = -i\sqrt{3}$ ، $z_L = 1-i$ ، $z_K = 1+i$

- تعليم النقط .

3- (أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L ،

تعيين z_N لاحقة N .

$$z_N = -(z_M - z_L) + z_L \text{ ومنه } z_N - z_L = -(z_M - z_L) \text{ معناه } \overline{LN} = \overline{LM}$$

$$\cdot \text{ أي } z_N = 2+i(\sqrt{3}-2) \text{ بالتالي } z_N = -(-i\sqrt{3}-1+i) + 1-i$$

(ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C

- تعيين z_A و z_C لاحقتي النقطتين A و C على الترتيب.

الكتابة المركبة للدوران r هي: $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ أي $z' = iz$.

$$r(M) = A \text{ معناه } z_A = iz_M = i(-i\sqrt{3}) \text{ ومنه } z_A = \sqrt{3}$$

$$r(N) = C \text{ معناه } z_C = iz_N = i(2+i(\sqrt{3}-2)) \text{ ومنه } z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$$

- تعيين لاحقة صورة النقطة L بالدوران r .

$$r(L) = K \text{ وعليه } z' = 1+i = z_K \text{ ومنه } z' = iz_L = i(1-i)$$

4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه \vec{u} ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B .

- تعيين z_B و z_D لاحقتي النقطتين B و D على الترتيب.

العبارة المركبة للانسحاب هي: $z' = z + z_u$ أي $z' = z + 2i$

$$t(M) = D \text{ معناه } z_D = z_M + 2i \text{ ومنه } z_D = -i\sqrt{3} + 2i = i(2 - \sqrt{3})$$

$$t(N) = B \text{ معناه } z_B = z_N + 2i \text{ ومنه } z_B = 2 + i(\sqrt{3}-2) + 2i \text{ أي } z_B = 2 + i\sqrt{3}$$

- تعيين لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t .

$$t(L) = K \text{ وعليه } z' = 1+i = z_K \text{ ومنه } z' = z_L + 2i = 1 - i + 2i$$

$$5- (أ) تبين أن: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$$$

$$z_A - z_B = \sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}$$

$$i(z_C - z_B) = i(2 - \sqrt{3} + 2i - 2 - i\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i \text{ أي } z_A - z_B = i(z_C - z_B)$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\text{لدينا } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i \text{ ومنه } \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

وهذا يعني أن $BA = BC$ و $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في B .

(ب) طبيعة الرباعي $ABCD$.

$$\text{لدينا } L \text{ منتصف } [MN] \text{ ولدينا } \begin{cases} r(M) = A \\ r(N) = C \\ r(L) = K \end{cases} \text{ وبما أن الدوران يحافظ على المنتصف فإن } K \text{ منتصف } [AC]$$

$$\text{ولدينا } \begin{cases} t(M) = D \\ t(N) = B \\ t(L) = K \end{cases} \text{ وبما أن الانسحاب يحافظ على المنتصف فإن } K \text{ منتصف } [BD].$$

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (قطراه متناصفان) وزيادة على ذلك لدينا $BA = BC$ و $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $ABCD$ مربع.

حل التمرين 24:**الجزء الأول:**

1- حل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} \sqrt{3}z_1 - z_2 = -2 \dots (1) \\ z_1 - \sqrt{3}z_2 = -2i \dots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد $z_2 = \sqrt{3}z_1 + 2$ بالتعويض في (2) نجد $z_1 - \sqrt{3}(\sqrt{3}z_1 + 2) = -2i$ ومنه $z_1 = -\sqrt{3} + i$.

بتعويض قيمة z_1 نجد $z_2 = \sqrt{3}(-\sqrt{3} + i) + 2 = -1 + i\sqrt{3}$.

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = -\sqrt{3} + i$ و $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

- كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي.

$$z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ بالتالي } z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ بالتالي } z_B = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

3- حساب الطويلة وعمدة لـ $\frac{z_A}{z_B}$.

$$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ وعليه } \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(z_A) - \arg(z_B), \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = 1$$

- استنتاج طبيعة المثلث ABO وقياساً للزاوية $(\overline{OA}, \overline{OB})$.

وهذا يعني أن $OA = OB$ إذن المثلث ABO متساوي الساقين. $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1$

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ إذن } \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

4- تعيين لاحقة صورة النقطة C بحيث يكون $ACBO$ معيناً.

حتى يكون $ACBO$ معيناً يكفي أن يكون متوازي أضلاع لأن $OA = OB$.

$ACBO$ متوازي أضلاع معناه $\overline{BC} = \overline{OA}$ أي $z_C - z_B = z_A$ ومنه $z_C = z_A + z_B = -1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1)$.

الجزء الثاني:

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

1- تعريف التحويل f واعطاء عناصره المميزة.

التحويل f عبارته المركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $b = 0$.

بما أن $|a|=1$ فإن f دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

2- لواقع A' ، B' و C' صور A ، B و C بالتحويل f ؟

$$z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ومنه } z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_A \text{ معناه } f(A) = A'$$

$$z_{B'} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } z_{B'} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_B \text{ معناه } f(B) = B'$$

$$z_{C'} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_C \text{ معناه } f(C) = C' \text{ ومنه } z_{C'} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) (-1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1)) = 1 - i(2 + \sqrt{3})$$

3- مساحة المثلث $A'B'C'$

بما أن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالدوران f فإن مساحة المثلث $A'B'C'$ تساوي مساحة المثلث ABC لأن الدوران تقايس ويحافظ على المساحة.

حل التمرين 25:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$

1. أ- التحقق أن 3 حل للمعادلة (E)،

$$3^3 - 3 \times 3^2 + 3 \times 3 - 9 = 27 - 27 + 9 - 9 = 0 \text{ ومنه } 3 \text{ حل للمعادلة (E)}$$

تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z فإن:

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z - 3)(z^2 + az + b)$$

$$(z - 3)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 3)z^2 + (b - 3a)z - 3b$$

$$\begin{cases} a - 3 = -3 \\ b - 3a = 3 \\ -3b = -9 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \text{ بالمطابقة مع } z^3 - 3z^2 + 3z - 9 \text{ نجد}$$

$$\text{إذن } z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z - 3)(z^2 + 3)$$

ب- حل في \mathbb{C} المعادلة (E).

$$(E) \text{ تكافئ } z = 3 \text{ أو } z^2 = -3 \text{ أي } z = 3 \text{ أو } z = i\sqrt{3} \text{ أو } z = -i\sqrt{3}$$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$\text{النقط } A, B, C \text{ صور الأعداد المركبة } z_A = 3, z_B = i\sqrt{3} \text{ و } z_C = -i\sqrt{3}$$

- إثبات أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

وهذا يعني أن $CA = CB$ ومنه المثلث ABC متساوي الساقين وبما أن $(\overline{CB}, \overline{CA}) = -\frac{\pi}{3}$ فهو متقايس الأضلاع.

يمكن حساب الأطوال AB ، AC و BC .

3. النقطة D التي لاحقها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

- تعيين z_E لاحقة النقطة E .

$$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D \quad \text{ومنه} \quad z_E = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$z_E = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i \quad \text{ومنه}$$

$$z_F = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{لاحقتها}$$

أ - حساب $\frac{z_F}{z_E}$.

$$\frac{z_F}{z_E} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{-i^2 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{i(-i - \sqrt{3})}{-\sqrt{3} - i} = i$$

استنتاج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

$$\text{لدينا} \quad \frac{z_F}{z_E} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{وهذا يعني أن} \quad (\overline{OE}; \overline{OF}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه المستقيمان} \quad (OE) \quad \text{و} \quad (OF) \quad \text{متعامدان.}$$

ب - تعيين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعاً

$$\text{لدينا} \quad \frac{z_F}{z_E} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{إذن} \quad OF = OE \quad \text{و} \quad (\overline{OE}; \overline{OF}) = \frac{\pi}{2}$$

$$OEGF \quad \text{مربع معناه} \quad \overline{FG} = \overline{OE} \quad \text{أي} \quad z_G - z_F = z_E \quad \text{ومنه} \quad z_G = z_E + z_F$$

$$\text{أي} \quad z_G = -\sqrt{3} - i + 1 - i\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$$

حل التمرين 26:

$$1. \quad P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72 \quad \text{كثير حدود للمتغير المركب} \quad z \quad \text{حيث:}$$

أ - التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 48 \times 6 - 72 = 216 - 432 + 288 - 72 = 0 \quad \text{ومنه} \quad 6 \quad \text{جذر لكثير الحدود} \quad P(z).$$

ب - ايجاد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

$$(z-6)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha-6)z^2 + (\beta-6\alpha)z - 6\beta$$

$$\text{وبالمطابقة مع} \quad z^3 - 12z^2 + 24z - 72 \quad \text{نجد} \quad \alpha - 6 = -12 \quad \text{و} \quad -6\beta = -72 \quad \text{ومنه} \quad \alpha = -6 \quad \text{و} \quad \beta = 12$$

$$\text{إذن} \quad P(z) = (z-6)(z^2 - 6z + 12)$$

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad z = 6 \quad \text{أو} \quad (1) \quad z^2 - 6z + 12 = 0 \dots$$

نحل المعادلة (1).

$$z_1 = \frac{6 + 2i\sqrt{3}}{2} = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{للمعادلة حلان هما} \quad \Delta = 36 - 48 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$$

$$\text{و} \quad z_1 = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3} \quad \text{بالتالي حلول المعادلة} \quad P(z) = 0 \quad \text{هي} \quad \{6; 3 + i\sqrt{3}; 3 - i\sqrt{3}\}.$$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B, C و C نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3+i\sqrt{3}$ و $z_C = 3-i\sqrt{3}$.

أ - كتابة كلا من z_A, z_B و z_C على الشكل الأسّي.

$$z_A = 6e^{i0}$$

$$z_B = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ ومنه } |z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{بالتالي } z_C = \overline{z_B} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ ، } z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ب - كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري.

$$\begin{aligned} \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} &= \frac{6 - 3 - i\sqrt{3}}{6 - 3 + i\sqrt{3}} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسّي

$$\arg \left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right) = \arg \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3} \text{ ، } \left| \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right| = \left| \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$

$$\text{بالتالي } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ج - استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\text{لدينا } \left| \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right| = 1 \text{ و } \arg \left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right) = -\frac{\pi}{3} \text{ وهذا يعني أن } BA = CA \text{ و } (\overline{CA}; \overline{BA}) = -\frac{\pi}{3}$$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S .

$$\text{الكتابة المركبة للتشابه } S \text{ هي } z' - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C) \text{ أي } z' = i\sqrt{3}(z - z_C) + z_C$$

$$\text{ومنه } z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$$

ب - تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

$$z_{A'} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} \text{ يكافئ } S(A) = A'$$

ج - تبين أن النقط A, B, A' في استقامة.

$$\text{هو عدد حقيقي فإن } A, B, A' \text{ في استقامة. بما أن } \frac{z_{A'} - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2i\sqrt{3} - 6}{3 + i\sqrt{3} - 6} = \frac{2(-3 + i\sqrt{3})}{-3 + i\sqrt{3}} = 2$$

حل التمرين 27:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

$$z_2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i, \quad z_1 = \frac{6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i \quad \text{هما للمعادلة حلان هما } \Delta = (6\sqrt{2})^2 - 144 = -72 = (6i\sqrt{2})^2$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C, D التي

$$z_D = \frac{z_C}{2} \quad \text{و} \quad z_C = 6\sqrt{2}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$$

(أ) كتابة z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي.

$$z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B = \overline{z_A} = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)z_A = 6\sqrt{2}i = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{(ب) حساب } \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}$$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2014} = e^{i1007\pi} = e^{i\pi} = -1$$

(ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^n$ حقيقياً سالباً.

$$\text{لدينا } \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

$$\frac{n\pi}{2} = (1+2k)\pi \quad \text{ومنه} \quad \arg \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^n = (1+2k)\pi \quad \text{حقيقي سالب معناه}$$

بالتالي $n = 2 + 4k$ حيث k عدد طبيعي.

(د) تبين أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

$$DO = |z_O - z_D| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

$$DA = |z_A - z_D| = |3i\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

$$DB = |z_B - z_D| = |-3i\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

$$DC = |z_C - z_D| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

ومنه $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ بالتالي النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D

ونصف قطرها $3\sqrt{2}$.

هـ) حساب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثم إيجاد قياساً للزاوية $(\overline{OB}; \overline{OA})$.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{3\sqrt{2}(1+i)}{3\sqrt{2}(1-i)} = \frac{(1+i)}{(1-i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$(\overline{OB}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

تعيين طبيعة الرباعي $OACB$.

$$\overline{BC} = \overline{OA} \text{ وهذا يعني أن } z_C - z_B = z_A \text{ ومنه } \frac{z_C - z_B}{z_A} = \frac{6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = 1$$

زيادة على ذلك لدينا $\frac{z_A}{z_B} = i$ وهذا يعني أن $OA = OB$ و $(\overline{OB}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $OACB$ مربع.

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويجول B إلى A .

أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R وتحديد زاويته.

العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z' - z_0 = \alpha(z - z_0)$ أي $z' = \alpha z$.

وبما أن $R(B) = A$ فإن $z_A = \alpha z_B$ ومنه $\alpha = \frac{z_A}{z_B} = i$

إذن العبارة المركبة للدوران R هي $z' = iz$.

زاوية الدوران R هي $\frac{\pi}{2}$.

ب) تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R .

$R(C) = C'$ معناه $z_{C'} = iz_C$ ومنه $z_{C'} = 6i\sqrt{2}$.

التحقق أن النقط C ، A و C' على استقامية.

تكون النقط C ، A و C' على استقامية إذا كان $\frac{z_C - z_C}{z_A - z_C}$ عدد حقيقي.

$$\text{لدينا } \frac{z_C - z_C}{z_A - z_C} = \frac{6i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}(-1+i)}{3\sqrt{2}(-1+i)} = 2 \in \mathbb{R} \text{ ومنه النقط } C, A \text{ و } C' \text{ على استقامية.}$$

ج) تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R .

$$R(A) = A' \text{ معناه } z_{A'} = iz_A \text{ ومنه } z_{A'} = i(3\sqrt{2}(1+i)) \text{ أي } z_{A'} = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

بما أن $R(O) = O$ و $R(A) = A'$ و $R(C) = C'$ و $R(B) = A$ فإن صورة الرباعي $OACB$ هو الرباعي

$OA'C'A$.

حل التمرين 28:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B ، C لاحقتها على الترتيب:

$$z_C = 2 + 4i\sqrt{3} \text{ و } z_B = 3 - i\sqrt{3} \text{ ، } z_A = 3 + i\sqrt{3}$$

(1) حساب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_B - z_A|$ واستنتاج طبيعة المثلث OAB .

$$|z_B - z_A| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} ، |z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} ، |z_A| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

ومنه $OA = OB = AB = 2\sqrt{3}$ بالتالي المثلث OAB متقايس الأضلاع.

(2) نسمي G مركز ثقل المثلث OAB .

حساب لاحقة النقطة G .

$$z_G = 2 \text{ وعليه } z_G = \frac{z_O + z_A + z_B}{3} = \frac{3 - i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}}{3}$$

(3) S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى G .

(أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، و تعيين العناصر المميزة له.

$$\left\{ \begin{array}{l} z_C = az_A + b \dots (1) \\ z_G = az_O + b \dots (2) \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} S(A) = C \\ S(O) = G \end{array} \right. \text{ لدينا}$$

$$a = \frac{z_C - 2}{z_A} = \frac{4i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = \frac{(4i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} = 1+i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_C = az_A + 2 \text{ نجد (1) في } b$$

وعليه العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' = (1+i\sqrt{3})z + 2$.

(ب) تعيين $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتشابه S .

$$z_{B'} = 8 + 2i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_{B'} = (1+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3}) + 2 \text{ تكافئ } z_{B'} = (1+i\sqrt{3})z_B + 2$$

(ج) استنتاج صورة المثلث OAB بالتشابه S .

بما أن $S(O) = G$ و $S(A) = C$ و $S(B) = B'$ فإن صورة المثلث OAB بالتشابه S هو المثلث GCB' .

(4) نسمي (C) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|-z|^2 + |z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 24$

(أ) إثبات أن (C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

الدائرة المحيطة بالمثلث OAB مركزها G ونصف قطرها $OG = |z_G| = 2$ لنثبت أن (C) هي الدائرة التي مركزها

G ونصف قطرها 2 .

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24 \text{ تكافئ } |-z|^2 + |z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 24$$

طريقة 1:

نضع $M(x; y)$

$$MO^2 = x^2 + y^2 \text{ ومنه } MO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$MA^2 = (3-x)^2 + (\sqrt{3}-y)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 \text{ ومنه } MA = \sqrt{(3-x)^2 + (\sqrt{3}-y)^2}$$

$$MB^2 = (3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 \text{ ومنه } MB = \sqrt{(3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2}$$

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = x^2 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$$

$$\text{أي } MO^2 + MA^2 + MB^2 = 3x^2 + 3y^2 - 12x + 24$$

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24 \text{ تكافئ } 3x^2 + 3y^2 - 12x + 24 = 24 \text{ وتكافئ } x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$\text{أي } (x-2)^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ ومنه } (x-2)^2 + y^2 = 4$$

إذن (C) هي الدائرة التي مركزها $G(2;0)$ ونصف قطرها 2 أي هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

طريقة 2:

$$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24 \text{ معناه } (\overline{MG} + \overline{GO})^2 + (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 = 24$$

$$\text{و تكافئ } MG^2 + GO^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GO} + MG^2 + GA^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA} + MG^2 + GB^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GB} = 24$$

$$\text{وتكافئ (1) } 3MG^2 + 2\overline{MG}(\overline{GO} + \overline{GA} + \overline{GB}) + GO^2 + GA^2 + GB^2 = 24 \dots$$

$$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |1 - i\sqrt{3}|^2 = 4, \quad GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |1 + i\sqrt{3}|^2 = 4, \quad GO^2 = |-z_G|^2 = |-2|^2 = 4$$

$$(1) \text{ تكافئ } 3MG^2 + 4 + 4 + 4 = 24 \text{ وتكافئ } MG^2 = 4 \text{ أي } MG = 2$$

إذن (C) هي الدائرة التي مركزها $G(2;0)$ ونصف قطرها 2 أي هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

(ب) تعيين صورة الدائرة (C) بالتشابه S.

صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي الدائرة (C') المحيطة بالمثلث GCB' مركزها G' صورة G بالتشابه S

ونصف قطرها 2×2 .

تعيين G' .

$$S(G) = G' \text{ معناه } z_{G'} = (1 + i\sqrt{3})z_G + 2 \text{ ومنه } z_{G'} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

إذن صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي الدائرة التي مركزها $G'(4; 2\sqrt{3})$ ونصف قطرها 4.

ملاحظة: G' هي مركز ثقل المثلث GCB' لأن التشابه المباشر يحفظ المرجح.

$$\text{ويمكن تعيين } G' \text{ بطريقة أخرى: } z_{G'} = \frac{z_G + z_C + z_{B'}}{3} = \frac{2 + 2 + 4i\sqrt{3} + 8 + 2i\sqrt{3}}{3} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

حل التمرين 29:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $z^2 - 4z + 8 = 0$

$$\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_1 = 2 - 2i$$

كتابة الحلين على الشكل الأسّي.

$$z_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C لاحتقاها على الترتيب:

$$z_A = 2 - 2i \text{ و } z_B = -z_A, \quad z_C = -3 - 3i$$

$$(أ) \text{ حساب } \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2012}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2012} = \left(\frac{2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}} \right)^{2012} = e^{-i \left(\frac{2012\pi}{4} \right)} = e^{-i503\pi} = e^{-i\pi} = -1$$

(ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقياً.

$$\cdot \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

لدينا $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقي معناه $\arg\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n = k\pi$ يكافئ $\frac{-n\pi}{4} = k\pi$ ومنه $n = -4k$ أي $n = 4k'$ و k' عدد طبيعي.

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ويحول B إلى C .

(أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S .

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z' = az + b$ بما أن S نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن $a = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}i$

ومنه $z' = \frac{3}{2}iz + b$ وبما أن $S(B) = C$ فإن $z_C = \frac{3}{2}iz_B + b$

ومنه $b = 0$ أي $b = z_C - \frac{3}{2}iz_B = -3 - 3i + 3i + 3 = 0$

وعليه الكتابة المركبة للتشابه S هي $z' = \frac{3}{2}iz$.

تعيين مركزه.

بما أن $b = 0$ فإن مركز التشابه S هو O .

(ب) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه S .

$S(A) = D$ معناه $z_D = \frac{3}{2}iz_A$ ومنه $z_D = \frac{3}{2}i(2-2i)$ أي $z_D = 3+3i$.

(ج) تعيين طبيعة الرباعي $ACBD$.

لدينا $z_B = -z_A$ ومنه $\overline{OB} = -\overline{OA}$ وهذا يعني أن O هي منتصف $[AB]$ و $z_D = 3+3i = -z_C$ ومنه $\overline{OD} = -\overline{OC}$

وهذا يعني أن O هي منتصف $[CD]$.

ولدينا $S(B) = C$ ومنه $(\overline{OB}; \overline{OC}) = \frac{\pi}{2}$ أي $\overline{OB} \perp \overline{OC}$ بالتالي $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ لأن النقط O ، A و B في استقامة

وكذلك النقط O ، C و D إذن الرباعي $ACBD$ قطراه $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان ومتعامدان نستنتج أن $ACBD$ معين

(د) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;-1), (C;2), (D;-1)\}$.

$$\cdot z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C - z_D}{1 - 1 + 2 - 1} = -5 - 13i$$

(4) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $(\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} - \overline{MD})(\overline{MA} - \overline{MB}) = 0$

G مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;-1), (C;2), (D;-1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$$\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} - \overline{MD} = \overline{MG} \quad \text{ومنهم} \quad \overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} - \overline{MD} = (1-1+2-1)\overline{MG}$$

ولدينا $\overline{MA} - \overline{MB} = \overline{MA} + \overline{BM} = \overline{BA}$

$$(\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} - \overline{MD})(\overline{MA} - \overline{MB}) = 0 \text{ تكافئ } \overline{MG} \cdot \overline{BA} = 0 \text{ بالتالي (E) هي المستقيم المار من } G$$

و \overline{BA} شعاع ناظمي له.

حل التمرين 30:

$$(1) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C}, \text{ المعادلة: } (z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$$

$$(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0 \text{ يكافئ } z^2 = -4 \text{ أو } z^2 - 6z + 10 = 0$$

حل المعادلة $z^2 = -4$.

$$z^2 = -4 \text{ تكافئ } z^2 = (2i)^2 \text{ ومنه } z = 2i \text{ أو } z = -2i.$$

حل المعادلة $z^2 - 6z + 10 = 0$.

$$\Delta' = 9 - 10 = -1 = i^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = 3 + i \text{ أو } z = 3 - i.$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$ هي: $\{2i; -2i; 3+i; 3-i\}$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, D و E

التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 2i, z_B = -2i, z_C = 3 - i, z_D = 3 + i$ و $z_E = 2 - 2i$.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} \text{ نضع}$$

أ - حساب طولية العدد المركب L وعمدة له.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{3 - i - 2i}{3 + i + 2i} = \frac{3 - 3i}{3 + 3i} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{ومنه } |L| = |-i| = 1 \text{ و } \arg(L) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

تفسير النتائج هندسيا.

$$|L| = 1 \text{ معناه } \frac{AC}{BD} = 1 \text{ ومعناه } AC = BD$$

$$\arg(L) = -\frac{\pi}{2} \text{ معناه } (\overline{BD}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ب - استنتاج أنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

$$\begin{cases} z_A = az_B + b \dots (1) \\ z_C = az_D + b \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{ب طرح (1) من (2) نجد } z_C - z_A = a(z_D - z_B) \text{ ومنه } a = \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = -i$$

بما أنه يوجد عدد مركب وحيد a غير معدوم و $|a| = |-i| = 1$ فإنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A

$$\text{ويحول } D \text{ إلى } C \text{ زاويته } \arg(a) = -\frac{\pi}{2}$$

(3) نسمي (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$

أ - إثبات أن B تنتمي إلى (Γ_1) .

$$B \text{ تنتمي إلى } (\Gamma_1) \text{ إذا كان } \arg(iz_B + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{لدينا } iz_B + 1 - 3i = i(-2i) + 1 - 3i = 3 - 3i = 3(1 - i) \text{ ومنه } \arg(iz_B + 1 - 3i) = \arg(3(1 - i)) = -\frac{\pi}{4}$$

وهذا يعني أن B تنتمي إلى (Γ_1) .

تعيين المجموعة (Γ_1) .

$$\arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4} \text{ معناه } \arg(i(z - i - 3)) = -\frac{\pi}{4} \text{ ومعناه } \arg(i) + \arg(z - i - 3) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{وتكافئ } \frac{\pi}{2} + \arg(z - (i + 3)) = -\frac{\pi}{4} \text{ و تكافئ } \arg(z - (i + 3)) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \text{ أي } \arg(z - z_D) = -\frac{3\pi}{4}$$

بالتالي (Γ_1) هي نصف مستقيم مبدؤه D وبما أن B تنتمي لـ (Γ_1) فإن (Γ_1) هي نصف المستقيم $[DB]$ باستثناء النقطة D .

ب - نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r .

تعيين المجموعة (Γ_2) .

$$\text{بما أن } \begin{cases} r(B) = A \\ r(D) = C \end{cases} \text{ فإن } (\Gamma_2) \text{ صورة } (\Gamma_1) \text{ هو نصف المستقيم } [CA] \text{ باستثناء النقطة } C.$$

4) بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z نرفق بالدوران r النقطة M' ذات اللاحقة z' .

أ - كتابة العبارة المركبة للدوران r .

$$\text{العبارة المركبة للدوران } r \text{ من الشكل } z' = -iz + b \text{ و بما أن } r(B) = A \text{ فإن } z'_A = -iz_B + b$$

$$\text{ومنه } b = z'_A + iz_B \text{ أي } b = 2 + 2i \text{ وعليه العبارة المركبة للدوران } r \text{ هي } z' = -iz + 2 + 2i$$

تعيين سابقة O بالدوران r .

$$z'_O = -iz + 2 + 2i \text{ تكافئ } -iz + 2 + 2i = 0 \text{ ومنه } z = \frac{2 + 2i}{i} = 2 - 2i = z_E$$

إذن سابقة O بالدوران r هي E أي $r(E) = O$.

ب - تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz + 2 + 2i| = |z'_A|$.

$$|-iz + 2 + 2i| = |z'_A| \text{ تكافئ } |z| = 2 \text{ تكافئ } OM' = 2 \text{، حيث } z' \text{ لاحقة النقطة } M' \text{ صورة النقطة } M \text{ بالدوران } r.$$

$$\text{ولدينا } r(E) = O \text{ إذن } EM = OM' = 2 \text{ ومنه } EM = 2 \text{ بالتالي مجموعة النقط } M(z) \text{ بحيث } |-iz + 2 + 2i| = |z'_A|$$

هي الدائرة ذات المركز E ونصف القطر 2 .

$$(5) \text{ التفسير الهندسي لعمدة العدد } \frac{z - z_B}{z - z_D}$$

$$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_D}\right) = (\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{BM})$$

استنتاج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقياً سالباً.

يكون العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقياً سالباً إذا كان $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right) = \pi$

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right) = \pi$ تكافئ $(\overline{DM}; \overline{BM}) = \pi$ ومنه مجموعة النقط M المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[DB]$

باستثناء النقطتين D و B .

حل التمرين 31:

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$.

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ و } z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ هما للمعادلة حلان هما } \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (\sqrt{3}i)^2$$

2 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, D و F

التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2$ ، $z_D = -2 + 2\sqrt{3}i$ و $z_F = \overline{z_D}$.

أ - كتابة z_B و z_A على الشكل الأسّي، و علم النقط A, B, C, D و F .

$$\arg(z_A) = \frac{2\pi}{3} \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ بحيث } \arg(z_A) = \theta, |z_A| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\text{وعليه } z_B = \overline{z_A} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}, z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ب - طبيعة المثلث ABC .

$$AB = |z_B - z_A| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = |-\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left| -2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| -2 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{3}$$

ومنه $AB = AC = BC$ بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 2)$.

أ - تعيين مركز وزاوية الدوران R .

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه M_0 ذات اللاحقة z_0 وزاويته θ هي $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

لدينا $z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 2)$ تكافئ $z' - z_c = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_c)$ ومنه مركز الدوران R هو النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ب - لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R .

إثبات أن لاحقة النقطة E هي $z_E = 1 + \sqrt{3}i$.

$$z_E = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2\sqrt{3}i) - 2 \text{ وتكافئ } z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}} (2\sqrt{3}i) - 2 \text{ معناه } z_E + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} (z_D + 2)$$

$$z_E = 1 + \sqrt{3}i \text{ وعليه}$$

ج. كتابة العدد $\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i}{-2 + 2\sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \sqrt{3}i$$

استنتاج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان.

$$\overline{ED} \perp \overline{EF} \text{ أي } (\overline{ED}; \overline{EF}) = \frac{\pi}{2} \text{ وهذا يعني أن } \arg\left(\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } \frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = \sqrt{3}i$$

ومنه المستقيمان (ED) و (EF) متعامدان.

(4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E ، نرفق العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z - z_C}{z - z_E}$

- لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا. تعيين المجموعة (Γ_1) .

M تنتمي لـ (Γ_1) معناه $z' = 0$ أي $z = z_C$ أو $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $z \neq z_E$

$$\text{ولدينا } \arg(z') = \arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_E}\right) = (\overline{ME}; \overline{MC})$$

وعليه M تنتمي لـ (Γ_1) معناه $M = C$ أو $(\overline{ME}; \overline{MC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $M \neq E$

بالتالي (Γ_1) هي الدائرة التي قطرها $[EC]$ باستثناء النقطة E .

(5) لتكن G مرجح الجملة $\{(A; |z_A|), (B; |z_B|), (C; |z_C|)\}$

أ. تعيين z_G لاحقة النقطة G .

لدينا $|z_A| = 1$ ، $|z_B| = 1$ ، $|z_C| = 2$ ومنه G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 1), (C; 2)\}$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + 2z_C}{3} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 4}{3} = \frac{-5}{3}$$

ب. (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\|$

- التحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) .

$$\|\overline{CA} + \overline{CB} + 2\overline{CC}\| = \|\overline{CA} + \overline{CB}\| \text{ ومنه } \|\overline{CA} + \overline{CB} + 2\overline{CC}\| = \|\overline{CA} + \overline{CB} - 2\overline{CC}\|$$

تعيين طبيعة (Γ_2) .

من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = 4\overline{MG}$

$$\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC} = \overline{MC} + \overline{CA} + \overline{MC} + \overline{CB} - 2\overline{MC} = \overline{CA} + \overline{CB} \quad \text{و}$$

$$.MG = \frac{\|\overline{CA} + \overline{CB}\|}{4} \quad \text{أي} \quad \|4\overline{MG}\| = \|\overline{CA} + \overline{CB}\| \quad \text{تعني} \quad \|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\|$$

$$.MG = \frac{3}{4} \quad \text{ولدينا} \quad \|\overline{CA} + \overline{CB}\| = |z_A - z_C + z_B - z_C| = |3| = 3$$

بالتالي (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{3}{4}$.

حل التمرين 32:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \square المعادلة: $z^2 - 2z + 10 = 0$.

$$.z_2 = \frac{2-6i}{2} = 1-3i, \quad z_1 = \frac{2+6i}{2} = 1+3i \quad \Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2$$

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C, D لواحقها على الترتيب:

$$.z_D = 1-3i \quad \text{و} \quad z_C = -3+i, \quad z_B = 1+3i, \quad z_A = 2+i$$

أ - كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3+i-1-3i}{2+i-1-3i} = \frac{-4-2i}{1-2i} = \frac{(-4-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-10i}{5} = -2i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$. \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{وهذا يعني أن} \quad (\overline{BA}; \overline{BC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ب - كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى C وتحديد نسبته وزاويته.

العبارة المركبة للتشابه S من الشكل $z' - z_B = a(z - z_B)$ وبما أن $S(A) = C$ فإن $z_C - z_B = a(z_A - z_B)$

$$\text{ومنه} \quad \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -2i \quad \text{وعليه العبارة المركبة للتشابه} \quad S \quad \text{هي} \quad z' - z_B = -2i(z - z_B) \quad \text{أي} \quad z' = -2iz - 5 + 5i$$

ج - تعيين z_E لاحقة النقطة E ؛ علماً أن D هي صورة E بالتشابه S .

$$z_D = -2iz_E - 5 + 5i \quad \text{ومعناه} \quad 1-3i = -2iz_E - 5 + 5i \quad \text{ومنه} \quad z_E = \frac{6-8i}{-2i} = \frac{3-4i}{-i}$$

$$.z_E = -4+3i \quad \text{أي}$$

3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\frac{1}{2}$.

أ - - تبيين أن F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين ب: -3 و 1 على الترتيب.

$$\text{لدينا} \quad \overline{AF} = -\frac{1}{2}\overline{AB} \quad \text{معناه} \quad \overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{AB} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \overline{AF} + \frac{1}{2}(\overline{AF} + \overline{FB}) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{3}{2}\overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{FB} = 0$$

$$\text{تكافئ} \quad -\frac{3}{2}\overline{FA} + \frac{1}{2}\overline{FB} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad -3\overline{FA} + \overline{FB} = 0 \quad \text{نستنتج أن} \quad F \quad \text{هي مرجح النقطتين} \quad A \quad \text{و} \quad B \quad \text{المرفقتين}$$

ب: -3 و 1 على الترتيب.

ب - تعيين z_F لاحقة النقطة F .

$$z_F = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{-6 - 3i + 1 + 3i}{-2} = -\frac{5}{2}$$

حل التمرين 33:نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$.(1) إثبات أن العدد -1 حلا لهذه المعادلة.

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 1 + 7 = 0$$

إيجاد الحلين الآخرين.

بما أن -1 حل للمعادلة فإن $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

$$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)(z^2 + az + b) = z^3 + (a+1)z^2 + (a+b)z + b$$

$$b=7 \text{ و } a+b=3 \text{ و } a+1=-3 \text{ بالمطابقة نجد } a=-4 \text{ و } b=7$$

$$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)(z^2 - 4z + 7) \text{ ومنه } a=-4 \text{ و } b=7$$

$$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0 \text{ معناه } (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \text{ أي } z = -1 \text{ أو } (1) z^2 - 4z + 7 = 0$$

نحل المعادلة (1).

$$\Delta = 16 - 28 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$$

$$z = 2 - \sqrt{3}i \text{ أو } z = 2 + \sqrt{3}i \text{ هما للمعادلة حلان}$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, G لواحقتهاعلى الترتيب: z_1, z_2, z_3, z_4 حيث $z_1 = -1, z_2 = 2 + \sqrt{3}i, z_3 = 2 - \sqrt{3}i, z_4 = 3$.- كتابة العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{-1 - 2 + \sqrt{3}i}{3 - 2 + \sqrt{3}i} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{(-3 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه}$$

استنتاج طبيعة المثلث ACG .

$$\text{لدينا } \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } (\overline{CG}; \overline{CA}) = \frac{\pi}{2} \text{ بالتالي المثلث } ACG \text{ قائم في } C.$$

(3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: (1) $(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}) \cdot \overline{CG} = 12$.أ - إثبات أن G هي مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$.

$$\frac{-z_1 + 2z_2 + 2z_3}{3} = \frac{1 + 4 + 2\sqrt{3}i + 4 - 2\sqrt{3}i}{3} = 3 = z_4$$

ب - إثبات أن المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل (2) $\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4$. G مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$ إذن من أجل نقطة M من المستوي لدينا

$$-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC} = (-1 + 2 + 2)\overline{MG} = 3\overline{MG}$$

المساواة (1) تكافئ $3\overline{MG} \cdot \overline{CG} = 12$ ومنه $\overline{MG} \cdot \overline{CG} = 4$ أي $\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4$.

ج- التأكد أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

A تنتمي إلى المجموعة (γ) إذا كان $\overline{GA} \cdot \overline{CG} = -4$.

لدينا $A(-1;0)$ ، $C(2;-\sqrt{3})$ ، $G(3;0)$ ، $\overline{GA}(-4;0)$ ، $\overline{CG}(1;\sqrt{3})$.

$\overline{GA} \cdot \overline{CG} = -4(1)+0(\sqrt{3}) = -4$ وهذا يعني أن A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

د- تبين أنه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overline{AM} \cdot \overline{CG} = 0$.

$\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4$ معناه $(\overline{GA} + \overline{AM}) \cdot \overline{CG} = -4$ ومعناه $\overline{GA} \cdot \overline{CG} + \overline{AM} \cdot \overline{CG} = -4$

ولدينا $\overline{GA} \cdot \overline{CG} = -4$ ومنه $\overline{AM} \cdot \overline{CG} = -4 + 4 = 0$ أي $\overline{AM} \cdot \overline{CG} = 0$.

استنتاج طبيعة (γ) .

$(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}) \cdot \overline{CG} = 12$ تكافئ $\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4$ وتكافئ $\overline{AM} \cdot \overline{CG} = 0$

بالتالي (γ) هي المستقيم المار من A و \overline{CG} شعاع ناظمي له.

حل التمرين 34:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.

$(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ يكافئ $z = i$ أو (1) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

نحل المعادلة (1).

$\Delta' = 3 - 4 = -1 = i^2$ للمعادلة حلان هما $z = \sqrt{3} + i$ أو $z = \sqrt{3} - i$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نسمي A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$.

(أ) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(ب) استنتاج قيسا للزاوية $(\overline{OB}; \overline{OA})$ وطبيعة المثلث OAB .

ومنه $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ومنه $(\overline{OB}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{3}$ ولدينا $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1$ ومنه $OA = OB$ إذن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

(ج) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً موجباً.

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ حيث } n = 6k \text{ وعليه } \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \text{ ومنه } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 2k\pi \text{ حقيقي موجب معناه } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$$

(د) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيلياً صرفاً؟

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \text{ تخيلي صرف معناه } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ وتكافئ } \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ومنه } \frac{n}{3} = \frac{1}{2} + k$$

أي $n = \frac{3}{2} + 3k$ وتكافئ (1) $2n = 3 + 6k \dots$ لا تقبل حلولاً في \mathbb{N} لأن $2n$ زوجي و $3 + 6k$ فردي

ومنه لا يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيلياً صرفاً.

(3) أ) تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددًا نسبته وزاويته.

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل $z' - z_1 = \alpha(z - z_1)$ وبما أن S يحول B إلى C فإن

$$\alpha = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3}}{-2i} = \frac{-\sqrt{3}}{2} i = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ ومنه } z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' - z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(z - z_1)$ أي $z' = -\frac{\sqrt{3}}{2} iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} i$

نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

(ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC

بما أن $S(B) = C$ فإن $(\overline{AB}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABC قائم في A .

يمكن استنتاج طبيعة المثلث ABC بطريقة أخرى

لدينا $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = -\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن $(\overline{AB}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ABC قائم في A .

(4) أ) تعيين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقاط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

$$AM^2 + CM^2 = 5 \text{ تكافئ } |z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

طريقة 1:

نضع $M(x; y)$

$$AM^2 = (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 \text{ ومنه } AM = \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2}$$

$$CM^2 = x^2 + (y - 1)^2 \text{ ومنه } BM = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

$$AM^2 + CM^2 = (x - \sqrt{3})^2 + x^2 + 2(y - 1)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2(y - 1)^2 \text{ ومنه}$$

$$x^2 - \sqrt{3}x + (y-1)^2 = 1 \text{ ومعناه } 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2(y-1)^2 = 5 \text{ معناه } AM^2 + CM^2 = 5$$

$$\cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{7}{4} \text{ أي } \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + (y-1)^2 = 1$$

$$\cdot \sqrt{\frac{7}{4}} \text{ ونصف قطرها } I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \text{ هي الدائرة التي مركزها}$$

طريقة 2:

$$\cdot z_I = \frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \text{ ومنه } [AC] \text{ منتصف}$$

$$(\overline{AI} + \overline{IM})^2 + (\overline{CI} + \overline{IM})^2 = 5 \text{ معناه } AM^2 + CM^2 = 5$$

$$AI^2 + IM^2 + 2\overline{AI}\overline{IM} + CI^2 + IM^2 + 2\overline{CI}\overline{IM} = 5$$

$$2IM^2 - 2\overline{IM}(\overline{IA} + \overline{IC}) + AI^2 + CI^2 = 5$$

$$2IM^2 + AI^2 + CI^2 = 5 \dots (1) \text{ ومنه } [AC] \text{ منتصف } I \text{ لأن } 2\overline{IM}(\overline{IA} + \overline{IC}) = 0 \text{ ولدينا } \overline{IA} + \overline{IC} = \overline{0}$$

$$\cdot CI^2 = |z_I - z_C|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}, \quad AI^2 = |z_I - z_A|^2 = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$$

$$(1) \text{ تكافئ } 2IM^2 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 5 \text{ أي } IM^2 = \frac{7}{4} \text{ ومنه } IM = \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{7}{4}} \text{ ونصف قطرها } I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \text{ هي الدائرة التي مركزها}$$

$$\cdot |z - z_1| = |z - z_3| \text{ حيث } z \text{ لاحقتها من المستوي التي لاحقتها } z$$

$$\cdot |z - z_1| = |z - z_2| \text{ تكافئ } AM = CM \text{ إذن } (E') \text{ هي محور القطعة } [AC].$$

حل التمرين 35:

$$1. \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C}, \text{ المعادلة ذات المجهول } z, \text{ التالية: } z^2 + z + 1 = 0$$

$$\cdot z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ و } z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ هما للمعادلة حلان هما } \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (\sqrt{3}i)^2$$

$$2. \text{ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس } (O; \vec{u}, \vec{v}), \text{ النقط } A, B, \text{ و } M \text{ ذات اللاهقات:}$$

$$\cdot z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \overline{z_A}, \text{ و } z \text{ على الترتيب (يرمز } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A \text{).}$$

أ - كتابة z_A على الشكل الأسّي .

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\cdot \text{ ب - تعيين مجموعة النقط } M \text{ من المستوي، حيث: } \arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

$$\text{ ومعناه } 2\arg(z - z_A) = \arg(z_A) + \arg(z_A) \text{ معناه } \arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

باستثناء النقطة A . $2\arg(z - z_A) = 2\arg(z_A)$ ومنه $\arg(z - z_A) = \arg(z_A) + k\pi$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (OA)

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = z_A + z + z_B\sqrt{3}$.
- تعيين طبيعة التحويل r وعناصره المميزة.

العبارة المركبة للتحويل r من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = z_A$ و $b = \sqrt{3}z_B$.

و $|a| = |z_A| = 1$ و $\arg(a) = \arg(z_A) = \frac{3\pi}{4}$ ومنه r دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة

$$z_\Omega = \frac{\sqrt{3}z_B}{1 - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{i(3 + i\sqrt{3})}{3 + i\sqrt{3}} = i$$

ب - التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$.
- تعيين نسبة ومركز التحاكي h .

نسبة التحاكي هي -2 ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $i = z_\Omega = \frac{3i}{1 - (-2)}$ أي مركز التحاكي h هو Ω .

ج - نضع: $S = h \circ r$. (يرمز \circ إلى تركيب التحويلين r و h).
- تعيين طبيعة التحويل S ، وعناصره المميزة.

يمكن اعتبار h تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته π ومركزه Ω

و r تشابه مباشر نسبته 1 وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه Ω إذن S هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين أي نسبته 2

وزاويته $\pi + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ أي زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه Ω .

التحقق أن عبارته المركبة هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i) + i$.

العبارة المركبة للتشابه S هي: $z' - z_\Omega = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_\Omega)$ أي $z' - i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$ ومنه $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i) + i$

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D ، و E ؛ حيث: $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$.
- إثبات أن النقط O ، Ω ، و E في استقامية.

لدينا $S(D) = E$ ومنه $S[S(C)] = E$ أي $S \circ S(C) = E$ يكافئ $S \circ S[S(O)] = E$ يكافئ $S \circ S \circ S(O) = E$

نستنتج أن E هي صورة O بالتحويل $S \circ S \circ S$ ولدينا $S \circ S \circ S$ تشابه مباشر زاويته $3 \times \frac{\pi}{4}$ أي زاويته π

ومركزه Ω ومنه $(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega E}) = \pi$ وهذا يعني أن النقط O ، Ω ، و E في استقامية.

طريقة 2:

لدينا $S(O) = C$ معناه $(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega C}) = \frac{\pi}{3}$

$S(C) = D$ معناه $(\overline{\Omega C}; \overline{\Omega D}) = \frac{\pi}{3}$

$$S(D) = E \text{ معناه } (\overline{\Omega D}; \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega C}) + (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega D}) + (\overline{\Omega D}; \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \text{ نجد طرفاً إلى طرف نجد}$$

$$(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega E}) = \pi \text{ ومنه } (\overline{\Omega O}; \overline{\Omega C}) + (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega D}) + (\overline{\Omega D}; \overline{\Omega E}) = (\overline{\Omega O}; \overline{\Omega E})$$

وهذا يعني أن النقط O و Ω و E في استقامة.

5. أ - تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ حيث θ عدد حقيقي.

$$z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه } z - i = 2e^{i\theta} \text{ وتكافئ } z - z_{\Omega} = 2e^{i\theta} \text{ وتكافئ } |z - z_{\Omega}| = 2 \text{ أي } \Omega M = 2$$

بالتالي (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 2.

ب - تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي، $M'(z')$ صورتها بالتشابه S إذن $\Omega M' = 2\Omega M$

إذا كانت M نقطة من (Γ) فإن $\Omega M = 2$ ولدينا $\Omega M' = 2\Omega M$ ومنه $\Omega M' = 2 \times 2 = 4$ أي $\Omega M' = 4$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

طريقة 2:

$$z = 2e^{i\theta} + i \text{ ومنه } z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}((2e^{i\theta} + i) - i) + i \text{ ومنه } z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(2e^{i\theta}) + i \text{ أي } z' - i = 4e^{i(\frac{\pi}{3} + \theta)}$$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

حل التمرين 36:

$$1. \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) } z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 ومنه العدد 1 هو حل ظاهري للمعادلة (1).

$$\text{ومنه } z^3 + z^2 + 3z - 5 = (z-1)(z^2 + az + b) \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

$$z^3 + z^2 + 3z - 5 = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b \text{ بالمطابقة نجد } a = 2 \text{ و } b = 5$$

$$\text{ومنه } z^3 + z^2 + 3z - 5 = (z-1)(z^2 + 2z + 5)$$

$$(1) \text{ تكافئ } z = 1 \text{ أو } z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = -1 - 2i \text{ أو } z = -1 + 2i$$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\{1; -1 - 2i; -1 + 2i\}$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و C لواقعها على الترتيب

$$z_A = 1, z_B = -1 + 2i, z_C = -1 - 2i$$

كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\text{لدينا } z_C - z_A = -1 - 2i - 1 = -2 - 2i \text{ و } z_B - z_A = -1 + 2i - 1 = -2 + 2i$$



$$\text{ومنه } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2-2i}{-2+2i} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ وهذا يعني أن}$$

بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A . و $AC = AB$ و $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$

3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 + 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in]-\pi; \pi[$

ولتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ حيث λ عدد حقيقي.

أ. تحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من (E) و (F) .

A تنتمي إلى (E) إذا وجد عدد حقيقي θ بحيث $z_A = -1 + 2e^{i\theta}$

لدينا $z_A = -1 + 2 = -1 + 2e^{i0}$ إذن من أجل $\theta = 0$ نجد النقطة A من (E) .

A تنتمي إلى (F) إذا وجد عدد حقيقي λ بحيث $z_A = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $z_A = -1 - 2i + 2 + 2i = -1 + 2i + 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن من أجل $\lambda = 2\sqrt{2}$ نجد النقطة A من (F) .

ب. كتابة معادلة ديكارتية لـ (E)

$$z = -1 + 2e^{i\theta} \text{ معناه } z + 1 = 2e^{i\theta} \text{ بوضع } z_i = -1 \text{ ومنه } z - z_i = 2e^{i\theta} \text{ وتكافئ } |z - z_i| = 2 \text{ أي } IM = 2$$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $I(-1; 0)$ ونصف قطرها 2 والمعادلة الديكارتية لـ (E) هي $(x+1)^2 + y^2 = 4$

كتابة معادلة ديكارتية لـ (F)

$$z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ معناه } z - z_C = \lambda e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ إذن } (F) \text{ هي المستقيم الذي يشمل } C \text{ وميله } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

إذن معادلة (F) من الشكل $y = x + b$ وبما أن $C \in (F)$ فإن $-2 = -1 + b$ ومنه $b = -1$

وعليه معادلة (F) هي $y = x - 1$.

تعيين نقطتي تقاطعهما.

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} y = x - 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} y = x - 1 \\ (x+1)^2 + (x-1)^2 = 4 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

ومنه $(x; y) \in \{(1; 0); (-1; -2)\}$ إذن (E) و (F) يتقاطعان في النقطتين A و C .

4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B

أ. كتابة العبارة المركبة للتشابه S وتعيين نسبته وزاويته.

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z' - z_C = a(z - z_C)$ وبما أن $S(A) = B$ فإن $z_B - z_C = a(z_A - z_C)$

$$\text{ومنه } a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{4i}{2+2i} = 1+i \text{ وعليه الكتابة المركبة للتشابه } S \text{ هي } z' - z_C = (1+i)(z - z_C)$$

$$\text{أي } z' = (1+i)z - 2 + i$$

$$|a| = |1+i| = \sqrt{2} \text{ ومنه نسبة التشابه } S \text{ هي } \sqrt{2}$$

$$\arg(a) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \text{ ومنه زاوية التشابه } S \text{ هي } \frac{\pi}{4}$$

ب - تعيين (E') و (F') صورتا (E) و (F) بالتشابه S .

نضع $I' = S(I)$ ومنه $z_{I'} = -3$ وبما أن نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$ فإن (E') هي الدائرة التي مركزها I' ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

بما أن $S(A) = B$ و $S(C) = C$ فإن (F') هي المستقيم (BC) لأن (F) هي المستقيم (AC) .

ج - استنتاج تقاطع (E') و (F')

بما أن (E) و (F) يتقاطعان في النقطتين A و C فإن (E') و (F') يتقاطعان في النقطتين $S(A)$ و $S(C)$ أي في النقطتين B و C .

Mostefai A/Elaziz - Mus1@ohotmail.com