

تمرين 1 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول

$$u_0 = 1 - \frac{1}{e} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n :$$

$$u_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - u_n}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}, \text{ ثم استنتج اتجاه}$$

تغير المتتالية (u_n) .

3. أثبت أن (u_n) متقاربة.

4. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \text{ كما يلي : } v_n = \ln(1 - u_n)$$

• بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

• عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

• أحسب الجداء π_n حيث :

$$\pi_n = (1 - u_0) \times (1 - u_1) \times \dots \times (1 - u_n)$$

تمرين 2 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = 1 \\ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \right); n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{-1 + 4u_n}$$

2. نعتبر (v_n) متتالية معرفة بـ $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$ لكل n

من \mathbb{N} .

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين

أساسها و حددها الأول.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 3 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

2. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي

$$n \text{ كما يلي : } v_n = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$$

• بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

• عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

• أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

• أحسب الجداء π_n حيث : $\pi_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

تمرين 4 :

نعتبر f دالة معرفة على \mathbb{N}^* بالعلاقة : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1. أثبت أن : $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ من أجل كل x من \mathbb{N}^*

2. أثبت أن : f متزايدة تماما على \mathbb{N}^* ثم بين أنه من

أجل كل عدد حقيقي $x \leq \sqrt{3}$ فإن $f(x) \leq \sqrt{3}$.

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ

$$u_0 = -1 \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

• برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n , $u_n \geq 0$.

• برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

• أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) , ثم استنتج أنها

متقاربة.

4. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$

• برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و

حددها الأول.

• اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة

u_n بدلالة n .

• أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 5:

I- (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{2}{6}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $u_n > -2$
2. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) .

II- نعتبر (v_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $v_n = \frac{3}{u_n + 2}$

1. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
2. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
3. أوجد نهاية المتتالية (u_n) .
4. أحسب بدلالة n المجموع :
 $S_n = v_0u_0 + v_1u_1 + \dots + v_nu_n$

تمرين 6:

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

- I. أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ المنحني (c_f) الممثل للدالة f المعرفة على \mathbb{N}^* حيث :

II. باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود مثل على محور الفواصل الحدود $u_0; u_1; u_2$.

أ. ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من \mathbb{N} :
 $1 \leq u_n < 4$

ج. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

III. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بالعلاقة :

$v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

1. عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

أساسها q وحدها الأول v_0 .

2. نضع $\alpha = -4$

أ. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج

عبارة u_n بدلالة n .

ب. أحسب بدلالة n المجموع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

تمرين 7:

(U_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$$U_0 = 4 \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{9U_n - 49}{U_n - 5}$$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n :
 $U_n \neq 7$

(2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$$V_n = \frac{1}{U_n - 7}$$

(3) برهن أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(4) عبر عن V_n و U_n بدلالة n

(5) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
ثم استنتج بدلالة n المجموع :

$$H_n = V_0U_0 + V_1U_1 + \dots + V_nU_n$$

تمرين 8 : BAC2009 (3 ع ت) (5 نقاط)

(U_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً حدها الأول U_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 32 \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = 216 \end{cases}$$

(1) أ- أحسب U_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول U_1

ب- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n

ج- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

(2) (V_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $V_1 = 2$ و

$$V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n + U_n \quad (\text{أ}) \quad \text{أحسب } V_2 \quad \text{و} \quad V_3$$

(ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$W_n = \frac{V_n}{U_n} - \frac{2}{3}$$

بين أن (W_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(1) أ- أكتب W_n بدلالة بدلالة n ثم استنتج V_n بدلالة n

ب- أحسب المجموع $S_n = w_1 + \dots + w_n$ بدلالة n

تمرين 9:

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$$u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

1. أحسب الحدود $u_1; u_2; u_3$.
2. باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد

$$. u_n = \frac{n}{n+1} : n \text{ طبيعي}$$

3. هل المتتالية (u_n) ؟ علل .

4. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي :

$$V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_1 + \dots + v_n$.
- عين أصغر عدد طبيعي n بحيث : $S_n < -3$
- أحسب نهاية S_n عند $+\infty$.

تمرين 10:

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad 3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$$

1. أحسب الحدود $u_1; u_2; u_3$.
2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي :

$$V_n = u_n - n$$

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

(ج) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ما هي نهايتها ؟

3. أحسب المجموعين : $S = 1 + 2 + \dots + 99$.

$$S' = 1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}$$

4. استنتج المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99}$.

تمرين 11:

f دالة معرفة على المجال $[2, +\infty[$ كمايلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$$

(1) احسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها على المجال $[2, +\infty[$

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2, +\infty[$

$$(II) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي: } \begin{cases} U_0 = \frac{5}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1- برهن بالتراجع انه من اجل كل n من \mathbb{N} فإن:

$$2 < U_n < 3$$

2- استنتج انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $U_n^2 < \frac{9}{10}(U_n^2 + 1)$

3- أثبت ان المتتالية (U_n) متناقصة تماما

4- تحقق انه من اجل $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - 2 = \frac{U_n^2}{U_n^2 + 1}(U_n - 2)$$

5- اثبت انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$

6- هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

تمرين 12 : BAC 2011 (3 تق ر) (5 نقاط)

(U_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* ب :

$$U_1 = 1 \quad \text{و} \quad U_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

(1) اثبت انه من اجل كل عدد عدد طبيعي غير معدوم n :

$$U_n > 1 \quad \text{ثم استنتج ان} \quad U_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$$

(2) أدرس إتجاه تغير (U_n) ، ثم بين انها متقاربة، احسب نهاية

$$(U_n)$$

(3) ليكن الجداء P_n المعرف كمايلي :

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$$

- اثبت بالتراجع انه من اجل $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

(4) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كمايلي :

$$V_n = \ln U_n$$

حيث \ln الدالة اللوغارتم النيبيري

عبر بدلالة P_n عن S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

ثم احسب نهاية S_n لما ينتهي n الى $+\infty$