الدالة الاسية + الدالة اللوغاريتمية

الدالة exp

تعريف: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\exp(x)=e^x$ تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.

من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$
- $e^x \succ 0$
- $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$
- $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

النهايات

(1) $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ بدراسة الدالة $x\mapsto e^x-x$

(2) $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ بوضع $x=-X$ فإن $\lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim_{X\to-\infty}\frac{1}{e^X}=0$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ باستعمال العدد المشتق

(4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ تزايد المقارن

(5) $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ ، $\lim_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ تزايد المقارن

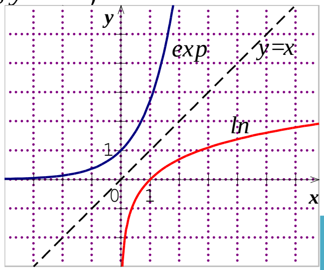
الدالة ln

من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=\ln x$. $\ln x=y$ يكافئ $x=e^y$ $(x\succ 0; y\in\mathbb{R})$

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

نتائج: * $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ * $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

* من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\ln(a^n)=n\ln a$. * $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$



$a<b$ يعني $e^a<e^b$
$a=b$ يعني $e^a=e^b$.

$a=b$ يعني $\ln a=\ln b$
$a<b$ يعني $\ln a<\ln b$

النهايات

(1) $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ باستعمال التعريف

(2) $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$ بوضع $x=\frac{1}{X}$ فإن $\lim_{x\to0}\ln x=\lim_{X\to+\infty}\ln\frac{1}{X}=\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ *

(3) $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ باستعمال العدد المشتق

(4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ تزايد المقارن

(5) $\lim_{x\to0}x\ln x=0$ ، $\lim_{x\to0}x^n\ln x=0$ تزايد المقارن

المشتقة

$(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

$(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

*أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto e^x$ بجوار 0. لدينا: $e^x\approx 1+x$.

* التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأول).

* أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " ln " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " exp "

* الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

*من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ ، $\ln x^2=2\ln|x|$.

*أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto\ln(x+1)$ بجوار 0. لدينا: $\ln(x+1)\approx x$.

*الدالة اللوغاريتم العشري المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$

* من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $\log x=y$ يكافئ $x=10^y$

الدالة الأسية/ من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: $e^0=1$ ** $\exp'(x)=e^x$ * $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ *

$e^{x+y}=e^xe^y$ * $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ * $e^{nx}=(e^x)^n$.

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$.

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على R

النهايات: (1) $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. (2) $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و (2) $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (2) $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ (1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

نتائج: • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$.

• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I. **خاصية:** $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

الدالة اللوغارتمية/ نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز " ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من R

$x=e^y$ يعني $y=\ln x$.

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x}=x$.

2. من أجل كل x من R $\ln(e^x)=x$. $\ln e=1$. $\ln 1=0$.

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ و من أجل

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

$\ln(a^n)=n\ln a$. $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

النهايات: (1) $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و (2) $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ (2) $\lim_{x\to0}x\ln x=0$ (1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ (2) $\lim_{x\to0}x^n\ln x=0$

خواص: الدالة " ln " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

خاصية: $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$. $(\ln|u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة الأسية/ من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: $e^0=1$ ** $\exp'(x)=e^x$ * $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ *

$e^{x+y}=e^xe^y$ * $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ * $e^{nx}=(e^x)^n$.

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$.

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على R

النهايات: (1) $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. (2) $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و (2) $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (2) $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ (1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

نتائج: • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$.

• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I. **خاصية:** $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

الدالة اللوغارتمية/ نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز " ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من R

$x=e^y$ يعني $y=\ln x$.

1- من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x}=x$.

2- من أجل كل x من R $\ln(e^x)=x$. $\ln e=1$. $\ln 1=0$.

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ و من أجل

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

$\ln(a^n)=n\ln a$. $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

النهايات: (1) $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و (2) $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ (2) $\lim_{x\to0}x\ln x=0$ (1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ (2) $\lim_{x\to0}x^n\ln x=0$

خواص: الدالة " ln " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

خاصية: $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$. $(\ln|u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$