ملخص حول الدوال لأصلية و الحساب التكاملي

1. الدوال الأصلية

تعريف

f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول أن الدالة F أصلية للدالة f إذا و فقط إذا كانت F قابلة للاشتقاق على I، و من أجل كل x من I: $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

مبرهنة

الدالة f تقبل دالة أصلية F على مجال I إذا و فقط إذا كانت الدالة f مستمرة على I

خاصية

f دالة عددية معرفة على مجال I. نفرض أن F دالة أصلية للدالة على I. مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال G المعرفة على I بـ: $\boldsymbol{G(x) = F(x) + c}$ حيث $c \in \mathbb{R}$

خاصية

f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I. x_0 عدد حقيقي كيفي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي. توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة f	الدالة الأصلية	ملاحظات
k	$kx + c$	$k, c \in \mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$n \in \mathbb{N}^*$ $x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$x \in \mathbb{R}^*$ $n \geq 2$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$

الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

الدالة f	الدالة الأصلية	على المجال
$u + v$	$U + V$	I
λu	λU	I
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	I
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$x \in I / u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	$x \in I, u(x) \neq 0$ $n \geq 2$
$u'e^u$	e^u	I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$x \in I / u(x) > 0$

2. الحساب التكاملي

تعريف

لتكن f دالة مستمرة على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I و F دالة أصلية للدالة f على I. يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ و نكتب:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = [\boldsymbol{F(x)}]_a^b = \boldsymbol{F(b) - F(a)}$$

خواص التكامل

إذا كان $f(x) \geq 0$ على $[a;]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

إذا كان $f(x) \leq g(x)$ على $[a;b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

علاقة شال: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

خاصية التناظر: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

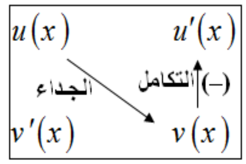
خواص الخطية: $\int_a^b [(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

المكاملة بالتجزئة

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' مستمرتان على المجال I. من أجل كل a و b من I لدينا:
$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

طريقة: تطبيقيا لحساب التكامل $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ نتبع المخطط



$\longrightarrow \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

الدالة الأصلية لدالة التي تنعدم من أجل قيمة

لتكن f دالة مستمرة على مجال I، و a عددا حقيقيا من I. الدالة F حيث $\boldsymbol{F(x)} = \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I التي تنعدم من أجل a

حساب المساحات

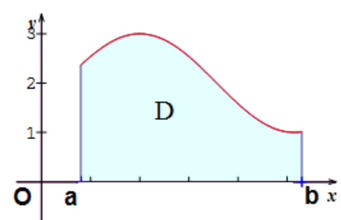
المستوي منسوب إلى معلم متعامد، (C_f) و (C_g) المنحنيان الممثلان لدالتين f و g على الترتيب.

مساحة حيز محدد بمنحنى

نرمز بـ A إلى مساحة حيز D من المستوي محدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = a$ و $x = b$ لحساب المساحة A نميز ثلاث حالات:

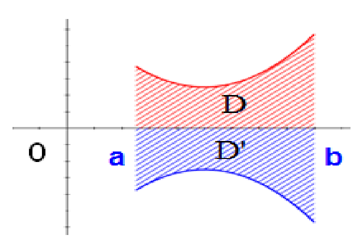
حالة دالة موجبة على المجال $[a; b]$

إذا كان (C_f) يقع فوق محور الفواصل على المجال $[a; b]$ فإن:
$A = \int_a^b f(x)dx$



حالة دالة سالبة على المجال $[a; b]$

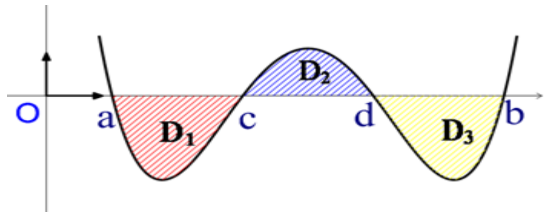
إذا كان (C_f) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[a; b]$ فإن:
$A = \int_a^b -f(x)dx$



حالة دالة تغير إشارتها على المجال $[a; b]$

لحساب المساحة A نقوم بحساب تكامل الدالة f على المجالات التي يكون فيها (C_f) يقع فوق محور الفواصل و بحساب تكامل الدالة $-f$ على المجالات التي يكون فيها (C_f) يقع تحت محور الفواصل ثم نقوم بجمع هذه المساحات. فمثلا في الشكل الموالي المساحة A تساوي:

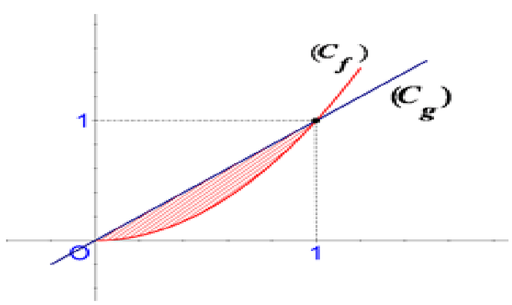
$$A = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx$$



مساحة حيز محدد بمنحنيين

نرمز بـ A إلى مساحة حيز D من المستوي محدد بالمنحنى (C_f) و المنحنى (C_g) و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = a$ و $x = b$

- إذا كان (C_f) يقع فوق (C_g) على المجال $[a; b]$ فإن:
  $A = \int_a^b f(x) - g(x)dx$
- إذا كان (C_f) يقع تحت (C_g) على المجال $[a; b]$ فإن:
  $A = \int_a^b g(x) - f(x)dx$



القيمة المتوسطة لدالة على مجال

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$. القيمة المتوسطة للدالة $\boldsymbol{f}$ على المجال $[a; b]$ هي العدد الحقيقي m حيث: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$