

ملخصات مفيدة قبل البكالوريا

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

المراجعة النهائية

* قواعد الحساب *

① الجداءات الشهيرة

الجداءات الشهيرة من الدرجة الثالثة	الجداءات الشهيرة من الدرجة الثانية
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	

② حل المعادلات من الدرجة الثانية

حساب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$			حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$
إذا كان: $\Delta < 0$	إذا كان: $\Delta = 0$	إذا كان: $\Delta > 0$	
المعادلة لا تقبل حلول	المعادلة تقبل حل مضاعف هو: $x_0 = \frac{-b}{2a}$	المعادلة تقبل حلين متميزين هما: $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	
لا يمكن تحليل $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	تحليل $ax^2 + bx + c$
$-\infty \xrightarrow{a \text{ إشارة}} +\infty$	$-\infty \xrightarrow{a \text{ إشارة}} x_0 \xrightarrow{a \text{ إشارة}} +\infty$	$-\infty \xrightarrow{a \text{ إشارة}} x_1 \xrightarrow{(-a) \text{ إشارة}} x_2 \xrightarrow{a \text{ إشارة}} +\infty$	إشارة $ax^2 + bx + c$

③ خواص القيمة المطلقة

إذا كان x و y عدنان حقيقيان فإن:

$\sqrt{x^2} = x $	$ -x = x $	$ x \geq 0$
$ x + y \leq x + y $	مع $y \neq 0$ $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }$	$ x \times y = x \times y $
$ x - a = \begin{cases} x - a & ; x \geq a \\ -x + a & ; x \leq a \end{cases}$	$ x + a = \begin{cases} x + a & ; x \geq -a \\ -x - a & ; x \leq -a \end{cases}$	$ x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$
	إذا كان $ x \geq a$ فإن $x \geq a$ أو $x \leq -a$	إذا كان $ x \leq a$ فإن $-a \leq x \leq a$

④ قواعد الحصر

لتكن a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماماً .

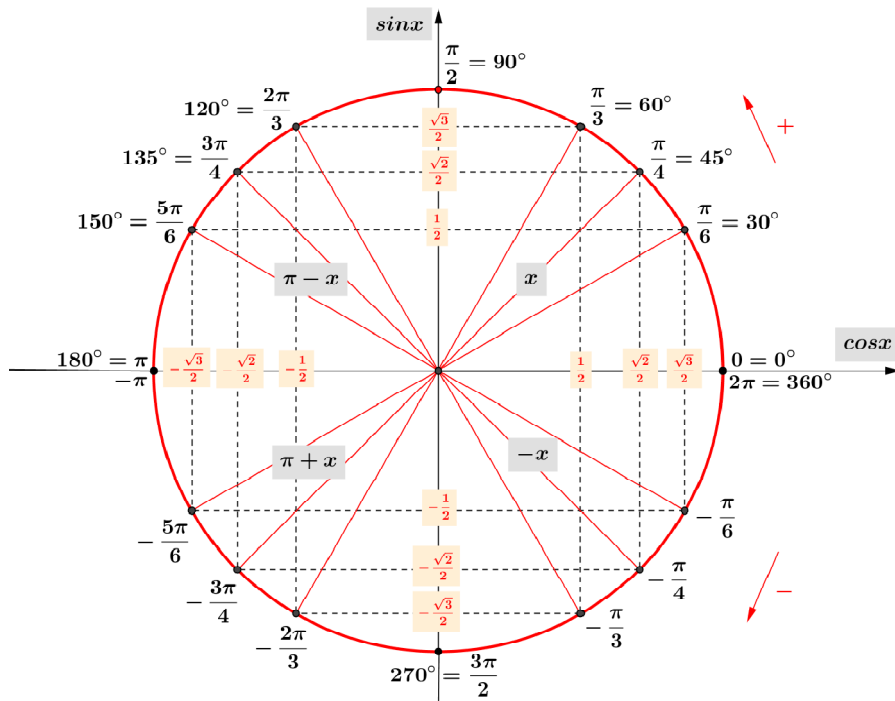
خاصية الـ				قسمة
ضرب	طرح	جمع		
$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$	$a - d \leq x - y \leq b - c$	$a + c \leq x + y \leq b + d$		$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$
				$a \leq x \leq b$ $c \leq y \leq d$

⑤ الدائرة المثلثية وحساب المثلثات

x عدد حقيقي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

$\begin{cases} \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \end{cases}$	$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$	$\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$
--	--	---



* النهايات *

① نهايات بعض الدوال المرجعية

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	الدالة مقلوب
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	الدالة جذر
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ مع n فردي	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ مع n زوجي	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	الدالة x^n $n \in \mathbb{N}^*$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

$+\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	حالات عدم التعيين
$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\ell}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\ell}{0} = \infty$	حالات يمكن التعيين
<p>بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة</p> <p>بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط و المقام</p> <p>بالنسبة لدوال جذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب و نقسم في المرافق</p> <p>عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك</p>				طرق الإزالة

③ مبرهنات في النهايات

نعتبر u, v, f و ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، و لتكن a, b, c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$	مبرهنة التركيب
إذا كان: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	مبرهنة الحصر
<p>إذا كان: $f(x) \geq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$</p> <p>إذا كان: $f(x) \leq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$</p> <p>إذا كان: $f(x) - \ell \leq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$</p>	مبرهنات المقارنة

④ نهايات الدوال المثبتة

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	--	---	---

★ المستقيمات المقاربة ★

لتكن f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

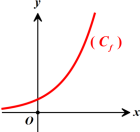
التمثيل البياني	التفسير الهندسي	النهاية
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ ، ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(y'y)$

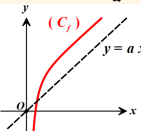


$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$

ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

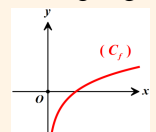
$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y = ax$



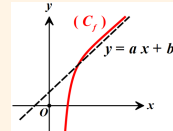
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(x'x)$



$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞



★ الاستمرارية و مبرهنة القيم المتوسطة ★

لتكن f دالة معرفة على مجال I من \mathbb{R} يشمل العدد الحقيقي a .

① الاستمرارية

	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f عند a
إذا كان $\ell_1 = \ell_2$ فإن f مستمرة عند a	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \ell_1$ حيث $\ell_1 \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f على يمين a
	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \ell_2$ حيث $\ell_2 \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f على يسار a

② صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

f دالة متناقصة تماماً على I	f دالة متزايدة تماماً على I	المجال I
$f(I)$	$f(I)$	$[a; b]$
$[f(b); f(a)]$	$[f(a); f(b)]$	$[a; b[$
$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$]a; b]$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$]a; b[$
$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$	$]a; b[$

③ مبرهنة القيم المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a; b[$	مبرهنة 1
إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[a; b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a; b[$	مبرهنة 2
إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a و b بحيث $f(\alpha) = 0$.	مبرهنة 3
إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[a; b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a; b[$	مبرهنة 4

★ الاشتقاقية ★

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من \mathbb{R} و a عدد من D_f .

① الاشتقاقية

	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f عند a
إذا كان $f'_d(a) = f'_g(a)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند a	$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a
	$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a

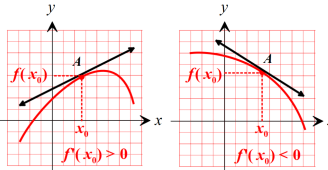
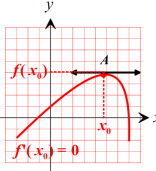
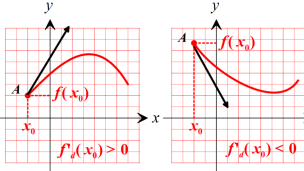
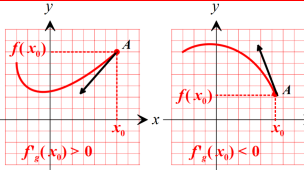
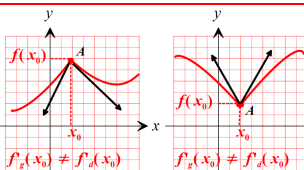
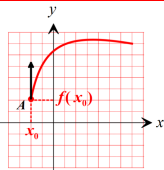
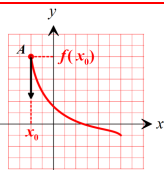
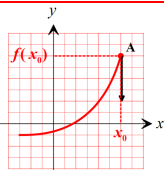
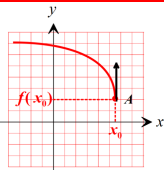
② مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
$a \in \mathbb{R}$ حيث a	0	\mathbb{R}
x	1	\mathbb{R}
ax	a	\mathbb{R}
x^n حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$n \cdot x^{n-1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$	\mathbb{R}
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$	\mathbb{R}

③ المشتقات والعمليات على الدوال

$u \circ v$	u^n	\sqrt{u}	$\frac{u}{v}$	$\frac{1}{v}$	$u \times v$	au	$u \pm v$	الدالة
$v' \cdot u'(v)$	$n \times u^{n-1} \times u'$ $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$u'v - v'u$	au'	$u' \pm v'$	الدالة المشتقة

④ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

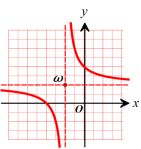
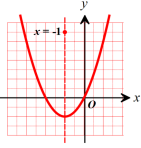
التفسير الهندسي	الاستنتاج	النهاية
 <p>(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماساً معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$</p>	<p>f تقبل الاشتقاق عند x_0 $f'(x_0) = a$ و</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$
 <p>(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y = f(x_0)$</p>	<p>f تقبل الاشتقاق عند x_0 $f'(x_0) = 0$ و</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
 <p>(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$</p>	<p>f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 $f'_d(x_0) = a$ و x_0</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$
 <p>(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$</p>	<p>f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 $f'_g(x_0) = b$ و x_0</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$
 <p>(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصفين مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية.</p>	<p>f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 <p>(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.</p>	<p>f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
 <p>(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.</p>	<p>f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
 <p>(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.</p>	<p>f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
 <p>(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.</p>	<p>f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

★ شفعية دالة - مركز تناظر و محور تناظر ★

① شفعية دالة

التمثيل البياني	التفسير الهندسي	التعريف	
	(C_f) يقبل محور الترتيب كمحور تناظر	f دالة زوجية يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فإن: $f(-x) = f(x)$	الدالة الزوجية
	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر	f دالة فردية يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فإن: $f(-x) = -f(x)$	الدالة الفردية

② مركز تناظر و محور تناظر دالة

التمثيل البياني	التعريف	
	$\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$	مركز تناظر
	$x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن: $f(2\alpha - x) = f(x)$	محور تناظر

★ الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ★

(C_f) التمثيل البياني للدالة f و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.

الوضعية النسبية	إشارة الفرق $f(x) - y$
(C_f) يقع فوق (Δ)	$f(x) - y > 0$
(C_f) يقع تحت (Δ)	$f(x) - y < 0$
(C_f) و (Δ) يتقاطعان	$f(x) - y = 0$

★ إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم ★

ليكن (C_f) و (C_g) منحنين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

التمثيل البياني	الدالة
(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$	$f(x) = g(x) + b$
(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$	$f(x) = g(x + a)$
(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a; b)$	$f(x) = g(x + a) + b$
المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل	$f(x) = -g(x)$
المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الترتيب	$f(x) = g(-x)$
المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم	$f(x) = -g(-x)$
<ul style="list-style-type: none"> إذا كان $x \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) إذا كان $x \leq 0$ فإن $f(x) = g(-x)$ منه (C_f) هو نظير (C_g) المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور الترتيب (f دالة زوجية) 	$f(x) = g(x)$
<ul style="list-style-type: none"> إذا كان $g(x) \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) إذا كان $g(x) \leq 0$ فإن $f(x) = -g(x)$ منه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل 	$f(x) = g(x) $

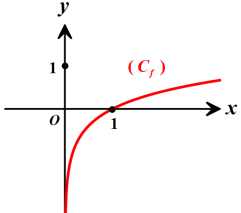
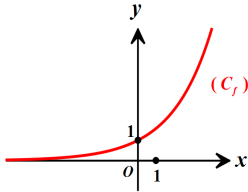
★ المناقشة البيانية ★

ليكن (C_f) منى الدالة f و (Δ) مستقيم مائل (مماس أو مستقيم مقارب) معادلته $y = ax + b$.

المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية ($m \in \mathbb{R}$)
$f(x) = m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لمحور الفواصل
$f(x) = ax + m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لـ (Δ)
$f(x) = mx + b$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الدورانية حول النقطة $(0; b)$
$f(x) = m^2$ أو $f(x) = m $	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لمحور الفواصل ($y = m $ أو $y = m^2$) لكن المناقشة تبدأ من محور الفواصل نحو الأعلى
$f(x) = f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت الموازية لمحور الفواصل معادلته $y = f(m)$

- ملاحظات:**
- نقول أن للمعادلة حل موجب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور الترتيب.
 - نقول أن للمعادلة حل سالب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور الترتيب.
 - نقول أن للمعادلة حل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة المماس.

★ الدالة الأسية و الدالة اللوغاريتمية ★

الدال اللوغاريتمية	الدالة الأسية
<p>1- تعريف: نسمي "الدالة اللوغاريتمية النبيرية" الدالة التي نرسم لها بـ "ln" و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0]$ العدد الحقيقي $\ln x$ و نكتب: $f(x) = \ln x$</p> 	<p>1- تعريف: الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة ، قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و تحقق: $f' = f$ و $f(0) = 1$ و نكتب: $f(x) = e^x$ أو $f(x) = \exp(x)$</p> 
<p>2- خواص الدالة اللوغاريتمية النبيرية:</p> <p>ليكن x و y من $]-\infty; +\infty[$ و n عدد صحيح نسبي:</p> <p style="text-align: center;">• $\ln 1 = 0$ ، $\ln e = 1$</p> <p style="text-align: center;">• $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ ، $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$</p> <p style="text-align: center;">$\ln x^n = n \ln x$ ، $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$</p> <p style="text-align: center;">• إذا كان: $\ln x = \ln y$ فإن: $x = y$</p> <p style="text-align: center;">• إذا كان: $\ln x > \ln y$ فإن: $x > y$</p> <p style="text-align: center;">• $\ln x > 0$ يعني $x > 1$ و $\ln x < 0$ يعني $0 < x < 1$</p>	<p>2- خواص الدالة الأسية:</p> <p>ليكن x ، y من \mathbb{R} و n عدد صحيح نسبي:</p> <p style="text-align: center;">• $e^0 = 1$ و $e^1 = e \approx 2,71$</p> <p style="text-align: center;">• $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ، $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$</p> <p style="text-align: center;">$e^{nx} = (e^x)^n$ ، $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$</p> <p style="text-align: center;">• إذا كان: $e^x = e^y$ فإن: $x = y$</p> <p style="text-align: center;">• إذا كان: $e^x > e^y$ فإن: $x > y$</p>
<p>3- مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية:</p> <p>$f(x) = \ln u(x)$ ، الدالة f معرفة إذا كانت: $u(x) > 0$</p>	<p>3- مجموعة تعريف الدالة الأسية:</p> <p>$f(x) = e^{u(x)}$ ، الدالة f معرفة إذا كانت u معرفة</p>
<p>4- مشتقة الدالة اللوغاريتمية:</p> <p>$f(x) = \ln u(x)$ منه: $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ مع $u(x) > 0$</p> <p>$f(x) = \ln u(x)$ منه: $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ مع $u(x) \neq 0$</p>	<p>4- مشتقة الدالة الأسية:</p> <p>$f(x) = e^{u(x)}$ منه: $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$</p>
<p>5- النهايات الشهيرة:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$</p> <p>مع $n > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-$</p>	<p>5- النهايات الشهيرة:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$</p> <p>مع $n > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$</p>
<p>$x \in \mathbb{R}_+^*$ مع $e^{\ln x} = x$ ، $x \in \mathbb{R}$ مع $\ln e^x = x$</p>	

★ الهندسة الفضائية ★

نعتبر في كل ما يلي $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، نضع: $A(x_A; y_A; z_A)$ ، $B(x_B; y_B; z_B)$ ، $C(x_C; y_C; z_C)$

مركبات الشعاع $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ هي: \overline{AB}	مركبات شعاع
طويلة الشعاع $\vec{u}(x; y; z)$ هي $\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	طويلة شعاع
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	المسافة بين نقطتين
$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ منتصف القطعة $[AB]$ حيث:	منتصف قطعة مستقيمة
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$	الجداء السلمي بين شعاعين
$\vec{v}(x'; y'; z')$ و $\vec{u}(x; y; z)$ حيث $\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$	العبارة التحليلية للجداء السلمي
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ و \vec{v} و \vec{u} متعامدان إذا كان:	تعامد شعاعين
\vec{v} و \vec{u} متوازيان إذا كان: $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = k$ مع $k \in \mathbb{R}$ $\vec{u} = k\vec{v}$ معناه:	الارتباط الخطي بين شعاعين
$a x + b y + c z + d = 0$ ، حيث $\vec{n}(a; b; c)$ شعاعه الناظم	المعادلة الديكارية للمستوي (P)
$\vec{n} = k \times \vec{n}'$ حيث \vec{n} ناظمي لـ (P) و \vec{n}' ناظمي لـ (P') و $k \in \mathbb{R}$	توازي مستويين (P) و (P')
$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ حيث \vec{n} ناظمي لـ (P) و \vec{n}' ناظمي لـ (P')	تعامد مستويين (P) و (P')
$d(A; (P)) = \frac{ a x_A + b y_A + c z_A + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	بعد النقطة A عن المستوي (P)
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ حيث $\omega(x_0; y_0; z_0)$ مركزها و r نصف قطرها	المعادلة الديكارية لسطح كرة (S)
G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ مع $\alpha + \beta \neq 0$ معناه: $\alpha \overline{GA} + \beta \overline{GB} = \vec{0}$	مرجح نقطتين
G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$ مع $\alpha + \beta + \delta \neq 0$ معناه: $\alpha \overline{GA} + \beta \overline{GB} + \delta \overline{GC} = \vec{0}$	مرجح ثلاث نقط
G مركز ثقل المثلث ABC معناه G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \alpha), (C; \alpha)\}$	مركز ثقل المثلث ABC
$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}\right)$	إحداثيات مرجح نقطتين
$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \delta x_C}{\alpha + \beta + \delta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \delta y_C}{\alpha + \beta + \delta}; \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \delta z_C}{\alpha + \beta + \delta}\right)$	إحداثيات مرجح ثلاث نقط
الارتفاع \times مساحة القاعدة $\times \frac{1}{2}$ $S = \frac{1}{2} \times$	مساحة مثلث
$V = \frac{1}{3} \times S \times h$ حيث S مساحة القاعدة (مثلث) و h الارتفاع	حجم رباعي الوجوه

$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} t \in \mathbb{R},$	التمثيل الوسيطى للمستقيم (d)
$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$	التمثيل الديكارتي للمستقيم (d)
$\begin{cases} x = x_A + at + a's \\ y = y_A + bt + b's \\ z = z_A + ct + c's \end{cases} t, s \in \mathbb{R},$	التمثيل الوسيطى للمستوي (P)
<p>حيث $A(x_A; y_A; z_A)$ منه $\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ شعاعي توجيه له</p> <p> $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ مجموعة النقط M هو المستوي الذي يشمل A و \vec{n} ناظمي له $AM = BM$ مجموعة النقط M هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ $AM = AB$ مجموعة النقط M هو سطح كرة مركزها A و نصف قطرها AB $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ مجموعة النقط M هو سطح كرة التي قطرها $[AB]$ $\vec{AM} \cdot \vec{n} < 0$ أو $\vec{AM} \cdot \vec{n} > 0$ هو نصف فضاء مفتوح حده المستوي الذي يشمل A و \vec{n} ناظمي له $AM \cdot \vec{AB} = k$ مع $k \in \mathbb{R}^*$ هو المستوي العمودي على (AB) و الذي يشمل لنقطة H حيث H المسقط العمودي لـ M على (AB) </p>	مجموعة النقط M في الفضاء

* الاستدلال بالتراجع *

مبرهنة

- $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي .
 للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :
- 1 نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
 - 2 نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

ملاحظات

- ⊖ إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن : $n_0 = 0$ ، و إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $n_0 = 1$ ، وهكذا ...
- ⊖ يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية .

★ المتتاليات العددية ★

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
1- تعريف: (u_n) متتالية حسابية معناه: $u_{n+1} = u_n + r$	1- تعريف: (u_n) متتالية هندسية معناه: $u_{n+1} = u_n \times q$
2- الحد العام لمتتالية حسابية بدلالة الحد الأول: إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_0 + nr$ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_1 + (n-1)r$ بصفة عامة: $u_n = u_p + (n-p)r$ حيث $p \in \mathbb{N}$	2- الحد العام لمتتالية هندسية بدلالة الحد الأول: إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_0 \times q^n$ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ بصفة عامة: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حيث $p \in \mathbb{N}$
3- الوسط الحسابي: إذا كانت a, b, c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$	3- الوسط الهندسي: إذا كانت a, b, c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن: $a \times c = b^2$
4- المجموع: $S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$	4- المجموع: $S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{q-1} \times \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q} \right)$
5- تقارب و تباعد متتالية حسابية: إذا $r > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ إذا $r < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ إذن المتتالية الحسابية دوماً متباعدة	5- تقارب و تباعد متتالية هندسية: إذا $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ متباعدة إذا $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ متقاربة إذا $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة)
6- اتجاه التغير: إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة	6- اتجاه التغير: نفرض أن $u_n > 0$ إذا كان $q > 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً إذا كان $q < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة
تعريف و مبرهنات	
7- عدد الحدود: عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1	
8- متتالية محدودة من الأعلى ، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة: المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني: $u_n \leq A$ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني: $u_n \geq B$ المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.	
9- مبرهنات تقارب متتالية: إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة. إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.	
10- المتتاليان المتجاورتان: تكون المتتاليان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.	

★ الأعداد المركبة ★

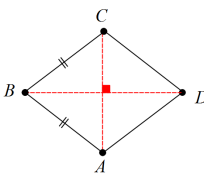
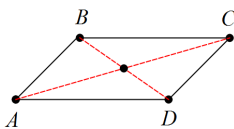
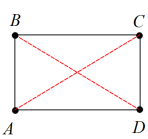
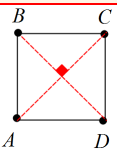
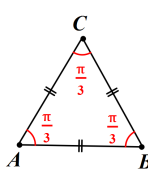
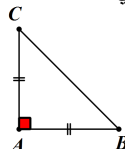
① الشكل الجبري ، الشكل المثلثي و الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم

الشكل الأسّي	الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$z = r e^{i\theta}$ ترميز أولر: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ $\sin \theta = \frac{y}{r}$ و $\cos \theta = \frac{x}{r}$	$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ طولية z : $r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$ عمدة z : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$	$z = x + i y$ مع $i^2 = -1$ الجزء الحقيقي: $x = \operatorname{Re}(z)$ الجزء التخيلي: $y = \operatorname{Im}(z)$ مرافق z : $\bar{z} = x - i y$
خواصه	خواصه	خواصه
$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ ① $z \cdot z' = r \cdot r' e^{i(\theta+\theta')}$ ② $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$ ③ $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ ④ $\frac{z}{z} = r e^{-i\theta}$ ⑤ $z^n = r^n e^{in\theta}$ ⑥	$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$ ① $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ ② $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ ③ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ ④ $\arg(z^n) = n \arg(z)$ مع $n \in \mathbb{Z}$ ⑤	$z = 0$ إذا كان $x = 0$ و $y = 0$ ① $z = z'$ إذا كان $x = x'$ و $y = y'$ ② مع $z' = x' + i y'$ z حقيقي إذا كان $\bar{z} = z$ ③ z تخيلي صرف إذا كان $\bar{z} = -z$ ④ $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ ⑤ $z \times \bar{z} = z ^2$ ، $ z = \bar{z} $ ⑥

② توظيف الطولية و العمدة في الهندسة

العبارة المركبة	التفسير الهندسي
$AB = z_B - z_A $	المسافة بين النقطتين A و B
$\overline{z_{AB}} = z_B - z_A$	الشعاع \overline{AB}
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[AB]$
$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$	G مركز ثقل المثلث ABC
$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \lambda z_C}{\alpha + \beta + \lambda}$	G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \lambda)\}$
عدداً حقيقياً $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$	A ، B و C على استقامة $(\overline{AB} // \overline{AC})$
عدداً تخيلياً صرفاً $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$	الشعاعان \overline{AB} و \overline{AC} متعامدان
$\arg(z_B - z_A)$	قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overline{OI}; \overline{AB})$
$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$	قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overline{AB}; \overline{AC})$

③ متوازي الأضلاع ، المعين ، المربع ، المستطيل والمثلثات

المعين	متوازي الأضلاع
 <p>$ABCD$ معين يعني أحد الشرطين :</p> <p>① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$</p> <p>و $AB = AD$ أي: $z_B - z_A = z_D - z_A$</p> <p>② القطران متناصفان و متعامدان أي :</p> <p>$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$</p>	<p>$ABCD$ متوازي أضلاع يعني أحد الشرطين :</p> <p>① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$</p> <p>② القطران متناصفان أي: $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$</p> 
المستطيل	المربع
<p>$ABCD$ مستطيل يعني أحد الشرطين :</p> <p>① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$</p> <p>و $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \pm \frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$</p> <p>② القطران متناصفان و متساويان أي:</p> <p>$z_A - z_C = z_B - z_D$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$</p> 	<p>$ABCD$ مربع يعني أحد الشرطين :</p> <p>① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$</p> <p>و $AB = AD$ أي: $z_B - z_A = z_D - z_A$</p> <p>و $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \pm \frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$</p> <p>② القطران متناصفان و متعامدان و متساويان أي:</p> <p>$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$</p> <p>و $z_A - z_C = z_B - z_D$</p> 
المثلث المتقايس الأضلاع	المثلث القائم و المتساوي الساقين
<p>ABC مثلث متقايس الأضلاع يعني أحد الشرطين :</p> <p>① $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{3}$ و $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right = 1$</p> <p>② $z_A - z_B = z_A - z_C = z_B - z_C$</p> 	<p>ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين يعني :</p> <p>$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ و $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right = 1$</p> 

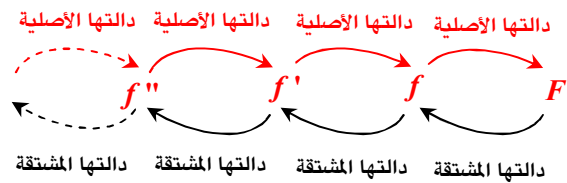
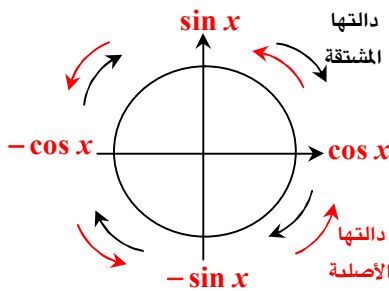
④ التحويلات النقطية في المستوي المركب

العبرة المركبة للتحويل f هي: $z' = az + b$			
عدد مركب (غير حقيقي) a		عدد حقيقي a	
$ a \neq 1$	$ a = 1$	$a \neq 1$	$a = 1$
<p>f تشابه مباشر نسبته $k = a$</p> <p>زاويته $\theta = \arg(a)$</p> <p>مركزه النقطة Ω</p> <p>ذات اللاهقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$</p>	<p>f دوران مركزه النقطة Ω</p> <p>ذات اللاهقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$</p> <p>زاويته $\theta = \arg(a)$</p>	<p>f تحاكي نسبته $k = a$</p> <p>مركزه النقطة Ω</p> <p>ذات اللاهقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$</p>	<p>f انسحاب شعاعه \bar{u}</p> <p>ذات اللاهقة b ($b \neq 0$)</p>
العبرة المختصر للتحويل f			
$z' - z_\omega = k e^{i\theta} (z - z_\omega)$	$z' - z_\omega = e^{i\theta} (z - z_\omega)$	$z' - z_\omega = k (z - z_\omega)$	$z' = z + b$

★ الدوال الأصلية و الحساب التكاملي ★

① الدوال الأصلية

السؤال	الجواب
1 ما هو شرط وجود دالة أصلية F للدالة f على المجال I	الشرط أن تكون الدالة f مستمرة على المجال I
2 كم عدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I	الدالة f تقبل عدد غير منتهي من الدوال الأصلية وهي : $F(x) + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$
3 أثبت أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$: $F'(x) = f(x)$
4 بين أن الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$: $F'(x) = G'(x)$



② الدوال الأصلية لدوال مألوفة

$f(x) =$	$F(x) =$	$I =$
a (a عدد حقيقي)	$ax + c$	\mathbb{R}
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0; +\infty[$ أو $] -\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0; +\infty[$ أو $] -\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + c$	\mathbb{R}
e^{ax+b} ($a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$)	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$
$\ln x$	$x \ln x - x + c$	$]0; +\infty[$
$\ln(x-a)$ ($a \in \mathbb{R}$)	$(x-a) \ln(x-a) - x + c$	$]a; +\infty[$

③ الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	
$(n \in \mathbb{N}^*) u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + c$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$u(x) \neq 0$

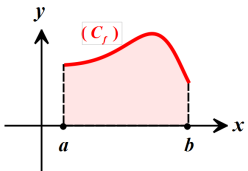
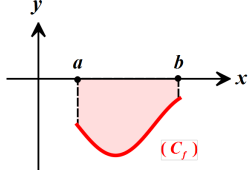
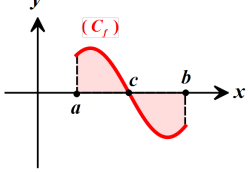
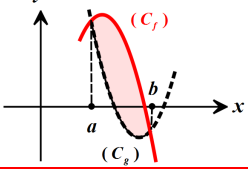
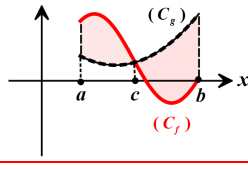
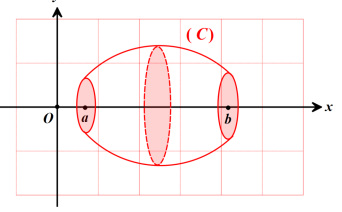
④ المعادلات التفاضلية

حلول المعادلة	المعادلة التفاضلية
$y = C e^{ax}$	$y' = a y$
$y = C e^{ax} - \frac{b}{a}$	$y' = a y + b$
$y = F(x) + c$	$y' = f(x)$
$y = F(x) + c_1 x + c_2$	$y'' = f'(x)$
$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$	$y'' = -\omega^2 y$

⑤ الحساب التكامل

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	التكامل المحدود
$\int f(x) dx = F(x) + k$	التكامل الغير محدود
$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$	علاقة شال
$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$	المكاملة بالتجزئة
$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$	القيمة المتوسطة على مجال

⑥ حساب المساحات و الحجوم

التمثيل البياني لها	المساحات S
	$S = \int_a^b f(x) dx$
	$S = \int_a^b -f(x) dx$
	$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx$
	$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
	$S = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$
التمثيل البياني لها	الحجوم V
	<p>حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C)</p> $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$

ملاحظة هامة: كل المساحات يجب أن تضرب في الواحد ua حيث: $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

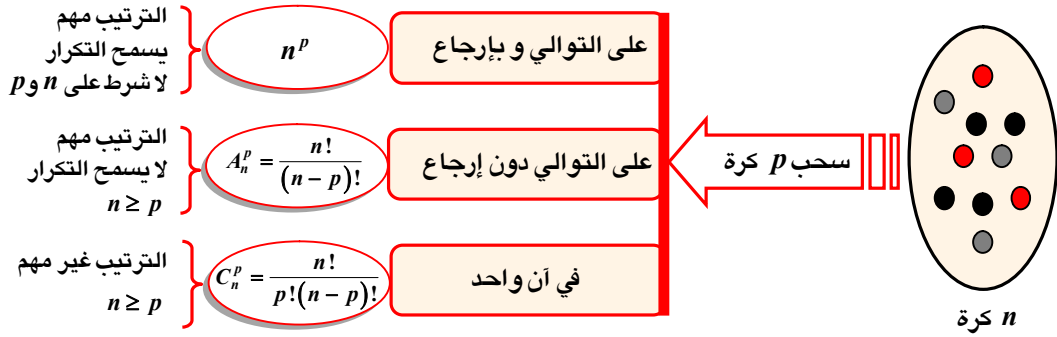
★ الاحتمالات ★

$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكليّة)}}$	احتمال الحادثة A
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	احتمال الحادثة العكسية \bar{A}
$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	الاحتمال الشرطي (A علماً بـ B)
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	الحوادث المستقلة

① أنواع السحب

توجد ثلاث أنواع من السحب وهي :

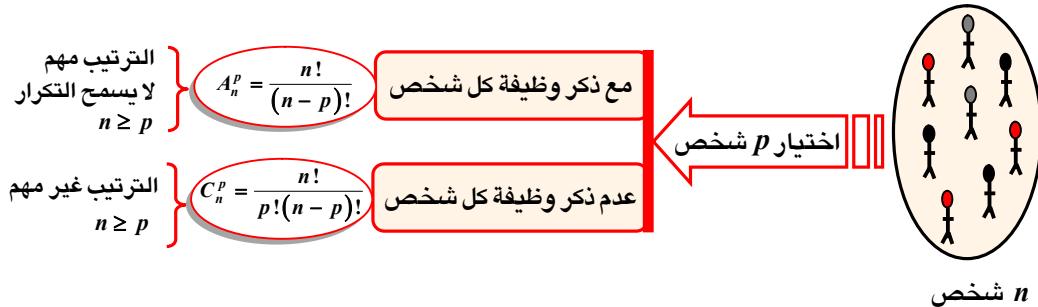
- ① السحب في آن واحد
 - ② السحب على التوالي و بإرجاع
 - ③ السحب على التوالي و بدون إرجاع
- ما هو عدد طرق لسحب p كرة من كيس يحتوي على n كرة ($n \geq 2$) ؟



② اللجان (الجمعيات)

عند تكوين لجنة معينة أو جمعية من عدة أشخاص ، يجب معرفة أمرين أساسيان ، هما :

- ① ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة
 - ② عدم ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة .
- ما هو عدد طرق لتكوين لجنة تتألف من p شخص من بين مجموعة ذات n شخص مع ($n \geq 2$) ؟



③ عدد طرق لإجراء تجربة

عند إجراء تجربة معينة بـ n_1 طريقة (إمكانية) و تجربة أخرى بـ n_2 طريقة (إمكانية) فإن :

- ① عدد طرق إجراء التجربتين معاً (التجربة الأولى و الثانية) هو الجداء : $n_1 \times n_2$.
- ② عدد طرق إجراء إحدى التجربتين فقط (التجربة الأولى أو الثانية) هو المجموع : $n_1 + n_2$.

★ الموافقات - الأعداد الأولية ★

① الموافقات في \mathbb{Z}

تعريف	نقول أن العددين الصحيحين a, b متوافقان بترديد n (طبيعي) إذا وفقط إذا كان $a - b$ من مضاعفات n في \mathbb{Z} ونكتب $a \equiv b [n]$ و يقرأ a يوافق b بترديد n .
خواص	<ul style="list-style-type: none"> • إذا كان: $a \equiv b [n]$ و $a \equiv c [n]$ فإن: $b \equiv c [n]$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ و $c \equiv d [n]$ فإن: $a \pm c \equiv b \pm d [n]$ و $a \times c \equiv b \times d [n]$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ فإن: $a + k \equiv b + k [n]$ و $k \times a \equiv k \times b [n]$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ فإن: $a^p \equiv b^p [n]$ حيث $p \in \mathbb{N}$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ فإن: $a + kn \equiv b + kn [n]$ و $a \equiv b + kn [n]$. • إذا كان: $a \equiv 0 [n \times m]$ فإن: $a \equiv 0 [n]$ و $a \equiv 0 [m]$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$ و أولي مع n. • إذا كان: $a \times b \equiv 0 [n]$ فإن: $a \equiv 0 [n]$ أو $b \equiv 0 [n]$ مع n عدد أولي.

② القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ و المضاعف المشترك الأصغر $PPCM$

خواص	<ul style="list-style-type: none"> • $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$ حيث $a \geq b$ و r باقي قسمة a على b. • $PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$ حيث: $k \in \mathbb{Z}^*$. • $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$ • إذا كان: $PGCD(a; b) = d$ فإن: $(d \mid a$ و $d \mid b)$ و أيضاً: $\begin{cases} a = d a' \\ b = d b' \end{cases}$ مع $PGCD(a'; b') = 1$ • $PGCD(ka; kb) = k PGCD(a; b)$ مع $k \in \mathbb{Z}^*$. • إذا كان: $PGCD(a; b) = 1$ فإن: $PGCD(a; b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. • إذا كان: $PGCD(a; b) = 1$ فإن: $PGCD(a^n; b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. • إذا كان: $PGCD(a; b) = 1$ و $PGCD(a; c) = 1$ فإن: $PGCD(a; bc) = 1$.
------	---

③ مبرهنة بيزو

يكون العددا الطبيعيان غير المعدومين a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددا صحيحان x و y حيث: $ax + by = 1$

④ مبرهنة غوص

a, b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة، إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أولياً مع b ، فإن a يقسم c .

⑤ المبرهنة الصغيرة لفيرما

إذا كان p عدداً أولياً و a عدداً طبيعياً لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $(a^{p-1} - 1)$