مديرية التربية لولاية البويرة ثانوية كريم بلقاسم – البويرة

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

مارس 2018

التمرين الاول : 05 نقاط – المتتاليات العددية
التمرين الثاني: 05 نقاط – الاحتمالات
التمرين الثالث: 10 نقاط – الدوال العددية (الدالة اللوغارتمية)

السنة الدراسية : 2018/2017

مديرية التربية لولاية البويرة	ثانوية كريم بلقاســم- البويرة
المستوى :3 علوم تجريبية	الاثنين 12 مـــــارس 2018
المادة: رياضيــــــــــات	إعداد أســـــاتذة المادة

إختبـــــــار الفصل الثاني — **المـــدة: 2 ســـــــــــــا**

التمرين الأول: (05 نقاط)

I) f دالة معرفة على المجال $]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2+1}$

- احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;+\infty[$.

II) (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0=\frac{5}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $2<u_n<3$.

2) بسط العبارة $u_n^2-\frac{9}{10}(u_n^2+1)$ ، ثم إستنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، ان : $u_n^2<\frac{9}{10}(u_n^2+1)$.

3) أثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

4) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-2=\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$.

5) أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n-2\leq\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) يحتوي كيس U_1 على 5 كرات ، ثلاث منها تحمل الرقم 2 و كرتان تحملان الرقم3 .

و يحتوي كيس ثاني U_2 على 5 كرات : ثلاث منها بيضاء و إثنان أحمران (لا يمكن التمييز بينهما)

- نسحب عشوائيـــا كرة واحدة من الكيس U_1 ونسجل رقمه ، ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد n كرة من الكيس U_2 بحيث n هو الرقم الذي تحمله الكرة المسحوبة من الكيس U_1 .

1) ماهو إحتمال الحصول على ثلاثة كرات بيضاء.

2) ماهو إحتمال الحصول على كرتين حمراء علما ان رقم الكرة المسحوبة من U_1 هو 3

II) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة

1) ما هي القيم الممكنة لـلمتغير العشوائي X .

2) بين أن : $P(X=0)=\frac{11}{50}$

3) حدد قانون إحتمال المتغير العشوائي X

4) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث: (10 نقطة)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+x+2\ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) أحسب $g(1)$ ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \ ;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

نرمز بـ (C) الى منحناها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.وحدة الطول 2cm

1) أحسب $f'(x)$ و تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما : $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$

2) استنتج إتجاه تغير الدالة f .

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α حيث $\frac{7}{4}<\alpha<2$

5) تحقق ان نصف المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة O معادلته $y=x$.

6) أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ) .

7) أ) بين أن المنحنى (C) يقبل مماسا (D) يوازي (Δ) عند نقطة يطلب تعيينهـــــا.

ب) أكتب معادلة لـلمماس (D) .

8) أرسم (Δ)، (D) و (C) .

9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $-m+x^2\ln x=0$.

بالتوفيق

التمرين الأول : 5 نقاط المتتاليات العددية

I) حساب $f'(x)$ و استنتاج إتجاه تغير الدالة f : 1ن..........

لدينا من اجل كل x من $[2;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3+2)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4-4x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}=\frac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2}$$

من اجل كل x من $[2;+\infty[$: $x>2$ فإن $\begin{cases}x^3\geq 8\\ 3x\geq 6\end{cases}$ منه $x^3+3x-4\geq 10$ إذن : $f'(x)>0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

II) 1) البرهان بالتراجع ان $2<u_n<3$: 1ن..........

نضع، $P(n):2<u_n<3$

المرحلة 01: من اجل $n=0$ لدينا ، $u_0=\frac{5}{2}$ منه نجد: $2<u_0<3$ اي $p(0)$ محققة.

المرحلة02: نفرض صحة $P(n)$ من اجل n عدد طبيعي كيفي. و نبرهن صحة $P(n+1):2<u_{n+1}<3$

لدينا من فرضية التراجع : $2<u_n<3$ منه $f(2)<f(u_n)<f(3)$ لأن f دالة متزايدة تماما على $[2;+\infty[$

منه: $2<u_{n+1}<\frac{29}{10}$

اي : $2<u_{n+1}<3$

منه $P(n+1)$ محققة و عليه من اجل كل عدد طبيعي n ، $2<u_n<3$.

2)تبسيط العبارة و استنتاج المتراجحة: 0.75ن..........

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n^2-\frac{9}{10}(u_n^2+1)=\frac{10u_n^2-9u_n^2-9}{10}=\frac{u_n^2-9}{10}$

لدينا ، $2<u_n<3$ منه $4<u_n^2<9$ منه $-5<u_n^2-9<0$ منه $\frac{u_n^2-9}{10}<0$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n^2-\frac{9}{10}(u_n^2+1)<0$ اي $u_n^2<\frac{9}{10}(u_n^2+1)$.

3)إثبات ان (u_n) متناقصة تماما : 0.50ن..........

من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-u_n=\frac{u_n^3+2-u_n^3-u_n}{u_n^2+1}=\frac{2-u_n}{u_n^2+1}$

بما ان : $2<u_n<3$ فإن $-3<-u_n<-2$ اي $-1<2-u_n<0$

منه من اجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1}-u_n<0$ اي (u_n) متناقصة تماما .

- تقارب المتتالية (u_n) : 0.25ن..........

لدينا، (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الاسفل بالعدد 2 فإن (u_n) متتالية متقاربة.

4) التحقق من صحة العبارة: 0.25ن..........

من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-2=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-2=\frac{u_n^3+2-2u_n^2-2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^2(u_n-2)}{u_n^2+1}=\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$

CHEDANI

5) إثبات ان : $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$: نضع : $P(n):0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ 1ن

المرحلة01:من اجل $n=0$ ، لدينا: $u_0-2=\frac{1}{2}$ و $\left(\frac{9}{10}\right)^0=1$ ومنه: $0<u_0-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^0$ اي $p(0)$ محققة

المرحلة02: نفرض صحة $P(n)$ من اجل عدد طبيعي n كيفي

و نبرهن صحة $P(n+1):0<u_{n+1}-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$

لدينا من السؤال 4): $u_{n+1}-2=\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$

ولدينا من فرضية التراجع و السؤال 2) على التوالي: $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ و $\frac{u_n^2}{u_n^2+1}\le\frac{9}{10}$

منه نستنتج ان : $u_{n+1}-2\le\frac{9}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n$ اي $u_{n+1}-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$

يمكن ملاحظة بسهولة ان : $0<u_{n+1}-2$ و عليه ينتج لنا ، $0<u_{n+1}-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$ اي $P(n+1)$ محققة

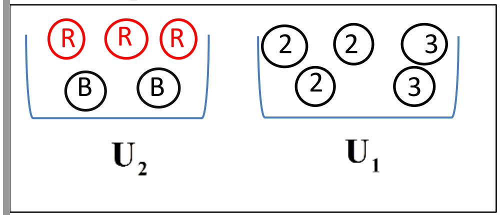
- منه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: 0.25ن

لدينا ، $0<u_n-2\le\left(\frac{9}{10}\right)^n$ و بما ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=0$ كون $-1<\frac{9}{10}<1$

فان مبرهنة الحصر : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-2)=0$ اي $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2}$.

CHEDDANI



التمرين الثاني : 05 نقاط - الاحتمالات -

I) 1) إحتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء : 1ن

لتكن الحادثة A " الحصول على ثلاث كرات بيضاء "

سحب ثلاث كرات بيضاء يجب :

(سحب كرة تحمل الرقم 3 من الكيس U_1) و (سحب ثلاث كرات بيضاء من الكيس U_2)

منه : $P(A)=\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$

2) إحتمال الحصول على كرتين حمراء علما ان رقم الكرة المسحوبة من U_1 هو 3: 1ن

لتكن الحادثة R "الحصول على كرتين حمراء " و الحادثة B " سحب كرة تحمل الرقم 3 "

منه: $$P_B(R)=\frac{P(R\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2\times C_3^1}{C_5^3}}{\frac{C_2^1}{C_5^1}}=\frac{3}{10}$$

II) 1) القيم الممكنة لـ X : 0.5ن

بما ان عدد الكرات الحمراء هو 2 فإنه مهما كانت قيمة n (2 او 3) فإن عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها في آن واحد هي : 0 او 1 او 2

2) تبيان ان $P(X=0)=\frac{11}{50}$: 1ن

الحادثة $(X=0)$ معناه عدم سحب اي كرة حمراء و هدا معناه :

(سحب كرة تحمل رقم 2 من U_1 و سحب كرتين بيضاويتن من U_2)

او

(سحب كرة تحمل رقم 3 من U_1 و سحب ثلاث كرات بيضاء من U_2)

منه: $$P(x=0)=\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^3}{C_5^3}\right)=\frac{9}{50}+\frac{2}{50}=\frac{11}{50}$$

3) قانون الاحتمال : 1ن

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{50}$	$\frac{30}{50}$	$\frac{9}{50}$

$$P(x=2)=\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2\times C_3^1}{C_5^3}\right)=\frac{3}{50}+\frac{6}{50}=\frac{9}{50}$$ و $$P(x=1)=1-\left(\frac{11}{50}+\frac{9}{50}\right)=\frac{30}{50}$$

4) الأمل الرياضياتي : 0.5ن

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}P_ix_i=\left(0\times\frac{11}{50}\right)+\left(1\times\frac{30}{50}\right)+\left(2\times\frac{9}{50}\right)=\frac{24}{25}$$

CHEDANI

التمرين الثالث: 10 نقاط   الدوال العددية – الدالة اللوغارتمية -

I) 1) **دراسة اتجاه تغير الدالة** g : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)=1+\frac{2}{x}$

نلاحظ ان : $g(x)>0$ ، منه g دالة متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ 1ن

2) **إشارة** $g(x)$: لدينا ، $g(1)=0$ و بما ان g دالة متزايدة تماما ينتج لنا : 0.5ن

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	0	$+$

II) 1) **حساب** $f'(x)$: من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=1-\left(2x\ln x+\frac{1}{x}\times x^2\right)=1-2x\ln x-x$

- **التحقق ان** $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$: من اجل كل x من $]0;+\infty[$: 1ن

$$xg\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(-1+\frac{1}{x}+2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x\left(-1+\frac{1}{x}-2\ln x\right)=x+1-2x\ln x=f'(x)$$

2) **اتجاه تغير الدالة** f : اشارة $f'(x)$ من اشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ على المجال $]0;+\infty[$ 1ن

لدينا: $g\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0$ إذا كان $\frac{1}{x}\geq 1$ اي $0<x\leq 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	0	$-$

الخلاصة: f دالة متزايدة تماما على $]0;1]$ و f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

3) **جدول التغيرات**: 1ن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)$$
$$=-\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	1	↘ $-\infty$

4) **تبيان ان المعادلة** $f(x)=0$ **تقبل حل وحيد** α **حيث** $\frac{7}{4}<\alpha<2$: 1ن

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{7}{4};2\right]$ و لدينا ، $f\left(\frac{7}{4}\right)\times f(2)<0$

فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\frac{7}{4}<\alpha<2$.

5) **معادلة نصف المماس** (Δ) : لدينا ، $(\Delta):y=f'_d(0)(x-0)+f(0)=f'_d(0)x$ 1ن

$f'_d(0)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x-x^2\ln x}{x}\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x(1-x\ln x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(1-x\ln x)=1$ منه: $\boxed{(\Delta):y=x}$.

6) **دراسة الوضع النسبي بين** (C) **و** (Δ) : 1ن

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-x=-x^2\ln x$ و نلخصها في الجدول التالي :

x	0	1	$+\infty$
$-x^2$	$-$		$-$
$\ln x$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)-x$	‖ $+$	0	$-$

(C) يقع فوق (Δ) على المجال $]1;+\infty[$

(C) يقع تحت (Δ) على المجال $]0;1[$

(C) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$.

7) أ) تبيان ان (C) يقبل مماسا يوازي (Δ) : 1.5ن

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=1$ يكافئ $1-x-2x\ln x=1$

يكافئ $-x(1+2\ln x)=0$

يكافئ $1+2\ln x=0$

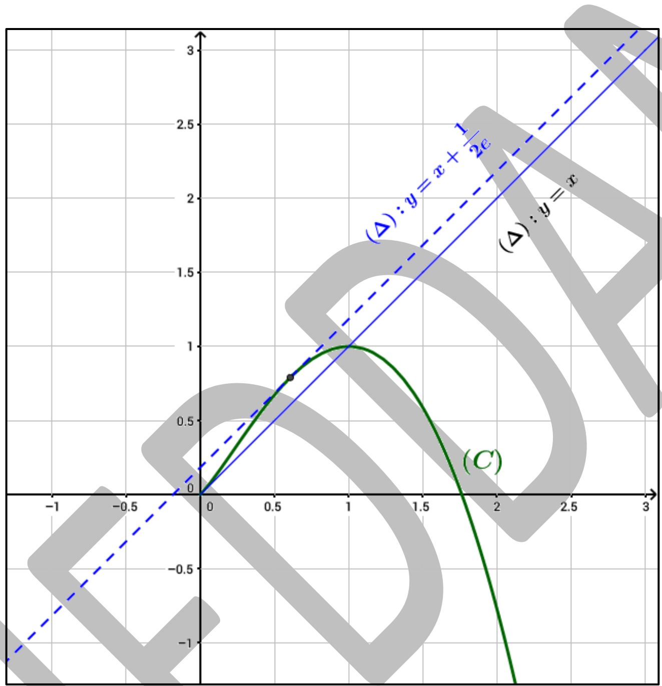
يكافئ $x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

منه (C) يقبل مماسا (D) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

ب) معادلة المماس (D) :

$$(D): y=f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=x-\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{x+\frac{1}{2e}}$$

8) الرسم: .... 1.5 ن



9) مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $-m+x^2\ln x=0$: 1.5ن

$-m+x^2\ln x=0$ يكافئ $-m=-x^2\ln x=0$

يكافئ $x-m=x-x^2\ln x$

يكافئ $f(x)=x-m$

ومنه حلول المعادلة يعود الى تعيين فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيم $y=x-m$.

المناقشة:

$-m>\frac{1}{2e}$ اي $m<\frac{1}{2e}$: المعادلة لا تقبل حلول

$-m=\frac{1}{2e}$ اي $m=-\frac{1}{2e}$: المعادلة تقبل حل وحيد.

$0\le -m<\frac{1}{2e}$ اي $-\frac{1}{2e}<m\le 0$: المعادلة تقبل حلين

$-m<0$ اي $m>0$: المعادلة تقبل حل وحيد

بالتوفيق – بكالوريا 2018

CHEDANI