الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية.

مديرية التربية لولاية الوادي　　　　　　　　　　　　　امتحان البكالوريا التجريبية

الشعبة: علوم تجريبية　　　　　　　　　　　　　　　　　دورة ماي **2018**

ثانويات : حميداتو أحمد–حاسي خليفة + لقرع محمد الضيف–الرباح + باهي الطاهر– العقلة

اختبار في مادة الرياضيات　　　　　　　　　　　　　　المدة: **3** ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بـ : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$.

2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $-1 < u_n \leq 0$.

3) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب) احسب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 \times v_0 + u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + ... + u_n \times v_n$.

التمرين الثاني: (4.5 نقط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان الصندوق U_1 يحوي قريصتين تحملان الرقمين : 1 و 2 و الصندوق U_2 يحوي أربع قريصات تحمل الأرقام 3,2,1 و 4. جميع الكرات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس.

I) نختار عشوائيا صندوق، ثم نسحب منه قريصة بطريقة عشوائية.

1) ما هو احتمال سحب قريصة تحمل الرقم 1.

2) إذا كانت القريصة المسحوبة تحمل الرقم 1، فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_1.

II) نجعل محتوى الصندوقين في صندوق واحد ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد قريصتين.

1) احسب احتمال سحب قريصتين تحملان نفس الرقم.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين.

أ) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$. لتكن النقط A، B، C، D و E لواحقها على الترتيب : $z_A = 2i$ ، $z_B = 2$ ، $z_C = 4+6i$ ، $z_D = -1+i$ و $z_E = -3+3i$.

1) علم النقط: A، B، C، D و E في المعلم.

2) بين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

3) S التشابه المباشر الذي يحول B إلى A ويحول A إلى D.

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S، ثم حدد نسبته و زاويته و مركزه W.

ب) بين أن المثلث DAE هو صورة المثلث ABC بالتشابه S، ثم استنتج طبيعته و مساحته.

4) لتكن (C_1) الدائرة التي قطرها $[AB]$ و (C_2)الدائرة التي قطرها $[AD]$.

نرمز بـ : M لنقطة تقاطع الدائرة (C_1) والمستقيم (BC) حيث: $M \neq B$ ، و نرمز بـ N لنقطة تقاطع الدائرة (C_2) والمستقيم (AE) حيث: $N \neq A$.

أ) حدد صورة النقطة M بالتشابه S واستنتج طبيعة المثلث WMN.

ب) بين أن : $MB \times NE = MC \times NA$.

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. (C_f) منحناها في المستوي المنسوب إلى م م م $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا.

2) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

ب- احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) احسب الدالة المشتقة الثانية للدالة f وبين أن المبدأ O للمعلم هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

5) ارسم المنحنى (C_f) و المماس (T) في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

6) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

I) f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$.

1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) تحقق أن المنحنى (C_f) للدالة f يقطع المستقيم (Δ) معادلته : $y=x$ في النقطة ذات الفاصلة 2.

3) مثل (C_f) و (Δ) على المجال $[0;+\infty[$.

II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها).

ب- خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ : $v_n=\dfrac{6-3u_n}{u_n+2}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$

ب- اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

التمرين الثاني: (04 نقاط).

في الفضاء منسوب لمعلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(1;1;2)$ ، $B(2;0;1)$ و $C(1;-3;0)$ ، و نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+3y+z+1=0$

و المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=2t-1\\y=-t+2\\z=t+1\end{cases}\quad t\in IR$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل لكل إجابة في ما يلي:

1) النقطة A تنتمي إلى (Δ).

2) الشعاع $\vec{u}\left(1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

3) المعادلة: $x-y+2z-4=0$ هي معادلة المستوي (ABC).

4) المستوي (P) عمودي على المستوي (ABC).

5) المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A و B نقطتان لواحقها على الترتيب: $z_A=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$.

أ- أكتب كل من z_A ، z_B و على الشكل الأسي.

ب- أنشئ النقطتين A و B في المعلم.

جـ- بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

3) C نقطة لاحقتها $z_C=-8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

- احسب z_D لاحقة النقطة D.

4) بين أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك مركزه O يطلب تعيين نسبته.

5) ما طبيعة المثلث OAD ؟ برر جوابك.

التمرين الرابع: (07 نقاط).

I) g دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$

1) احسب $g'(x)$ ثم حدد اتجاه تغير g و استنتج جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α من المجال: $[-0,72;-0,71]$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f دالة معرفة على المجال $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.

2) احسب $f'(x)$ ثم استنتج إشارتها من الجزء (I) .

3) بين أن : $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$، ثم عين قيمة مقربة لـ : $f(\alpha)$ من أجل : $\alpha=-0,715$.

4) شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.(الوحدة $2cm$)

6) F دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $F(x)=\ln x-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)$

- بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

7) λ عدد حقيقي موجب تماما.

- احسب التكامل : $I(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx$ ، ثم حدد حسب قيم λ التفسير الهندسي للعدد $I(\lambda)$.

حل التمرين الأول:

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بـ : $u_0=0$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\dfrac{4}{u_n+3}$:

لدينا : $u_{n+1}=1-\dfrac{4}{u_n+3}$ بتوحيد المقام نجد : $1-\dfrac{4}{u_n+3}=\dfrac{u_n+3-4}{u_n+3}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}=u_{n+1}$

2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $-1<u_n\leq 0$:

لدينا : $u_0=0$ و منه : $-1<u_0=0\leq 0$ محققة

نفرض أن : $-1<u_n\leq 0$ صحيحة و نبرهن صحة : $-1<u_{n+1}\leq 0$

لدينا : $-1<u_n\leq 0$ نضيف 3 نجد : $2<u_n+3\leq 3$ بالمقلوب نجد : $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{u_n+3}<\dfrac{1}{2}$

نضرب في 4- نجد : $-\dfrac{4}{2}<-\dfrac{4}{u_n+3}\leq-\dfrac{4}{3}$ ، نضيف 1 نجد: $-1<1-\dfrac{4}{u_n+3}\leq-\dfrac{1}{3}$

لدينا : $-\dfrac{1}{3}<0$ ، و بالتعدي نجد : $-1<1-\dfrac{4}{u_n+3}\leq 0$ ، و منه : $-1<u_{n+1}\leq 0$

3) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}-u_n=\frac{-u_n^{\,2}-3u_n+u_n-1}{u_n+3}=\frac{-u_n^{\,2}-2u_n-1}{u_n+3}$$
$$=\frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}\leq 0$$

و منه المتتالية متناقصة.

و بما أنها متناقصة و محدودة من الأسفل بـ : 1 نجد أن المتتالية متقاربة.

II) أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

لدينا : $v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$ و منه : $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{u_n-1}{u_n+3}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}}=\dfrac{u_n+3}{2u_n+2}$

و منه:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{2u_n+2}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3-2}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}$$

و منه المتتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول : $v_0=\dfrac{1}{u_0+1}=1$

ب) احسب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n:

لدينا : $v_n = v_0 + n \times r = 1 + \frac{n}{2}$

و لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ و منه : $v_n \times u_n + v_n = 1$ ، إذن : $v_n \times u_n = 1 - v_n$ و بالتالي:

و منه : $$u_n = \frac{1 - v_n}{v_n} = \frac{1 - 1 - \frac{n}{2}}{1 + \frac{n}{2}} = \frac{\frac{-n}{2}}{\frac{2+n}{2}} = \frac{-n}{2+n}$$

ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 \times v_0 + u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + ... + u_n \times v_n$:

لدينا : $v_n \times u_n = 1 - v_n$ و منه : $S_n = 1 - v_0 + 1 - v_1 + 1 - v_2 + ... + 1 - v_n$

اذن : $S_n = 1 + ... + 1 - (v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n)$

و منه : $$S_n = 1 \times (n+1) - \frac{n+1}{2}\left(1 + 1 + \frac{n}{2}\right)$$

و بالتالي : $$S_n = n + 1 - \frac{n+1}{2}\left(\frac{4+n}{2}\right) = n + 1 - \frac{(n+1)(4+n)}{4}$$
$$= \frac{-n^2 - n}{4}$$

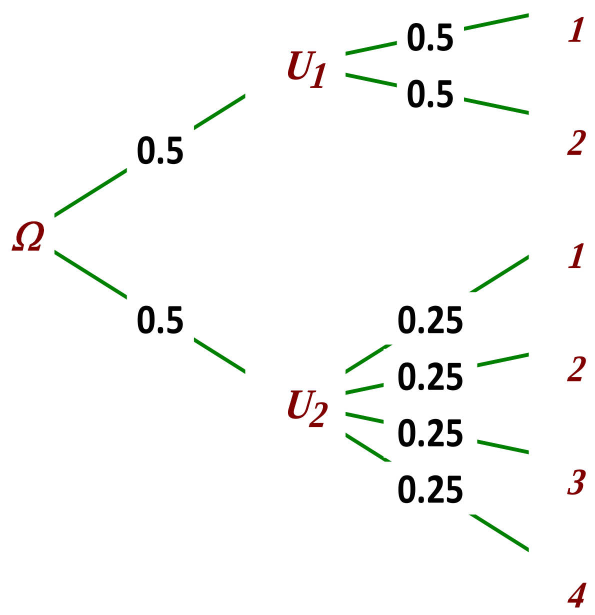
التمرين الثاني: (4.5 نقط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان الصندوق U_1 يحوي قريصتين تحملان الرقمين : 1 و 2 و الصندوق U_2 يحوي أربع قريصات تحمل الأرقام 3,2,1 و 4. جميع الكرات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس.

I) نختار عشوائيا صندوق، ثم نسحب منه قريصة بطريقة عشوائية.

1) ما هو احتمال سحب قريصة تحمل الرقم 1:

نعين شجرة الاحتمالات :



و منه :

$$P(N1) = 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.25 = 0.375$$

2) إذا كانت القريصة المسحوبة تحمل الرقم 1، فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق U_1:

$$P_{N1}(U1)=\frac{P(U1\cap N1)}{N1}=\frac{0.5\times 0.5}{0.375}=0.666$$

II) نجعل محتوى الصندوقين في صندوق واحد ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد قريصتين.

1) احسب احتمال سحب قريصتين تحملان نفس الرقم:

$$P(mC)=\frac{C_2^2+C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين.

أ) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

أرقام القريصات الموجودة في الصندوق : $\{1;1;2;2;3;4\}$ و بالتالي المجموعة : $\Omega=\{2;3;4;5;6;7\}$

لدينا : $P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$ و $P(X=3)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$ و $P(X=4)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

و $P(X=5)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$ و $P(X=6)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$ و $P(X=7)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

و منه :

X_i	2	3	4	5	6	7
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

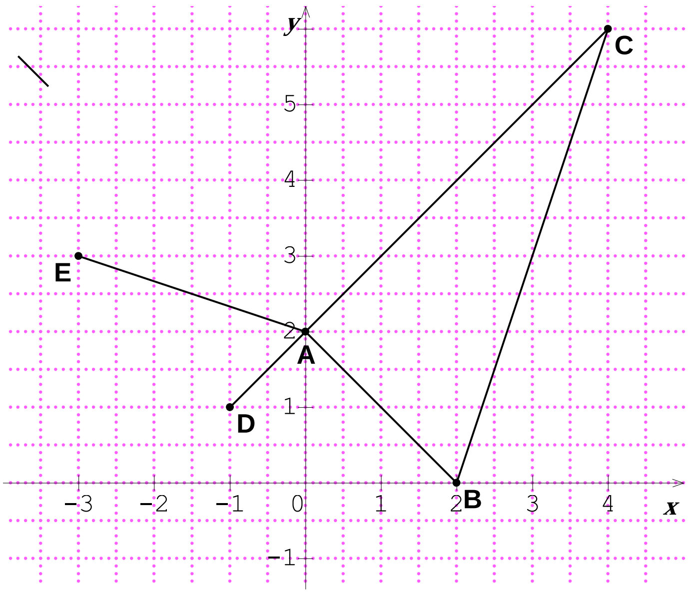
ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

$$E(X)=2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{4}{15}+4\times\frac{1}{15}+5\times\frac{4}{15}+6\times\frac{4}{15}+7\times\frac{1}{15}=\frac{69}{15}$$

<u>التمرين الثالث:</u> (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. لتكن النقط A ، B ، C ، D و E لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=2$ ، $z_C=4+6i$ ، $z_D=-1+i$ و $z_E=-3+3i$

1) علم النقط: A ، B ، C ، D و E في المعلم.



2) بين أن : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4+6i-(2i)}{2-(2i)} = \frac{4+4i}{2-2i}$$
$$= \frac{(4+4i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{8+8i+8i-8}{4+4} = \frac{16}{8}i = \frac{1}{2}i$$

طبيعة المثلث : قائم في A

مساحته : $S = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2} \times |z_{\overrightarrow{AB}}| \times |z_{\overrightarrow{AC}}|$

و لدينا : $|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A| = |2i-2| = 2\sqrt{2}$ و $|z_{\overrightarrow{AC}}| = |z_C - z_A| = |4+4i| = 4\sqrt{2}$

و منه : $S = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8$

3) S التشابه المباشر الذي يحول B إلى A ويحول A إلى D.

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S، ثم حدد نسبته و زاويته و مركزه W :

نعتبر $z' = az + b$ العبارة المركبة للتشابه

S يحول B إلى A يعني أن : $z_A = az_B + b$ .... (1)

S يحول A إلى D يعني أن : $z_D = az_A + b$ .... (2)

نطرح (2) من (1) نجد : $z_A - z_D = az_B - az_A$ و منه : $a = \frac{z_A - z_D}{z_B - z_A}$ بالتعويض نجد :

$$a = \frac{z_A - z_D}{z_B - z_A} = \frac{2i-(-1+i)}{2-2i} = \frac{1+i}{2-2i}$$
$$= \frac{(1+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2+2i+2i-2}{4+4} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i$$

بالتعويض في (1) نجد : $2i = \frac{1}{2}i \times 2 + b$ و منه : $b = i$

الكتابة المركبة للتشابه : $z' = \frac{1}{2}iz + i$

و منه نسبة التشابه : $|a| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ و زاويته : $\arg(a) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

مركزه النقطة ω لاحقتها z_ω :

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-\frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{2-i}{2}} = \frac{2i}{2-i} = \frac{2i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4i-2}{4+1} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

ب) بين أن المثلث DAE هو صورة المثلث ABC بالتشابه S، ثم استنتج طبيعته و مساحته:

لدينا : صورة B بالتشابه S هي A ، و صورة A بالتشابه S هي D.

بقي أن نثبت أن صورة C بالتشابه S هي E:

$$\frac{1}{2}iz_C + i = \frac{1}{2}i(4+6i) + i = 2i - 3 + i = -3 + 3i = z_E$$

و هو المطلوب. و منه المثلث DAE هو صورة المثلث ABC

طبيعته : قائم في D لأنه صورة مثلث قائم في A صورتها D

مساحته : $S_{DAE}=k^2S_{ABC}$ حيث : k نسبة التشابه ، و منه : $S_{DAE}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 8=2$

4) لتكن (C_1) الدائرة التي قطرها $[AB]$ و (C_2)الدائرة التي قطرها $[AD]$:

نرمز بـ : M لنقطة تقاطع الدائرة (C_1) والمستقيم (BC) حيث: $M\neq B$ ، و نرمز بـ N لنقطة تقاطع الدائرة (C_2) والمستقيم (AE) حيث: $N\neq A$.

أ) حدد صورة النقطة M بالتشابه S واستنتج طبيعة المثلث WMN.

لدينا : الدائرة (C_1) قطرها $[AB]$ و الدائرة (C_2) قطرها $[AD]$ و نعلم أن صورة B بالتشابه S هي A ، و صورة A بالتشابه S هي D. و بالتالي : صورة $[AB]$ بالتشابه S هي $[AD]$

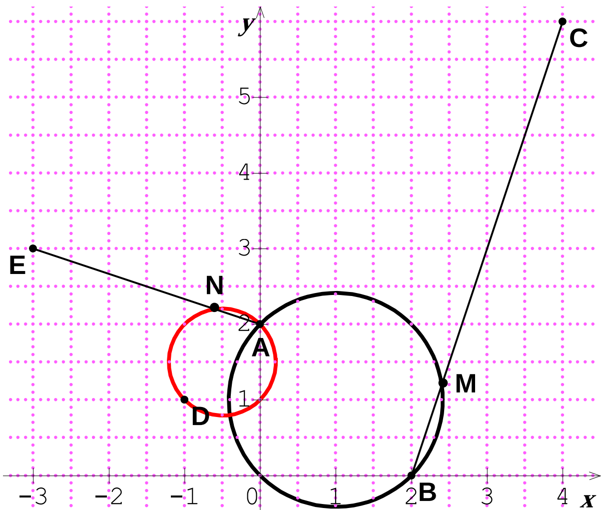
و منه الدائرة (C_2) صورة الدائرة (C_1) بالتشابه S

و نعلم أن صورة B بالتشابه S هي A ، و صورة C بالتشابه S هي E و منه: المستقيم (BC) صورته بالتشابه S هو المستقيم (AE).

و منه نقطة تقاطع الدائرة (C_1)و المستقيم (BC) صورتها بالتشابه هي نقطة تقاطع الدائرة (C_2) و المستقيم (AE).

أخيرا صورة النقطة M هي النقطة N.

ب) بين أن : $MB\times NE=MC\times NA$.



لدينا : صورة C بالتشابه S هي E و صورة النقطة M هي النقطة N و صورة B بالتشابه S هي A و بالتالي :

صورة $[MB]$ بالتشابه S هي $[NA]$ و صورة $[MC]$ بالتشابه S هي $[NE]$ و منه : $\frac{MB}{NA}=\frac{MC}{NE}=\frac{1}{2}$

و هي نسبة التشابه و بالتالي : $MB\times NE=MC\times NA$

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. (C_f) منحناها في المستوي المنسوب إلى م م م $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{e^x}^{\,0}-1}{\cancel{e^x}^{\,0}+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1}=-1$$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، التفسير الهندسي هو وجود مستقيم مقارب معادلته : $y=-1$

2) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$:

$$1-\frac{2}{e^x+1}=\frac{1\times(e^x+1)}{e^x+1}-\frac{2}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{e^x+1}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\cancel{e^x}^{+\infty}+1}=1-0=1$$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، التفسير الهندسي هو وجود مستقيم مقارب معادلته : $y=1$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$f'(x)>0$ و منه الدالة متزايدة على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$

4) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

لدينا : $f'(0)=\dfrac{2e^0}{(e^0+1)^2}=\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$ و $f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=\dfrac{0}{2}=0$

و منه : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{1}{2}x+0$ و منه معادلة المماس هي : $y=\dfrac{1}{2}x$

ب) احسب الدالة المشتقة الثانية للدالة f وبين أن المبدأ O للمعلم هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

$f'(x)=\dfrac{2e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$ ، و منه:

$$f''(x)=\frac{2e^x(e^{2x}+2e^x+1)-(2e^{2x}+2e^x)\times 2e^x}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{2e^{3x}+4e^{2x}+2e^x-4e^{3x}-4e^{2x}}{(e^x+1)^4}=\frac{-2e^{3x}+2e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{-2e^x(e^{2x}-1)}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{-2e^x(e^x-1)(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=\frac{-2e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

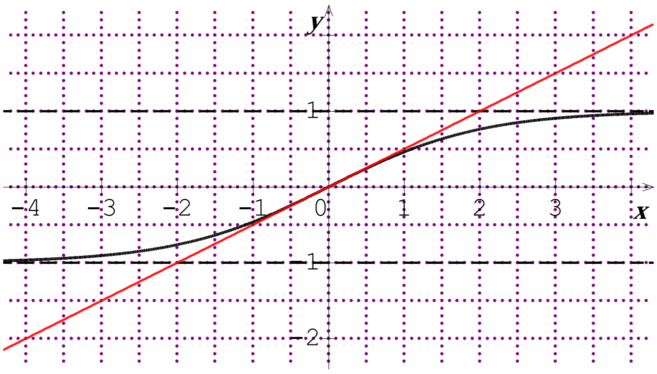
$f''(x)=0$ يعني أن : $e^x-1=0$ و منه: $x=0$

ندرس إشارة : $-(e^x-1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-(ex-1)$	$+$	0	$-$

و منه منحنى الدالة يقبل نقطة انعطاف هي مبدأ المعلم

5) ارسم المنحنى (C_f) و المماس (T) في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.



6) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

لدينا : $f(x)=1-\dfrac{2}{e^{x}+1}$ ، نضرب الكسر في e^{-x} نجد : $f(x)=1-\dfrac{2\times e^{-x}}{(e^{x}+1)\times e^{-x}}=1-\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=1$ ، $x=0$ و $x=1$.

نلاحظ أن الحيز جزء منه تحت محور الفواصل و الآخر فوقه و بالتالي :

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(-f(x))dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$$

نلاحظ أن: $f(x)=1+2\times\dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$ ، و بالتالي : $F(x)=x+2\times\ln(e^{-x}+1)$

بالتعويض :

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=[-F(x)]_{-1}^{0}+[F(x)]_{0}^{1}=-F(0)+F(-1)+F(1)-F(0)$$

$$=-2F(0)+F(-1)+F(1)$$

$$=-2\left(0+2\ln(e^{0}+1)\right)+\left((-1)+2\ln(e^{-(-1)}+1)\right)+\left(1+2\ln(e^{-1}+1)\right)$$

$$=-4\ln 2-1+2\ln(e+1)+1+2\ln(e^{-1}+1)$$

$$=-4\ln 2+2\ln(e+1)+2\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)$$

$$=-4\ln 2+4\ln(e+1)-2\ln e$$

$$=-4\ln 2+4\ln(e+1)-2=0.48$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

I) f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$.

1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

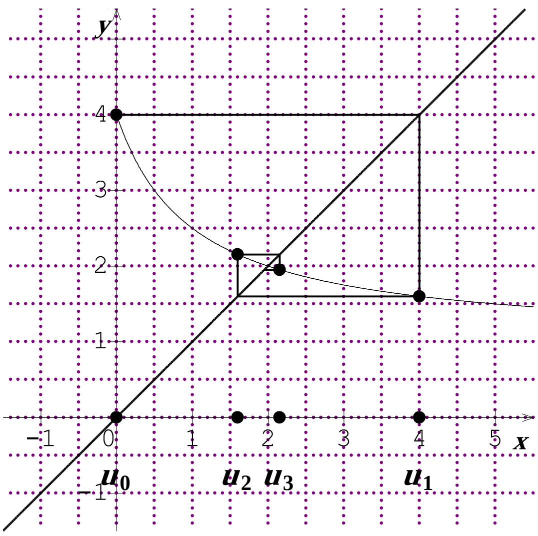
$f'(x)=\dfrac{1\times1-1\times4}{(x+1)^2}=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0$ ، و منه الدالة متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

2) تحقق أن المنحنى (C_f) للدالة f يقطع المستقيم (Δ) معادلته : $y=x$ في النقطة ذات الفاصلة 2:

$f(x)=x$ يعني أن : $\dfrac{x+4}{x+1}=x$ و منه : $x^2+x=x+4$ إذن : $x^2=4$

و منه : $x=-2$ (مرفوض لأنه لا ينتمي لمجموعة التعريف) أو $x=2$ و هو المطلوب.

3) مثل (C_f) و (Δ) على المجال $[0;+\infty[$:



II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها).

التمثيل في المعلم السابق.

ب- خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

التخمين هو : اتجاه تغير المتتالية غير رتيبة ، و تتقارب نحو 2.

2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$.

لدينا : $u_0=1$ و منه : $1\le u_0\le\dfrac{5}{2}$ محققة

نفرض من أجل كل n أن : $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$ ، و نبرهن أن : $1\le u_{n+1}\le\dfrac{5}{2}$

بما أن الدالة f متناقصة تماما إذن: $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\le f\left(u_n\right)\le f\left(1\right)$

لدينا : $f(1)=\frac{1+4}{1+1}=\frac{5}{2}$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}+4}{\frac{5}{2}+1}=\frac{13}{7}$ و منه : $\frac{13}{7}\le f(u_n)\le\frac{5}{2}$

لدينا : $1\le\frac{13}{7}$ ، بالتعدي نجد : $1\le u_{n+1}\le\frac{5}{2}$

أخيرا : $1\le u_n\le\frac{5}{2}$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ : $v_n=\frac{6-3u_n}{u_n+2}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$

لدينا : $v_n=\frac{6-3u_n}{u_n+2}$ و منه :

$$v_{n+1}=\frac{6-3u_{n+1}}{u_{n+1}+2}=\frac{6-3\times\frac{u_n+4}{u_n+1}}{\frac{u_n+4}{u_n+1}+2}=\frac{\frac{6u_n+6-3u_n-12}{u_n+1}}{\frac{u_n+4+2u_n+2}{u_n+1}}=\frac{3u_n-6}{3u_n+6}=\frac{u_n-2}{u_n+2}$$

و

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{u_n-2}{u_n+2}}{\frac{6-3u_n}{u_n+2}}-=\frac{u_n-2}{6-3u_n}=\frac{u_n-2}{-3(u_n-2)}=-\frac{1}{3}$$

و منه المتتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$.

ب- اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

لدينا : $v_0=\frac{6-3u_0}{u_0+2}=\frac{6-3\times1}{1+2}=1$ ، و منه : $v_n=1\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

بالتعويض في عبارة u_n نجد : $v_n=\frac{6-3\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)+2}$

التمرين الثاني: (04 نقاط).

في الفضاء منسوب لمعلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(1;1;2)$ ، $B(2;0;1)$ و $C(1;-3;0)$ ، و نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+3y+z+1=0$

و المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \quad t \in IR \\ z = t + 1 \end{cases}$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل لكل إجابة في ما يلي:

1) النقطة A تنتمي إلى (Δ).

الإجابة : صحيح لأن :

نعوض بإحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي نجد : $\begin{cases} 1 = 2t - 1 \\ 1 = -t + 2 \\ 2 = t + 1 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ إذن : $A \in (\Delta)$

2) الشعاع $\vec{u}\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

الإجابة خاطئة لأن :

لدينا : شعاع توجيه المستقيم هو : $\vec{v}(2;-1;1)$ و لدينا : $\vec{u}\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

و : $\frac{1}{-0.5} = \frac{-1}{0.5} \neq \frac{2}{1}$ الشعاعان غير مرتبطين خطيا إذن الشعاع ليس شعاع توجيه للمستقيم

3) المعادلة: $x - y + 2z - 4 = 0$ هي معادلة المستوي (ABC).

الإجابة صحيحة لأن :

نعوض بإحداثيات النقطة A في المعادلة نجد : $1 - 1 + 2\times2 - 4 = 0$ و منه : $A \in (ABC)$

نعوض بإحداثيات النقطة B في المعادلة نجد : $2 - 0 + 2\times1 - 4 = 0$ و منه : $B \in (ABC)$

نعوض بإحداثيات النقطة C في المعادلة نجد : $1 - (-3) + 2\times0 - 4 = 0$ و منه : $C \in (ABC)$

4) المستوي (P) عمودي على المستوي (ABC).

الإجابة صحيحة لأن :

(P) شعاعه الناظمي $\overrightarrow{u_P}(1;3;1)$ و المستوي (ABC) شعاعه الناظمي $\overrightarrow{u_{ABC}}(1;-1;2)$

و $\overrightarrow{u_P} \bullet \overrightarrow{u_{ABC}} = 1\times1 + 3(-1) + 1\times2 = 1 - 3 + 2 = 0$ و منه متعامدان.

5) المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

الإجابة خاطئة لأن :

لدينا : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \quad t \in IR \\ z = t + 1 \end{cases} : (\Delta)$ ، و $\overrightarrow{BC}(-1,-3,-1)$ و B نقطة من (BC)

و من تمثيله الوسيطي: $t \in IR$. $(BC):\begin{cases} x=-\lambda+2 \\ y=-3\lambda \\ z=-\lambda+1 \end{cases}$

نساوي بين التمثيلين نجد : $\begin{cases} -\lambda+2=2t-1.....(1) \\ -3\lambda=-t+2........(2) \\ -\lambda+1=t+1........(3) \end{cases}$ ، بجمع (2) و (3) نجد: $-4\lambda=3$ ، و منه: $\lambda=-\dfrac{3}{4}$

نعوض في (3) نجد: $\dfrac{3}{4}+1=t+1$ ، و منه: $t=\dfrac{3}{4}$

نعوض بالقيمتين في (1) نجد: $\dfrac{3}{4}+2=2\times\dfrac{3}{4}-1$ ، و منه : $\dfrac{11}{4}=\dfrac{2}{4}$ إذن : $11=2$ مستحيل ، و منه المستقيمان ليسا من نفس المستوي.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$:

$$\Delta=\left(-4\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times16=48-64=-16$$

و منه : $z_1=\dfrac{4\sqrt{3}-4i}{2}=2\sqrt{3}-2i$ و $z_2=\dfrac{4\sqrt{3}+4i}{2}=2\sqrt{3}+2i$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A و B نقطتان لواحقها على الترتيب: $z_A=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$.

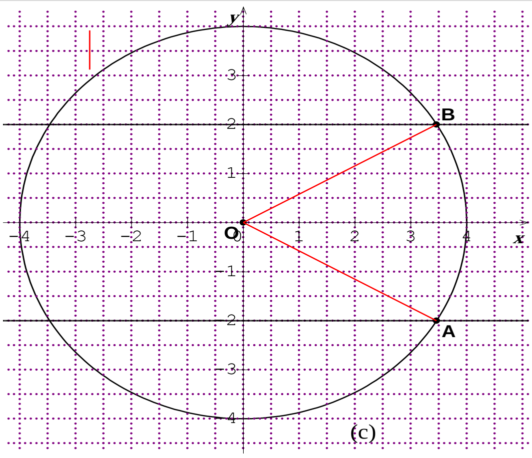
أ- أكتب كل من z_A ، z_B و على الشكل الأسي.

$z_A=2\sqrt{3}-2i$ و منه : $|z_A|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{16}=4$

$\arg(z_A)=q_A$ ، و منه : $\cos q_A=\dfrac{x}{|z_A|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، و $\sin q_A=\dfrac{y}{|z_A|}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

نستنتج أن : $\arg(z_A)=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ و بما أن : $z_B=\overline{z_A}$ ، إذن : $\arg(z_B)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$

ب- أنشئ النقطتين A و B في المعلم.



الانشاء يتم بـ :

- رسم الدائرة (C) مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها 4 .
- رسم المستقيم معادلته: $y=-2$ ، نقطة تقاطعه مع الدائرة هي النقطة A.
- رسم المستقيم معادلته: $y=2$ ، نقطة تقاطعه مع الدائرة هي النقطة B.

جـ- بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

$OA = OB = 4$ لأن $|z_A| = |z_B| = 4$

نحسب AB : $|z_A - z_B| = |2\sqrt{3} - 2i - (2\sqrt{3} + 2i)| = |-4i| = 4$

و منه $AB = 4$ ، إذن المثلث متقايس الاضلاع.

3) C نقطة لاحقتها $z_C = -8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

- احسب z_D لاحقة النقطة D.

الدوران مركزه مبدأ المعلم عبارته المركبة من الشكل : $z' = az$ ، و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ إذن : $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و منه:

$a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن العبارة المركبة: $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

D صورة C بالدوران إذن : $z_D = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-8i) = 4\sqrt{3} + 4i$

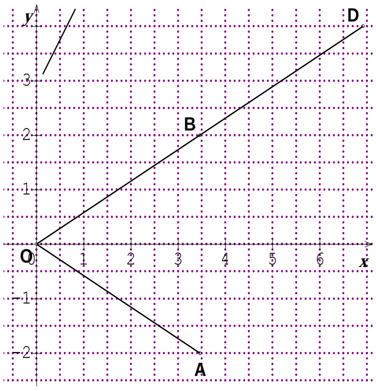
4) بين أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك مركزه O يطلب تعيين نسبته.

التحاكي مركزه O عبارته المركبة من الشكل : $z' = az$ و لدينا : $z_D = 4\sqrt{3} + 4i = 2\left(2\sqrt{3} + 2i\right) = 2z_B$

و منه التحاكي نسبته 2.

5) ما طبيعة المثلث OAD ؟ برر جوابك.

لدينا : $\frac{z_D - z_A}{z_O - z_A} = \frac{4\sqrt{3} + 4i - (2\sqrt{3} - 2i)}{0 - (2\sqrt{3} - 2i)} = \frac{2\sqrt{3} + 6i}{-2\sqrt{3} + 2i}$



$= \frac{(\sqrt{3} + 3i)(-\sqrt{3} - i)}{(-\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} - i)} = \frac{-3 - i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3} + 3}{4} = \frac{-i4\sqrt{3}}{4} = -i\sqrt{3}$

$\frac{z_D - z_A}{z_O - z_A} = -i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

و منه المثلث قائم في A.

التمرين الرابع: (07 نقاط).

I) g دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$

1) احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير g و شكل جدول تغيراتها.

$$g'(x) = \frac{1\times1 - 1\times0}{(x+1)^2} - 2\times\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{1 - 2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

لدينا :

x	$-\infty$	-0.5	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−

و منه : الدالة متزايدة على $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

أيضا: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}-\lim_{x\to+\infty}2\ln(x+1)=-\infty$

و $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}\frac{1}{x+1}\left(x-(x+1)2\ln(x+1)\right)=-\infty$

لأن: $\lim_{x \xrightarrow{>} -1}\frac{1}{x+1}=+\infty$ ، و

$\lim_{x \xrightarrow{>} -1}\left(x-(x+1)2\ln(x+1)\right)=-1-0=-1$

جدول التغيرات:

x	-1		-0.5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+2ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

2) احسب $g(0)$ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α من المجال: $[-0,72;-0,71]$.

$$g(0)=\frac{0}{0+1}-2\ln(0+1)=0-2\ln(1)=0$$

- الدالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-0.72;-0.71]$ ، و لدينا : $g(-0.72)=-0.025$ و $g(-0.71)=0.027$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا α.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) f دالة معرفة على المجال $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\cancelto{0}{\frac{(x+1)}{x^2}}\times\cancelto{0}{\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}}=0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}\frac{\ln(x+1)}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x}=+\infty$$

(لأن: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$)

2) احسب $f'(x)$ ثم استنتج إشارتها من الجزء (I) .

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\times x^2-2x\times\ln(x+1)}{x^4}=\frac{x\left(\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right)}{x^4}=\frac{g(x)}{x^3}$$

إشارة المشتقة من إشارة g و إشارة x و منه :

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

3) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$، ثم عين قيمة مقربة لـ : $f(\alpha)$ من أجل : $\alpha=-0{,}715$.

لدينا : $g(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0$ ، و منه : $\ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$

و لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$ بالتعويض نجد : $f(\alpha)=\dfrac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2}$ و منه :

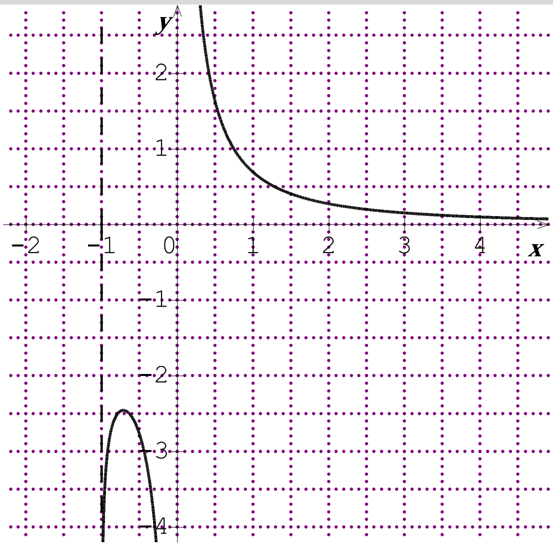
$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\times\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

بالاختزال نجد : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ ، و هو المطلوب.

4) شكل جدول تغيرات الدالة f.

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

5) ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.(الوحدة $2cm$)



6) F دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $F(x)=\ln x-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x+1)$

- بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

$$F'(x)=\frac{1}{x}-\left(\left(0-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\times\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\times\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1}$$

لدينا : $\frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ ، و منه : $F'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\times\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

و منه : $F'(x)=\cancel{\frac{1}{x}}+\frac{\ln(x+1)}{x^2}-\cancel{\frac{1}{x+1}}-\cancel{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{1}{x+1}}=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$

إذن: $F'(x)=f(x)$ و بالتالي هي دالة أصلية.

7) λ عدد حقيقي موجب تماما.

- احسب التكامل : $I(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx$ ، ثم حدد حسب قيم λ التفسير الهندسي للعدد $I(\lambda)$.

$$I(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx=F(\lambda)-F(1)$$

$$=\ln\lambda-\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\ln(\lambda+1)-\ln1-\left(1+\frac{1}{1}\right)\ln(1+1)$$

$$=\ln\lambda-\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\ln(\lambda+1)-2\ln2$$

التفسير الهندسي :

إذا كانت $\lambda>1$ فإن $I(\lambda)$ تمثل مساحة الحيز المحدد بـ : C_f و (xx') و المستقيمين معادلتيهما $x=1$ و $x=\lambda$

إذا كانت $\lambda=1$ فإن: $I(\lambda)=0$

إذا كانت $\lambda<1$ فإن $|I(\lambda)|$ تمثل مساحة الحيز المحدد بـ : C_f و (xx') و المستقيمين معادلتيهما $x=1$ و $x=\lambda$