امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة : علوم تجريبية المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2n$

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \geq n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) (v_n) متتالية عددية معرّفة بـ : $v_n=u_n-4n+b$ حيث b عدد حقيقي

أ/ عيّن العدد الحقيقي b حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب/ اكتب عندئذ v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n ثم احسب مرّة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) أ/ نضع: $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$ و $S'_n=u_0+u_1+.....+u_n$. احسب S_n بدلالة n

ب/ بيّن أن: $S'_n=S_n+(n+1)(2n-8)$

التمرين الثاني (5 ن)

في المستوى المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\,\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}+i$ و $z_D=\overline{z_C}$

1) أ/ اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب/ استنتج طبيعة التحويل R الذي مركزه النقطة A و يحوّل النقطة B إلى النقطة C يطلب تعيين عبارته المركبة.

2) حدّد طبيعة الرباعي $ABCD$ ثم احسب مساحته

3) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ حقيقيا سالبا

4) لتكن z_K لاحقة النقطة K صورة النقطة E ذات اللاحقة $z_E=i$ بواسطة التحويل R

بيّن أن $z_K=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}+1$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

5) اكتب العبارة المركبة للتحاكي H الذي مركزه A و نسبته -3 .

6) أ/ ما طبيعة التحويل $S=R\circ H$ محددا عناصره المميزة

التمرين الثالث (4 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\,\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;1;0)$ ، $B(1;2;1)$ و $C(3;-1;2)$

1) أ/ بيّن أن النقط A ، B و C تشكل مستويا

ب/ بيّن أن $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ثم عيّن معادلة ديكارتية له

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) معادلتيهما على الترتيب : $x+2y-z-4=0$ ، $2x+3y-2z-5=0$

بيّن أن المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يشمل النقطة $E(-2;3;0)$ و موجّه بالشعاع $\vec{u}(1;0;1)$

3) عيّن تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q)

4) اوجد المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

التمرين الرابع (7 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\vec{i}\;;\;\vec{j})$

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x-1)e^{x}+1$

1) أ/ احسب نهايتي الدالة g عند حدود مجال تعريفها .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم ارسم جدول تغيراتها.

2) عيّن حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $xe^{x}+1>0$

3) أ/ تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g(x)-g'(x)=1-e^{x}$ (g' هي الدالة المشتقة للدالة g)

ب/ استنتج $\int_{0}^{1} g(x)\,dx$ ثم فسّره بيانيا.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{xe^{x}+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين بيانيا

2) أ/ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ : $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{x}}{(xe^{x}+1)^{2}}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم ارسم جدول تغيراتها

3) بيّن أنّ $y=x$ هي معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ : $f(x)-x=\dfrac{-x\,g(x)}{xe^{x}+1}$ ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T)

5) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

III) (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ و من اجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_{n+1}=f(u_n)$

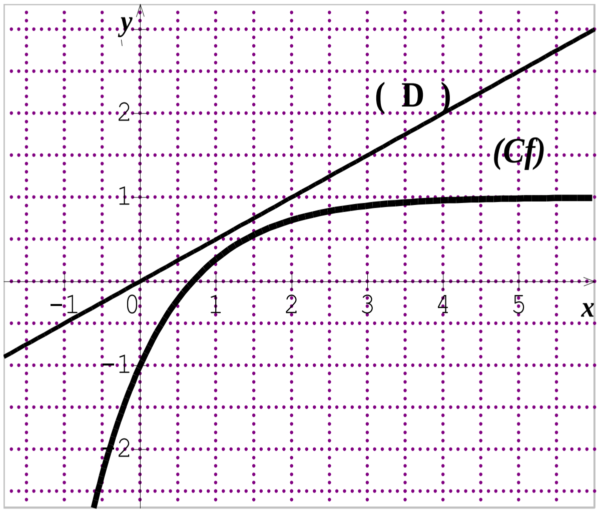
1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n>0$

2) برهن ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما واستنتج انها متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

الشكل التالي يمثّل المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$



بـ : $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x$

1)) عيّن بيانيا اشارة العبارة $1-\dfrac{2}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}x$

2) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

أ/ بيّن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq 0$

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}u_n$

جـ/ بين ان المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

د/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين الثاني (5 ن)

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$

2) في المستوى المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\ \vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي

لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

أ/ بيّن ان النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$

ب/ بيّن ان: $\left(\dfrac{z_D-1}{4}\right)^{1934}+\left(\dfrac{z_C-1}{4}\right)^{2018}=z_A$

3) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة للمبدأ O

أ/ عين عمدة و طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC

ب/ استنتج طبيعة التحويل R الذي مركزه النقطة B و يحوّل النقطة E إلى النقطة C يطلب تعيين عبارته المركبة.

4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=(1-i\sqrt{3})z+\sqrt{3}$$

أ/ عيّن طبيعة التحويل S و حدّد عناصره المميّزة.

ب/ عيّن طبيعة (C) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقّق: $|iz-3i|=|-3+i\sqrt{3}|$

جـ/ عيّن طبيعة المجموعة (C') صورة (C) بالتحويل S

5) عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة غير المعدومة z حيث: $arg\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$

مع $k\in\mathbb{Z}$ و $\overline{z}$ مرافق z

التمرين الثالث (4 ن)

في بلد 2% من المجتمع مصاب بفيروس . دراسة التحاليل للعثور على أثر هذا الفيروس اسفرت على ما يلي:
احتمال لكي يكون الشخص مصاب بالفيروس له نتيجة التحليل موجبة هو 0,99 و احتمال لكي يكون الشخص غير مصاب بالفيروس نتيجة التحليل سالبة هو 0,97 . نختار عشوائيا نتيجة التحليل لشخص من هذا المجتمع .
نعتبر الحادثتين: V : " الشخص مصاب بالفيروس " و T : " نتيجة التحليل موجبة "

1) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
2) احسب احتمال الحوادث التالية A : " الشخص مصاب بالفيروس و نتيجة التحليل موجبة "
B : " نتيجة التحليل موجبة علما ان الشخص مصاب بالفيروس "
C : " نتيجة التحليل سالبة علما ان الشخص غير مصاب بالفيروس "
3) احسب احتمال أن تكون نتيجة التحليل موجبة
4) احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالفيروس علما ان نتيجة التحليل سالبة .

التمرين الرابع (7 ن)

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^3-x+3-2ln(x)$

1) احسب نهايتي الدالة g عند حدود مجال تعريفها .
2) أ/ تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$
ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم ارسم جدول تغيراتها.
جـ/ استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1+\dfrac{x-1+ln(x)}{x^2}$
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهايتي الدالة f عند حدود مجال تعريفها .
2) أ/ بيّن ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)
ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة للمستقيم (Δ)
3) أ/ بيّن انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$
ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم ارسم جدول تغيراتها.
4) أ/ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1
5) ارسم المستقيمين (Δ) و (T) و المنحنى (C_f).
6) m وسيط حقيقي . (Δ_m) مستقيم معادلته: $y=mx-m$
أ/ بيّن أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة A
ب/ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة: $f(x)=mx-m$ حلين متمايزين
7) أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة ، بيّن أن: $U_n=\displaystyle\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$
ب/ احسب مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلاتهما على الترتيب: $x=1$ و $x=e$.