وزارة التربية الوطنية

امتحان البكالوريا التجريبية للتعليم الثانوي **دورة: 2019**

الشعبة: تقني رياضياتي **ثانوية: بني مزلين –قالمة–**

امتحان في مادة: الرياضيات **المدة: 04 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (04) صفحات (من الصفحة 1 من 7 إلى الصفحة 4 من 7)

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $\mathcal{U}_0 = 2$ و $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) أحسب الحدود $\mathcal{U}_1 ; \mathcal{U}_2 ; \mathcal{U}_3$ ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(\mathcal{U}_n)$

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\mathcal{U}_n \leq n + 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ و استنتج أنها محدودة من الأسفل

ج) هل يمكن القول أن المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ متقاربة ؟

3) نعتبر المتتالية $(\mathcal{V}_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - n$

أ) برهن أن المتتالية $(\mathcal{V}_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) عبر عن $\mathcal{V}_n$ ثم $\mathcal{U}_n$ بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية $(\mathcal{U}_n)$

ج) احسب بدلالة n المجموع $\mathcal{S}_n$ حيث: $\mathcal{S}_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n$

4) لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $t_n = ln(\mathcal{V}_n)$

أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) احسب بدلالة n المجموع $\mathcal{T}_n$ حيث: $\mathcal{T}_n = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n$

- استنتج بدلالة n الجداء $\mathcal{P}_n$ حيث: $\mathcal{P}_n = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \ldots \times \mathcal{V}_n$

التمرين الثاني: (5.5 نقاط)

I. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ للمتغير المركب $\mathcal{Z}$ حيث:

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}^3 - \left(1+\sqrt{2}i\right)\mathcal{Z}^2 + \left(1+\sqrt{2}i\right)\mathcal{Z} - \sqrt{2}i$$

1) بين أن المعادلة $\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا $\mathcal{Z}_0$ يطلب تعيينه.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط $A; B; C; D$ التي لواحقها على الترتيب: $\mathcal{Z}_A = 1 + i$ و $\mathcal{Z}_B = -1 + 3i$ و $\mathcal{Z}_C = -3 + i$ و $\mathcal{Z}_D = -1 + \sqrt{3}i$

1) أ) أنشئ في المعلم $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$ النقط $A; B; C; D$ مع شرح كيفية إنشاء النقطة D

ب) h هو التحاكي الذي نسبته 2 و يحول A إلى C. عين $\mathcal{Z}_w$ لاحقة النقطة w مركز التحاكي h

2) نضع $L = \frac{\mathcal{Z}_A - \mathcal{Z}_B}{\mathcal{Z}_C - \mathcal{Z}_B}$

أ) احسب طويلة وعمدة العدد المركب L مستنتجا طبيعة المثلث ABC

ب) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: L^n تخيليا صرفا

3) لتكن النقطة G بحيث: $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB}$ و لتكن I منتصف القطعة: $[BC]$

أ) بين أن النقطة G هي مرجح النقط $A; B; C$ مرفقة بمعاملات حقيقية يطلب تعيينها.

ب) عين $\mathcal{Z}_G$ لاحقة النقطة G و $\mathcal{Z}_I$ لاحقة النقطة I

ج) عين ثم أنشئ مجموعة النقط $\mathcal{M}$ من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}A} - \overrightarrow{\mathcal{M}B} + \overrightarrow{\mathcal{M}C}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}B} + \overrightarrow{\mathcal{M}C}\right\|$

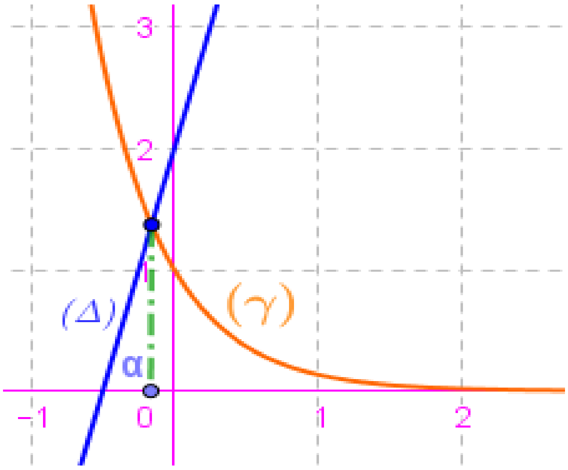
4) نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $\mathcal{Z}_E = 1 + 5i$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر $\mathcal{S}$ والذي يحول G إلى I و يحول E إلى A

ب) ما هي صورة الدائرة $(\mathcal{R})$ التي مركزها G و تشمل E بالتشابه المباشر $\mathcal{S}$ ؟

ج) عين طبيعة التحويل النقطي $\mathcal{S} o \mathcal{S}$ و عناصره المميزة.

التمرين الثالث: (06 نقاط)



I. (γ) التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto e^{-2x}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = 4x + 2$. α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة لـ: (Δ) على $\mathbb{R}$

2) بين أن: $g(x) \geq 0$ من أجل: $x \in]-\infty; \alpha]$ و أن: $g(x) < 0$ من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$

3) تحقق أن: $-0.16 < \alpha < -0.15$

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

1) أ) أحسب نهايات الدالة f

ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = e^{2x} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (D) يطلب تعيين معادلة له.

ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) و المستقيم (D)

3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$

4) أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) يطلب كتابة معادلة له

5) أ) أرسم (D) و (T) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \simeq 3.07$)

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة: $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

6) أ) x عدد حقيقي. باستعمال التكامل بالتجزئة جد التكامل: $\int_0^x 2te^{2t}dt$

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من 0. أحسب بدلالة λ المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات: $x = 0$ و $x = \lambda$ و $y = x + 3$ ثم أحسب: $\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

التمرين الرابع: (3.5 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10

- استنتج باقي قسمة العدد $\mathcal{A}_n$ على 10 حيث:

$$\mathcal{A}_n = 1993^{16n+6} - 2 \times 1439^{2n+3} + 2018$$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $(3n+4)1439^n + 2017^{2n+1} \equiv (3n+1)3^{2n}[10]$

ب) استنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $(3n+4)1439^n + 2017^{2n+1}$ مضاعفا لـ: 10

3) $\mathcal{N}$ عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\alpha0\alpha\alpha02}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{\beta612}$ في النظام ذي الأساس 7

- أوجد العددين α و β ثم اكتب $\mathcal{N}$ في النظام العشري.

4) يحتوي كيس على 4 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10. نسحب عشوائيا من الكيس كرتين في آن واحد.

أ) أحسب احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017

ب) X المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية السحب مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 5 من 7 إلى الصفحة 7 من 7)

التمرين الأول: (4.5 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$. المنحني $\left(C_f\right)$ في الوثيقة المرفقة هو التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) المتتاليتان (U_n) و (V_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} V_0=2 \\ V_{n+1}=f(V_n) \end{cases}$$

- باستعمال $\left(C_f\right)$ و منصف الربع الأول مثل على محور الفواصل الثلاث حدود الأولى لكل متتالية مبرزا خطوط الإنشاء

2) أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le U_n\le 2$ و $U_n\le U_{n+1}$

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le V_n\le 2$ و $V_{n+1}\le V_n$

د) ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب كل من المتتاليتين (U_n) و (V_n) ؟ علل.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}-U_{n+1}=\frac{V_n-U_n}{(V_n+1)(U_n+1)}$

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}-U_{n+1}\le\frac{1}{4}(V_n-U_n)$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n-U_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n-U_n\ge 0$

- استنتج أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان يطلب تعيين نهاية كل منهما.

التمرين الثاني: (6.5 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z^2+3-4i)\left(z^2-2(\sqrt{3}+1)z+2\sqrt{3}+5\right)=0$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1$ و $z_B=1+2i$ و $z_C=1+\sqrt{3}+i$ و $z_D=\overline{z_C}$

1) أ) أكتب $\mathcal{Z}_C - \mathcal{Z}_B$ على الشكل الاسي ثم اشرح طريقة إنشاء C و $\mathcal{D}$

ب) أنشئ النقط A و $\mathcal{B}$ و C و $\mathcal{D}$

2) أحسب $(\mathcal{Z}_C - \mathcal{Z}_B)^{2015}$ (تعطى النتيجة على الشكل الجبري)

3) أ) أحسب قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

- استنتج طبيعة التحويل f الذي مركزه A و يحقق $f(\mathcal{B}) = C$ ثم عين عبارته المركبة و عناصره المميزة

4) أثبت أن الرباعي $ABCD$ هو معين يطلب تعيين مساحته

5) لتكن $\mathcal{Z}_K$ لاحقة النقطة K صورة النقطة $E(0; 1)$ بواسطة التحويل f

أ) بين أن $\mathcal{Z}_K = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}i} + 1$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ: $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

6) اكتب العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A و نسبته -3 ثم عين صورة النقطة E بالتحاكي h

7) أ) عين طبيعة للتحويل $\mathcal{S} = f o h$ و عناصره المميزة ثم اكتب عبارته المركبة.

ب) أحسب مساحة المعين $A'\mathcal{B}'C'\mathcal{D}'$ صورة المعين $ABCD$ بواسطة التحويل $\mathcal{S}$

التمرين الثالث: (03 نقاط)

I. يحتوي كيس $\mathcal{U}_1$ على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس منها 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء و كرتين حمراوين.

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من الكيس $\mathcal{U}_1$

1) أحسب احتمال الحادثتين: E "الكرات المحصل عليهما من نفس اللون". F "توجد على الأقل كرة حمراء".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية السحب العدد $2n - 1$ حيث n هو عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس

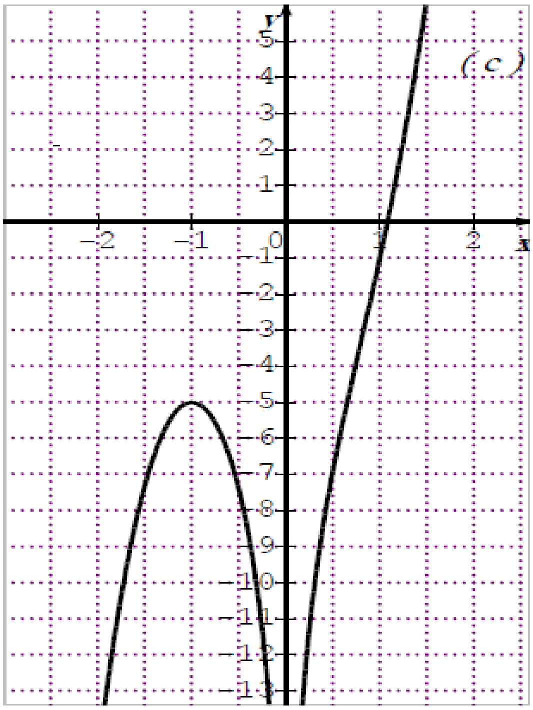
أ) بين أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{1; 3; 5; 7\}$

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي.

II. يحتوي كيس $\mathcal{U}_2$ على 10 كريات لا نفرق بينها باللمس منها 7 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء.

نسحب عشوائيا كرية من الكيس $\mathcal{U}_2$ ثم نضعها في الكيس $\mathcal{U}_1$. ثم نسحب كرية من الكيس $\mathcal{U}_1$

1) أحسب احتمال الحادثتين: A "الكرية المسحوبة من $\mathcal{U}_1$ حمراء". B "الكرية المسحوبة من $\mathcal{U}_1$ بيضاء".



التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. المنحني المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$

بـ: $g(x) = 2x^3 - 3 + 6\ln|x|$

1) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق:

$1.07 < \alpha < 1.09$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 2x - 3\frac{\ln|x|}{x^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$

1) أحسب نهايات الدالة f ثم فسر بيانيا نهاية الدالة f عند الصفر

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$

- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ب) بين أن $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$ ثم استنتج حصرا لـ: $f(\alpha)$

3) أ) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة: $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

4) أنشئ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) و المنحني (C_f)

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $mx^2 + 3\ln x = 0$

6) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{a + b\ln|x|}{x}$

أ) عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون h دالة أصلية للدالة: $x \longmapsto \frac{\ln|x|}{x}$ على $\mathbb{R}^*$

ب) عين دالة أصلية للدالة f على: $\mathbb{R}^*$

ج) أحسب $\int_{\alpha}^{2} f(x)dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

انتهى الموضوع الثاني