الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات

امتحـــان تجريبي بكالوريا التعليم الثانوي — ثانوية ادريس السنوسي –مستغانم–

الشعبة : الرياضيات — دورة : ماي 2019

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة :4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل(1) وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

1) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

ا) مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الإنشاء .

ب) خمن اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$ ثم بين أن (u_n) متناقصة .

د) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) ا) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}-1\leq\dfrac{1}{2}(u_n-1)$

ب) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n-1\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3) لتكن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$.

ا) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول .

ب) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=\dfrac{v_0-1}{u_0}+\dfrac{v_1-1}{u_1}+\dfrac{v_2-1}{u_2}+\ldots+\dfrac{v_n-1}{u_n}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;0;-1)$ ، $C(0;3;-1)$ ، $D(1;-2;6)$.

1) ا) بين أن النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي .

ب) عين الأعدادالحقيقية α ، β ، γ بحيث تكون النقطة C مرجحاً للجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

2) ا) عين عددين حقيقيين a و b بحيث $\vec{n}(3;a;b)$ ناظمي لـ (ABC) ، ثم اكتب معادلة دكارتية له .

ب) (Q) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (ABC) .

– اكتب معادلة الديكارتية لـ (Q) .

ج) اكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما " (ABC) و (Q) " .

3) m وسيط حقيقي ، (P_m) مجموعة المستويات حيث : $(P_m)\ :\ (3m+1)x+(2m-1)y+(m-1)z+2-5m=0$

ا) بين أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا يطلب تحديده .

ب) (S) سطح الكرة ذي المركز $w(0,0,-1)$ ونصف القطر $R=\sqrt{3}$ ، اكتب معادلة ديكارتية لـ (S) .

ج) حدد قيم m التي من أجلها يكون (S) و (P_m) متماسان .

- جد نقط التماس من أجل $m=0$.

4) ا) عين (E_1) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $MA^2+MB^2=AB^2$

ب) عين مجموعة النقط M من الفضاء التي من أجلها : $MA^2-MB^2=AB^2$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2) في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ذات اللاحقتين $z_A=1-i$ و $z_B=2+\sqrt{3}+i$

ا) اكتب z_A على الشكل الأسي .

ب) بين أن : $\dfrac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

ج) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول ؟

3) ا) أوجد لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r الذي مركزه المقطة O وزاويته $\dfrac{-\pi}{6}$.

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ (مقدرة بوحدة المساحة) .

ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $arg\left[(z-z_B)^2\right]=arg(z_B)-arg(z_{B'})$

د) عين z_C لاحقة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل ، ثم أوجد z_I لاحقة مركز ثقله .

4) نضع : $f=r\circ s$ (يرمز $\circ$ الى تركيب التحويلين r و s) .

ا) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O و نسبته 2 و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

ب) أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة) .

5) ا) إذا كان $S(M)=M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{AM'}=0$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

ا) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث : $(E)\ :\ y'-y=e^x-x$

1) بين أن الدلة u حل للمعادلة (E) حيث u معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x)=xe^x+x+1$.

2) v دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، بين أن الدالة $v+u$ حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة v حل للمعادلة التفاضلية (E') حيث : $(E')\ :\ y'-y=0$

3) حل المعادلة التفاضلية (E') ، ثم استنتاج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) .

4) عين الحل الخاص k للمعادلة التفاضلية (E) والذي يحقق $k(0)=0$.

II) g دالة العددية معرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=(x-1)e^x+x+1$.

1) احسب $g'(x)$ لكل x من $[0;+\infty[$ ، ثم استنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، بين أن : $g(x)\geq 0$ لكل x من $[0;+\infty[$

III) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{xe^x}{(e^x-1)^2}$.

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن f دالة فردية .

2) ا) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا .

ب) برهن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة الى المنحنى (C_f) ؟

3) ا) بين أن : $f'(x)=\dfrac{-e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، ثم استمنتج إشارة $f'(x)$ على $]0;+\infty[$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$.

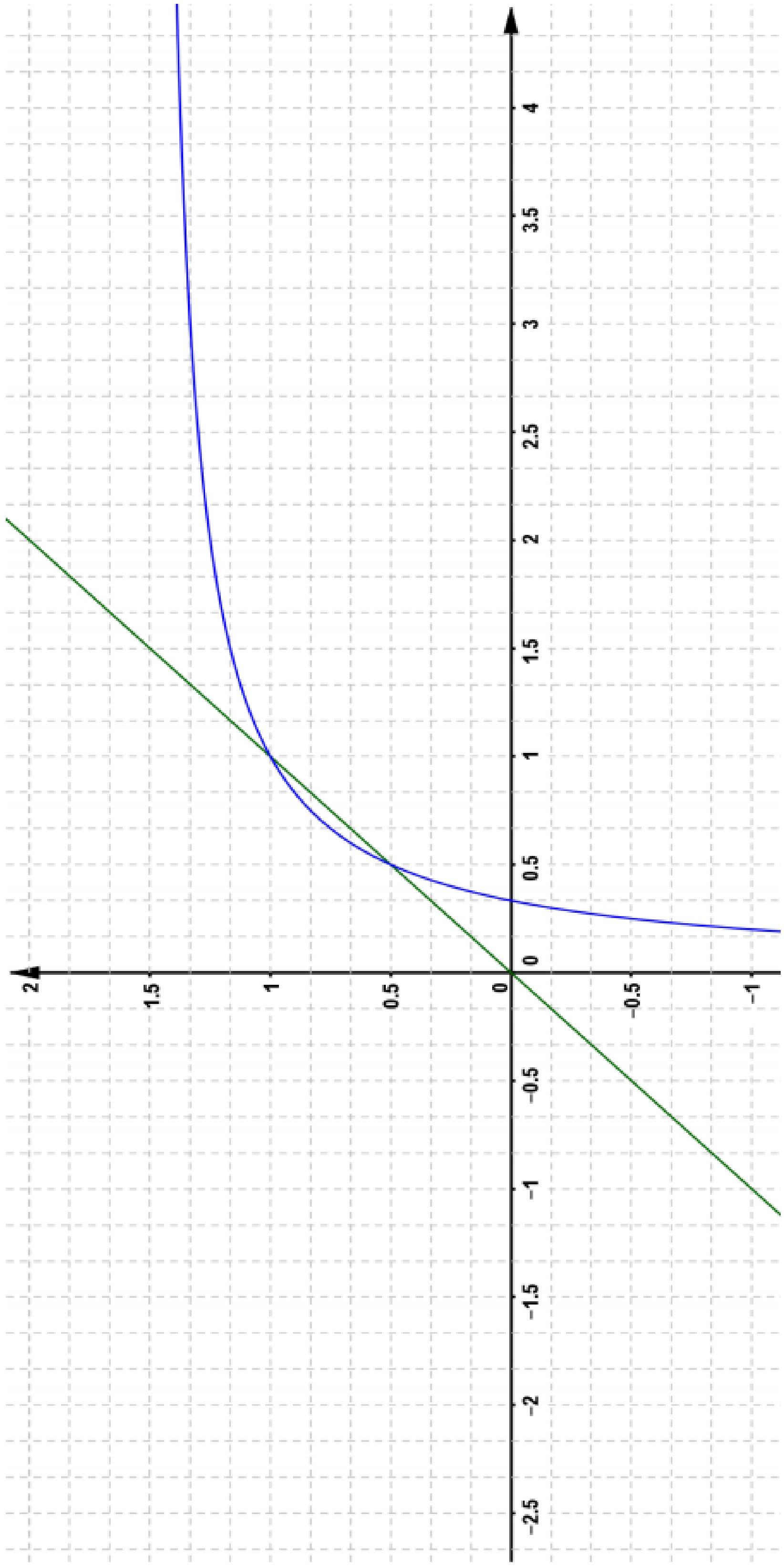
4) أنشئ المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}-\{0\}$ في المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

5) لتكن الدالة h المعرفة على $[ln2;+\infty[$ كمايلي : $h(x)=ln\left(\dfrac{e^x}{e^x-1}\right)-\dfrac{x}{e^x-1}$

ا) بين أن الدالة h هي دالة اصلية للدالة f على المجال $[ln2;+\infty[$.

ب) احسب العدد A حيث : $A=\int_{ln2}^{ln2019} f(x)\,dx$ ، ماذا يمثل هندسيا العدد A .

الاسم : .... اللقب: ....



الشكل 1

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

ثلاث صناديق A ، B ، C يحوي كل منها 10 كريات متماثلة بحيث :

الصندوق A : يحوي كرتين حمراوتين و 8 خضراء .

الصندوق B : يحوي 3 كريات حمراء و 7 كريات خضراء .

الصندوق C : يحوي 4 كريات حمراء و 6 كريات خضراء .

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق ونسحب منه كرية واحدة عشوائيا .

1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه الوضعية .

2) ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء .

3) ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء و من الصندوق الأول .

4) إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء ، فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الأول

التمرين الثاني: (04 نقاط)

n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، a و b عددان طبيعيان حيث :

$$a = 37n + 32$$
$$b = 26n - 32$$

1) ا) نضع $d = PGCD(a;b)$ ، عين القيم الممكنة لـ d .

ب) إذا اعتبرنا $PGCD(a;b) = 2016$ برّر وجود عدد صحيح m حيث : $2016m = 37n + 32$.

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) حيث : $2016m - 37n = 32$.

ا) باستعمال خوارزمية إقليدس عين العددين الصحيحين x و y بحيث $2016x - 37y = 1$.

ب) استنتج الحل الخاص للمعادلة (E) .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

3) ا) تأكد من أن a و b يكتبان على الشكل:

$$\begin{cases} a = 2016(37k - 64) \\ b = 2016(26k - 45) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ب) برهن أنه مهما كان العدد الصحيح k فإن : $PGCD(a;b) = 2016$

ج) ما هو أصغر عددين طبيعيين a و b بحيث : $PGCD(a;b) = 2016$ ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C ، D ، E التي لواحقها على الترتيب $z_A = 1$ ، $z_B = 4 + i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_D = -1 + i$ ، $z_E = -2i$.

1) بين أنّ $\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أنه يوجد تحويل نقطي T يحول D الى E و يحول B الى C يطلب تعين طبيعته وعناصره المميزة .

2) عين لاحقة C' صورة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z صورتها M' ذات اللاحقة z' بالتشابه S .

– بين أن $z'=\frac{1}{2}[(1+i)z+1-i]$.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $z=(1+i)(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

ا) عين طبيعة مجموعة النقط (Γ) لما θ يمسح المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

ب) اوجد طبيعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S .

5) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $arg(z-z_B)-arg(z-z_A)\equiv\pi[2\pi]$

– عين طبيعة مجموعة النقط (γ) .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=lnx-\frac{1}{lnx}$ ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و (Γ) المنحنى الذي معادلته $y=lnx$ في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب ووضح النهايات للدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>1$ لدينا : $f'(x)=\frac{1+(lnx)^2}{x(lnx)^2}$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

4) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-lnx]$ ، قدم تفسيرا هندسيا للنتيجة .

5) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

II) نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة من المبدأ O ، ليكن α عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$.

1) برهن أن المماس T_α للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة α يمر بمبدأ الاحداثيات إذا وفقط إذا كان $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$

لتكن g الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

2) برهن أنه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين : $g(x)=0$ و $(lnx)^3-(lnx)^2-lnx-1=0$ لهما نفس الحلول .

3) لتكن الدالة u ذات المتغير الحقيقي t و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(t)=t^3-t^2-t-1$

ا) ادرس تغيرات الدالة u و أنشئ جدول تغيراتها .

ب) بين أن الدالة u تنعدم مرة وحيدة فقط على $\mathbb{R}$.

ج) استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر بالمبدأ O .

د) أثبت أن الحل الوحيد β للمعادلة $u(x)=0$ يحقق : $1.83<\beta<1.84$

ه) استنتج أن معادلة المماس (T_{e^β}) المار من المبدأ O هي : $y=\left(\frac{1+\beta^2}{e^\beta\beta^2}\right)x$

III) الإنشاء و الدراسة البيانية

1) أنشئ المماس (T_{e^β}) و المنحنيين (Γ) و (C_f) ، يعطى مايلي : $\beta\simeq1.8$ و $e^\beta\simeq6.26$

2) نعتبر عدد حقيقي m ، من قراءة بيانية أدرس حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x)=mx$ التي تنتمي الى المجال $]1;10[$.