ثانوية المقاوم سليمان بن حمزة - عين الذهب - السنة الدراسية : 2018 – 2019

الفرض المحروس للفترة الثانية في مادة الرياضيات

القسم: سنة ثالثة علوم تجريبية المدة : 02 ساعة

تمرين رقم (1) :

✍ (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0

✍ (V_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول V_0

❶ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\boxed{U_{n+2}+U_n=2U_{n+1}}$ و $\boxed{V_{n+2}\times V_n=(V_{n+1})^2}$

❷ بين أنه إذا كان $-1 \prec q \prec 1$ فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0}$

❸ بين أن المتتالية (w_n) المعرفة بـ : $w_n=e^{U_n}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

❹ بين أن المتتالية (t_n) المعرفة بـ : $t_n=\ln(V_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

تمرين رقم (2) :

✍ نرمي قطعة نقدية غير متوازية عدة مرات، حيث :

❖ احتمال الحصول على " وجه " في الرمية الأولى هو "0,2"

❖ إذا ظهر " ظهر " رمية فإن احتمال ظهور "وجه " في الرمية الموالية هو "0,05"

❖ إذا ظهر " وجه " رمية فإن احتمال ظهور "وجه " في الرمية الموالية هو "0,1"

I) نسمي :

❖ A_1 الحادثة : " ظهور الوجه في الرمية الأولى "

❖ A_2 الحادثة : " ظهور الوجه في الرمية الثانية "

❖ A_3 الحادثة : " ظهور الوجه في الرمية الثالثة "

❶ أنشيء شجرة الإمكانيات للرميات الثلاث الأولى موضحا عليها إحتمال ظهور الوجه والظهر في كل رمية.

❷ عين قـانون الإحتمال في هذه الحالة.

II) نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مرات ظهور الوجه في الرميات الثلاث الأولى:

① عيـن قيم المتغيـر X.

② بين أن : $\boxed{P(X=2)=0,031}$ و $\boxed{P(X=3)=0,002}$

③ عين قـانون إحتمال X.

④ أحسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير X

III) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع
❖ A_n الحـادثة : " ظهور الوجه في الرمية n " و p_n احتمـالها
❖ $\overline{A_n}$ " الحادثة العكسية للحادثة A_n"

① عبر بدلالة p_n عن احتمالات الحوادث التالية : $\boxed{"(A_n \cap A_{n+1})"}$ و $\boxed{"(\overline{A_n} \cap A_{n+1})"}$.

② استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\boxed{P_{n+1} = 0,05p_n + 0,05}$

VI) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\boxed{U_n = p_n - \dfrac{1}{19}}$

❶ بين أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

❷ استتج من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، U_n ثم p_n بدلالة n

❸ أحسب النهاية لـ p_n لما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين الأول:

① إثبات أن $U_nn+2+U_n=2U_{n+1}$

لدينا : $U_n=U_0+nr$ و $U_{n+1}=U_0+(n+1)r$

و $U_{n+2}=U_0+(n+2)r$

بالتعويض :

$$\begin{aligned} U_{n+2}+U_n &= U_0+(n+2)r+U_0+nr \\ &= 2U_0+(n+n+2)r \\ &= 2U_0+2(n+1)r \\ &= 2U_{n+1} \end{aligned}$$

② إثبات أن $V_nn+2\times V_n=\left(V_{n+1}\right)^2$

لدينا : $V_n=V_0\times q^n$ و $V_{n+1}=V_0\times q^{n+1}$

و $V_{n+2}=V_0\times q^{n+2}$

بالتعويض :

$$\begin{aligned} V_{n+2}\times V_n &= V_0\times q^{n+2}\times V_0\times q^n \\ &= V_0\times q^{n+2}\times V_0\times q^n \\ &= \left(V_0\right)^2\times q^{n+n+2} \\ &= \left(V_{n+1}\right)^2 \end{aligned}$$

③ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

من أجل $-1\prec q\prec 1$ نميز حالتين :

❶ $\underline{0\prec q\prec 1}$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n=\lim_{n\to+\infty} V_0\times q^n=\lim_{n\to+\infty} V_0\times e^{n\ln q}=0$$

❷ $\underline{-1\prec q\prec 0}$

نضع $q=-1\times p$ حيث $0\prec p\prec 1$ حسب الحالة ❶ نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$

④ اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية

$$W_{n+1}=e^{U_{n+1}}=e^{U_n+r}=e^{U_n}\times e^r$$

ومنه : (W_n) متتالية هندسية أساسها $q'=e^r$ وحدها الأول $W_0=e^{U_0}$

⑤ اثبات أن المتتالية (t_n) حسابية

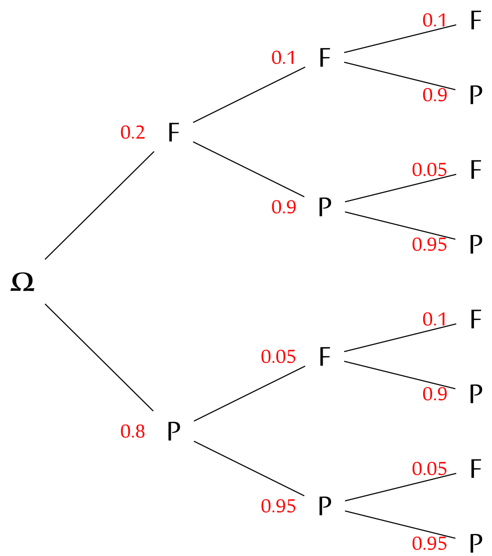
$$t_{n+1}=\ln(V_{n+1})=\ln(V_n\times q)=\ln(V_n)+\ln(q)$$

ومنه : $t_{n+1}=t_n+\ln(q)$

إذن : (t_n) هي متتالية حسابية أساسها $\ln(q)$ و حدها الأول $t_0=\ln(V_0)$

التمرين الثاني:

① شجرة الاحتمال



(1.5 pt)

② قانون احتمال التجربة

x_i	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
$P(x_i)$	0.722	0.038	0.036	0.004	0.171	0.009	0.018	0.002

③ قيم المتغير X $X = \{0; 1; 2; 3\}$

④ اثبات أن $P(x = 2) = 0.031$ و $P(x = 3) = 0.002$

لدينا : $P(x = 2) = P(\{FFP, FPF, PFF\}) = 0,018 + 0,009 + 0,004 = 0,031$ و $P(x = 3) = P(\{FFF\}) = 0,002$ (0.5 pt)

⑤ قانون احتمال المتغير X

$X = x_i$	3	2	1	0
$P(X = x_i)$	0,002	0,031	0,245	0,722

⑥ حساب الأمل الرياضياتي والتباين

$$E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = 0,245 + 0,062 + 0,006 = 0,313$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0,245 + 0,124 + 0,018 - 0,097 = 0,290$$

⑦ التعبير عن $A_n \cap A_{n+1}$ و $\overline{A_n} \cap A_{n+1}$ بدلالة p_n

✍ الحادثة $A_n \cap A_{n+1}$ معناه ظهور الوجه في الرمية n و في الرمية $n+1$ وبما أن احتمال ظهور الوجه في الرمية n هو p_n فإن احتمال ظهوره في الرمية الموالية $(n+1)$ هو $0,1$ إذن

$$\boxed{p\left(A_n \cap A_{n+1}\right) = 0,1 \times p_n}$$

✍ الحادثة $\overline{A_n} \cap A_{n+1}$ معناه ظهور الظهر في الرمية n والوجه في الرمية $n+1$ إذن

$$\boxed{p\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = (1 - p_n) \times 0,05 = 0,05 - 0,05P_n}$$

⑧ اثبات أن $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$

لدينا : p_{n+1} هي احتمال الحادثة A_{n+1} أي : $A_{n+1} = \{FF, PF\}$ ومنه $p_{n+1} = P(\{FF, PF\}) = 0,1p_n + 0,05 - 0,05p_n$

وعليه : $\boxed{p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05}$

⑨ اثبات أن المتتالية (U_n) هندسية

$$U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19}$$
$$= 0,05p_n + \frac{19 \times 0,05 - 1}{19}$$
$$= 0,05p_n - \frac{0,05}{19} = 0,05\left(p_n - \frac{1}{19}\right)$$
$$= 0,05U_n$$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 0.05}$ وحدها الأول : $\boxed{U_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{2,8}{19}}$

⑩ تعيين عبارة U_n و p_n بدلالة n

لدينا : $U_n = U_1 \times q^{n-1} = \frac{2,8}{19} \times \frac{1}{19^{n-1}} = \frac{2,8}{19^n}$

لدينا : $U_n = p_n - \frac{1}{19}$ ومنه $p_n = U_n + \frac{1}{19}$

ومنه : $p_n = \frac{2,8}{19^n} + \frac{1}{19}$ إذن : $\boxed{p_n = \frac{2,8 + 19^{n-1}}{19^n}}$

⑪ حساب نهاية p_n

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2,8}{19^n} + \frac{1}{19}\right) = \frac{1}{19}$$