تمارين في النهايات و الإستمرارية

1

أحسب النهايات التّالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{2}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\cos x-1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-x$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}$ ،

$$\lim_{x\overset{>}{\to}2}\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$$

2

الدالة f المعرّفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & ;x<1\\ \sqrt{x^2+x+2}-x & ;x\geq1\end{cases}$$

1/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ أثبت أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-\infty,1[$ ، لدينا : $\frac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$ ؛ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3/ أثبت أنّ f مستمرة على $\mathbb{R}$.

4/ أ) أثبت أنّ المعادلة : $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α حيث : $\alpha\in\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

ب) استنتج أنّ : $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$.

5/ g الدالة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ بـ :

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & ;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

◄ أثبت أنّ g مستمرة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3

f دالة مستمرة على المجال $[1;2]$ و من أجل كلّ x من المجال $[1;2]$ ، $f(x)\in[3;4]$.

1/ أثبت أنّ المعادلة : $\frac{f(x)}{x}=2$ تقبل على الأقل حلا α حيث $\alpha\in[1;2]$.

2/ نفرض أنّ f قابلة للإشتقاق على المجال $[1;2]$ و من أجل كلّ x من $[1;2]$ ؛ $f'(x)>2$.

◄ أثبت أنّ α وحيد .

4

f و g دالتان مستمرتان على $\mathbb{R}$ حيث

◄ $f\circ g=g\circ f$.

◄ المعادلة $f(x)=g(x)$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

◄ أثبت أنّ المعادلة : $f\circ f(x)=g\circ g(x)$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

5

f دالة فردية على معرّفة على المجال $[-1;1]$: حيث من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم : $f(x)=\frac{1}{n+1}$ إذا كان $x\in\left]\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right[$ ؛ و $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ و $f(0)=0$.

◄ أدرس إستمرارية f عند الصفر .(إرشاد : يمكن الإستعانة بدالة الجزء الصحيح).

6

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=3x+\cos x$.

1/ أثبت أنّ من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا ؛ $-1+3x\leq f(x)\leq 1+3x$ ؛ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2/ أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-\frac{\pi}{6}<\alpha<0$.

7

f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث من أل كل $x\in[0;1]$ ؛ $f(x)\in[0;2]$ ، نضع

: $g_n(x) = f(x) - 2x^n$ من أجل كلّ x من المجال $[0;1]$ و من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^\star$.

1/ أثبت أنّ يوجد عدد a_n من المجال $[0;1]$ بحيث : $g_n(a_n) = 0$.

2/ أثبت أنّ إذا كانت f متناقصة على المجال $[0;1]$ ، فإنّ g متناقصة تماما على المجال $[0;1]$.

3/ أثبت أنّ المتتاليّة (a_n) متزايدة على $\mathbb{N}^\star$.

8

f_n الدالة المعرفة بالدستور : $f_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ ، مع $x \in [0;1]$ و n عدد طبيعي أكبر أو تساوي 2

1/ شكّل جدول تغيرات f_n على المجال $[0;1]$.

2/ أثبت أنّ المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n $(n \geq 2)$.

3/ أثبت أنّ المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متناقصة تماما .

4/ أثبت أنّ : $\alpha_n = \dfrac{1 + (\alpha_n)^{n+1}}{2}$.

9

g الدالة المعرفة على المجموعة D حيث $D =]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1$.

1/ شكّل جدول تغيرّات الدالّة g ؛ ثمّ عين إشارة $g(x)$ على D .

2/ f الدالّة المعرّفة على D بالعبارة : $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$.

أ) شكّل جدول تغيرّات الدالّة f .

ب) أثبت أنّ المستقيم الذي معادلة له : $y = -2x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

3/ أ) أثبت أنّ المعادلة : $f(x) = \dfrac{1}{n}$ تقبل من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^\star - \{1\}$ حلا وحيدا u_n من المجموعة D .

ب) أثبت أنّ المتتاليّة (u_n) متناقصة .

10

f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}} + \dfrac{1}{2}$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1/ أ) أدرس إتجاه تغيّر الدّالة f .

ب) بيّن أن النقطة $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

2/ أ) بيّن أنّ المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in \left]\dfrac{3}{4};1\right[$.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y = x$.

ج) أنشئ (C_f) و (Δ) في نفس المعلم .

3/ h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ بـ :

$$h(x) = \begin{cases} 2f\left(\dfrac{1}{2}\tan(\pi x)\right) & ; x \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[\\ h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0 & \\ h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 & \end{cases}.$$

◄ أثبت ان الدالّة h مستمرّة على المجال $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.