

# سلسلة تمارين رقم : 01

## حول النهايات

تمارين : 01

أحسب النهايات عند أطراف  $D_f$  المفتوحة في كل حالة وفسر النتائج هندسيا إن أمكن :

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 1 \quad D = R \quad (2) \quad f(x) = 3x^2 + x - 2 \quad D = R \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-4} \quad D = R - \{4\} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x-2} \quad D = R - \{2\} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{3x^2+2}{1-2x}; D_f = R - \{\frac{1}{2}\} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{-x^2+4}{x+3}; D_f = R - \{-3\} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x+1}; D_f = R - \{-1\} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}; D_f = R - \{2; -2\} \quad (8)$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{(x-2)^2}; D_f = R - \{2\} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{-x}{(x-3)^2} - 1; D_f = R - \{3\} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \sqrt{x}; D_f = ]1; +\infty[ \quad (11)$$

$$f(x) = (x^2+1)\sqrt{x} + \frac{1}{x}; D_f = ]0; +\infty[ \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{x}{x-2}\sqrt{x}; D_f = ]2; +\infty[ \quad (13)$$

تمارين : 02

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{-x-5}{x^2+8x+15} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{x^2+2x+1} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5-2x} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x-x-1} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x-x}) \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x-1} - 1 \quad (16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x \quad (18) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} + 4x \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1-x}} \quad (20) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1+x}} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} \quad (22) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+1} - 2x \quad (24) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x \quad (23)$$

تمارين : 03

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \sin x}{3x}\right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x+2}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{3x+2}\right) \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x} + \pi\right) \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \quad (7)$$

تمارين : 04

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1989} - 1}{x - 1} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x - 3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{x+1} \quad (4)$$

تمارين : 05

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]2; +\infty[$ 

$$\frac{1}{x-2} \leq \frac{2-\sin x}{x-2} \leq \frac{3}{x-2}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-\sin x}{x-2}\right) \quad \text{إستنتج}$$

تمارين : 06

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $2 \leq 5 - 3\sin x \leq 8$ 

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x|+2}{5-3\sin x}\right) \quad \text{إستنتج}$$

تمارين : 07

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$-5 \leq 2\sin x + 3\cos x \leq 5$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2\sin x + 3\cos x}{x^2+1}\right) \quad \text{إستنتج}$$

تمارين : 08

تعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]2; +\infty[ \cup ]-\infty; 2]$  :-

$$f(x) = (x-2)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{x-2}\right)$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد  $x$  من  $]2; +\infty[ \cup ]-\infty; 2]$  :

$$|f(x)| \leq (x-2)^2$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad \text{إستنتج أن}$$

تمارين : 09

 $f$  دالة معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  :-  $|f(x)+2| \leq \frac{4}{x^2}$ 

$$- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{أحسب}$$

## تمرين 10 :

- باستعمال جدول التغيرات :
- (1) عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم حدد النهايات عند حدود  $D_f$  :
- (2) حدد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة  $f$  .
- (3) في معلم متعامد و متجانس أرسم التمثيل البياني  $(C_f)$  للدالة  $f$  .

## تمرين 14 :

- أ) أثبت أن المستقيم  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$  و أدرس الوضع النسبي لـ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  :
- (1)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{(x-2)^2}$  و  $y = x + 1$  :  $(\Delta)$  .
- (2)  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$  و  $y = x$  :  $(\Delta)$  .
- ب) إستنتج المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$  لـ  $(C_f)$  بجوار  $(+\infty)$  و  $(-\infty)$  و أدرس الوضع النسبي لـ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  :

$$(1) f(x) = 2x - 1 - \frac{x}{x^2 + 1} \quad (2) f(x) = x + \frac{5}{x+2}$$

$$(3) f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

- ج) أدرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و منحنى الدالة مربع حيث :
- د) فسر النتائج الآتية بيانيا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \frac{1}{x}) = 0(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = 0(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{x}) = 0(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 2(5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = -1(6)$$

وكم لله من لطفٍ خفيٍّ      يَدِقُّ خَفَاهُ عَنْ فَهْمِ الذِّكْرِ

وكم يُسِرُّ أُنَى مِنْ بَعْدِ عُسْرِ      فَفَرَّجَ كُرْبَةَ الْقَلْبِ الشَّجِيِّ

وكم أمرٍ تساء به صباحاً      وَتَأْتِيكَ الْمَسْرَّةُ بِالْعَشِيِّ

إذا ضاقت بك الأحوال يوماً      فَتَنقُ بِالوَاحِدِ الْفَرْدِ الْعَلِيِّ

وَلَا تَجْزَعُ إِذَا مَا نَابَ حَطْبٌ      فَمِ لِه مِنْ لُطْفِ خَفِيِّ

- (1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

- (2) إستنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \right)$  ثم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{\sqrt{x(x+1)}} \right)$

## تمرين 11 :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]2; +\infty[$  بـ :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x-2}$$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$

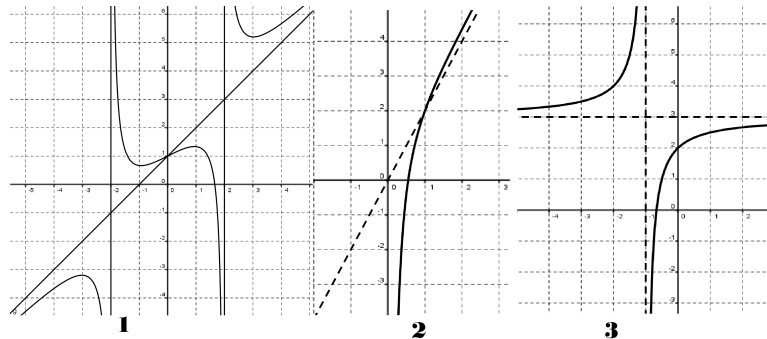
- (1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .
- (2) أَعْ عِين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  بحيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]2; +\infty[$  :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

- ب) إستنتج أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = -x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .
- (3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسياً .

## تمرين 12 :

في كل حالة من الحالات الآتية عين  $D_f$  مجموعة التعريف و النهايات عند أطراف  $D_f$  و شكل جدول تغيرات كل دالة :



## تمرين 13 :

لتكن الدالة  $f$  المعرفة بجدول تغيراتها التالي :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$-\infty$	$1$

أ. مزروع عبد الحليم