السنة الثالثة ثانوي
الشعب العلمية

سلسلة تمارين القسمة في Z

تمرين 1 ★☆☆

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x-21y=78$

1. بين أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.
2. أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$ ، إستنتج حلول المعادلة (E) .
3. أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
4. عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $5^x+5^y \equiv 3[7]$

تمرين 2 ★☆☆

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $4x-9y=319 \quad .....(I)$

1. أ) تأكد أن الثنائية $(82,1)$ حل للمعادلة (I) .
   ب) حل المعادلة (I) .
2. عين الثنائيات (a,b) الصحيحة حلول المعادلة :
$4a^2-9b^2=319 \quad .....(II)$
3. إستنتج الثنائيات (x_0,y_0) حلول المعادلة (I)بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين .

تمرين 3 ★☆☆

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1. a و b عددان طبيعيان حيث : $a=n-2$ و $b=2n+3$
   أ) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟
   ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n+5$ مضاعف للعدد 7 .
   ج) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$
2. نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :
$q=n^2-7n+10$ و $p=2n^2-7n-15$
   أ) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.
   ب) عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p;q)$

تمرين 4 ★☆☆

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي .

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$

1 أ) أنشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم اوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب) أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12 ، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري .

2 أ) عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب) عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق :

$$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

تمرين 5 ★★☆

1 حل المعادلة التفاضلية : $y'=(ln2)\,y$

2 نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0)=1$ ، عين عبارة $f(x)$

3 n عدد طبيعي .

أ) أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .

ب) إستنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$.

4 أ) أحسب، بدلالة n، المجموع S_n

حيث $S_n=f(0)+(1)+...+f(n)$

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7 .

تمرين 6 ★★☆

1 نعتبر المعادلة : $(1)\quad 7x+65y=2009$ ، حيث x و y عددان صحيحان.

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .

ب) حل المعادلة (1).

2 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 .

3 عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 .

4 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$

أ) تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب) حل المعادلة $(2)\quad (7u_1)x+(u_2)y=126567$ ذات المجهول (x,y) ، حيث x و y عددان صحيحان .

ج) عين الثنائية (x_0,y_0) حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$.

تمرين 7 ★★☆

1 برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13 .

2 إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13

3 عين حسب قيم n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، و إستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 .

4 نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$.

أ) من أجل $p = 3n$ ، عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

ب) برهن أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13.

ج) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$

5 يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :

$$a = \overline{1001001000} \text{ و } b = \overline{1000100010000}$$

أ) تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.

ب) إستنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 .

تمرين 8 ★☆☆

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كمايلي : $n = \overline{11\alpha00}$ حيث α عدد طبيعي .

1 عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2 عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.
إستنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3 نأخذ $\alpha = 4$ أكتب العدد n في النظام العشري.

تمرين 9 ★☆☆

1 عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13 .

2 تحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.

3 عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

تمرين 10 ★★☆

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} m = PPCM(U_3, U_5) \\ d = PGCD(U_3, U_5) \end{cases}$$

1 عين الحدين U_3 و U_5 ثم إستنتج U_0 .

2 أكتب U_n بدلالة n ، ثم بين أن: 2010 حد من حدود (U_n) وعين رتبته.

3 عين الحد الذي إبتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080.

4 n عدد طبيعي غير معدوم

أ) أحسب بدلالة n المجموع S حيث :
$S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{2n}$

ب) إستنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث :
$S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + ... + U_{2n}$
و $S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + ... + U_{2n-1}$

تمرين 11 ☆☆★

1 نعتبر المعادلة (E) $13x-7y=-1$ حيث x و y عددان صحيحان .
حل المعادلة (E).

2 عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$

3 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13 .

4 ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 ، كمايلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$ حيث : α و β عددان طبيعيان؛ $a\neq 0$.
عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 .

تمرين 12 ☆☆★

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$

1 تحقق أن : $4\equiv -3[7]$ ثم بين أن : $A_3\equiv 6[7]$.

2 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7 .

3 بين أنه إذا كان n فرديا فإن : A_n+1 يقبل القسمة على 7 و إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

4 ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

تمرين 13 ☆★★

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1 المعادلة $21x+14y=40$ لاتقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

2 في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421}+\overline{1562}=\overline{5413}$.

3 باقي القسمة الإقليدية للعدد : $1+3+3^2+\ldots+3^{2011}$ على 7 هو 6 .

تمرين 14 ☆★★

1 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية :
$2011x-1432y=31 \quad (1)$.

أ) أثبت أن العدد 2011 أولي .

ب) بإستعمال خوارزمية إقليدس، عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1)ثم حل المعادلة (1)

2 أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n،باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون :
$2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$

3 N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث :

α ، β ، γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و (β,γ) حل للمعادلة (1) .

عين α ، β و γ ، ثم أكتب N في النظام العشري .

تمرين 15 ★★☆

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$

1 أ) أحسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7 .

ب) خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث : $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$.

2 أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ثم إستنتج أن: $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ،يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أحسب بدلالة n كلا من u_n و s_n حيث: $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

تمرين 16 ★★☆

1 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11.

2 ماهو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟.

3 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11.

4 عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11.

تمرين 17 ★★★

نسمي (s) الجملة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح .

1 بين أن العدد 153 حل للجملة (s).

2 إذا كان x_0 حلا لـ(s) ، بين أن : (x حل لـ (s)) يكافئ

$$\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$$

3 حل الجملة (s).

4 يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ،فإذا إستعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب ،وإذا إستعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب .

إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا ،ما عددهذه الكتب ؟

تمرين 18 ★★☆

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $11x + 7y = 1$.

1 أ) عين $(x_0; y_0)$ ، حل المعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = -1$.

ب) إستنتج حلول المعادلة (E).

2 a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق : $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$

أ) بين ان $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) .

ب) ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟.

3 n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 و باقي قسمته على 7 هو 2 .
عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

تمرين 19 ★★★

1 n عدد طبيعي ، نعتبر العددين الصحيحين α و β ، حيث :
$\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.

أ) بين أن : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$.

ب) ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha, \beta)$ ؟

ج) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون $PGCD(\alpha, \beta) = 5$.

2 أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية :
$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}.$$

تمرين 20 ★★★

1 أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n + 27 \equiv 0[n+1]$.

ب) عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية ،حيث:
$(b-a)(a+b) = 24$.

ج) إستنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2 α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على شكل $\alpha = \overline{10141}$ و $\beta = \overline{3403}$

أ) أكتب العددين α و β في النظام العشري .

ب) عين الثنائية $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث :
$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}.$$

3 أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 ، ثم إستنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478 .

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية :
$2013x - 1434y = 27$.

تمرين 21 ★★☆

1 نعتبر المعادلة (E) : $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) أحسب $PGCD(2013; 1962)$.

ب) إستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ج) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$.

د) إستنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).

2 نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E)

أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث :

$PGCD(a;b)=18$ و $671a-654b=18$

تمرين 22

n و p عددان طبيعيان.

1 أدرس،حسب قيم n ،بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n .

2 نضع: $C_n=16n+9$ و $D_p=5^p$

أ) بين أنه إذا كان $p=4k+2$ حيث k عدد طبيعي ،فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n=D_p$.

ب) عين n من أجل $p=6$.

3 f هي الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=5^{(4x+2)}-9$

أدرس تغيرات الدالة f ، ثم إستنتج إشارة $f(x)$.

4 (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=5^4\left(u_n+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}$$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$u_n=\dfrac{5^{(4n+2)}-9}{16}$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن u_n عدد طبيعي .

5 إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

تمرين 23

1 أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n ،باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}]$ على 7.

2 أ) بين أن 89 عدد أولي.

ب) عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832 .

ج) بين أن العددين 981 و977 أوليان فيما بينهما.

3 x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2 .

عين x و y علما أن: $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$.

4 a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .

أ) بإستعمال مبرهنة بيزو ،برهن أن a أولي مع $b\times c$.

ب) بإستعمال الإستدلال بالتراجع ،أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $PGCD(a;b^n)=1$.

ج) إستنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

تمرين 24

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة

a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة و أصغر من أو تساوي 9 .

$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري

من أجل كل الأعداد a، b، c و d : يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان :

1 العدد $(a-b+c-d)$ يقبل القسمة على 11.

2 العدد $(a+b+c+d)$ يقبل القسمة على 11.

3 العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري ، يقبل القسمة على 11 .

تمرين 25 ★★★

1 أ) عين ،حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 .

ب) إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13

2 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n
$(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون :
$(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$

تمرين 26 ★★☆

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $6x-7y=19$ حيث x و y عددان صحيحان.

1 جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0=y_0$، ثم حل المعادلة (E).

2 إستنتج قيم العدد الصحيح λ و التي تحقق: $\begin{cases}\lambda\equiv 24[7]\\ \lambda\equiv 5[6]\end{cases}$، ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42.

3 عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x+y-1|\leq 13$.

4 أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:
$\begin{cases}n-5^n\equiv 2020[7]\\ n\equiv 1437[6]\end{cases}$.

تمرين 27 ★★★

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما ،حدودها موجبة تماما،حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$

1 أحسب u_1 وu_2 ثم إستنتج قيمة الأساس q.

2 نضع: $u_1=e^4$ و $q=e^3$.

أ) عبرعن u_n بدلالة n.

ب) نضع: $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_n)$.
أحسب S_n بدلالة n .

3 من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n=n+3$.

أ) بين أن: $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$.

ب) عين القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n;a_n)$.

ج) عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $PGCD(2S_n;a_n)=7$.

4 أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

5 نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.

عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$.

6 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد،

$(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7.

تمرين 28 ★★★

1 أ) أدرس حسب قيم عدد طبيعي n ،بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و7^n على 11 .

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $1437^{10n+4} + 2 \times 2016^{5n+4}$ مضاعف للعدد 11 .

2 نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x - 3y = 8$ ، حيث x و y عددان طبيعيان .

أ) حل المعادلة (E) .

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E)

-ماهي القيم الممكنة للعدد d؟

-عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

ج) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق :

$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$.

تمرين 29 ★★★

1 نعتبر المعادلة $104x - 20y = 272 \ ...(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ،ثم إستنتج حلول المعادلة (E).

2 λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4،ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان .

عين α و β ،ثم أكتب λ في النظام العشري.

3 تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي،ثم عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $2m - d = 2017$

حيث $m = PPCM(a;b)$, $d = PGCD(a;b)$

تمرين 30 ★★★

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$

1 برهن بالتراجع أن:من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$S_n = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n.

ب) إستنتج أن :من أجل كل عدد طبيعي n :

$18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

3 أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5.

ب) عين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

تمرين 31 ★★★

1 بين أن من اجل كل عدد طبيعي k : $4^{5k} \equiv 1[11]$.

2 إستنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

3 بين ان من أجل كل عدد طبيعي n العدد

$(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ يقبل القسمة على 11.

4 عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد

$(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلا للقسمة على 11 .

تمرين 32 ★★★

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $63x + 5y = 159...(E)$.

1 تحقق أن العددين 5 و63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة(E) تقبل حلولا.

2 برهن أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ثم إستنتج حلول المعادلة (E) .

3 λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 و يكتب $\overline{\beta10\beta0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .

جد العددين الطبيعيين αوβ ثم أكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

4 أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n،باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5 ، حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي.

تمرين 33 ★★★

1 عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليبية للعدد 3^n على 5 .

2 إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.

3 برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد

$(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5 .

4 عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5 .

تمرين 34 ★★★

1 α و β عددان طبيعيان بحيث : $\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$.

-عين العددين α و β ،ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2 عين كل الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة :

$1009x - 2017y = 1$

3 عين الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$.

4 أ) n عدد طبيعي ،أدرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كمايلي :

$$L = \underbrace{\overline{111...1}}_{2018\text{مرة}}$$

-عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

تمرين 35 ★★★

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كمايلي : $u_n = 2(3)^n$.

و (v_n) متتاليةعددية معرفة بحدها الأول $v_0 = 4$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$.

1 نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$.

-أثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ ،يطلب تعيين حدها الأول.

2 أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم إستنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$.

3 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8 .

4 عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد v_n على 8.