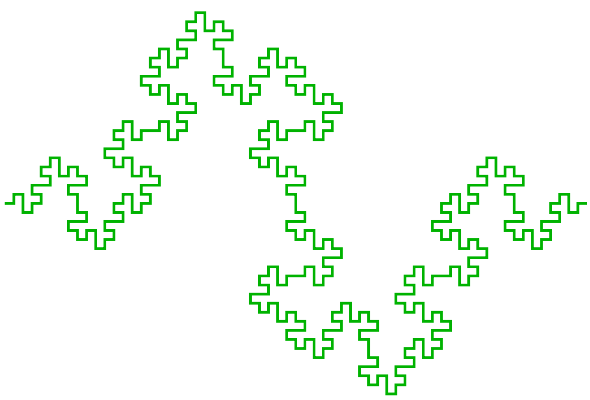
نهائي علوم و رياضيات

Version 1.2

النهايات و الاستمرارية

كمال حامدي



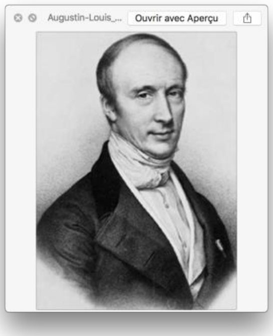
1

1

في هذا المحور

كوشي أوغسطين لويس (Augustin Louis Cauchy): عالم رياضيات و فيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789 م إلى 1857 م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، و بصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الاستمرارية، و طور نظرية الدوال ذات متغيرات عقدية (مركبة) . شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس **(Laplace)** و العالم لاغرانج **(Lagrange)** و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفي مع حفيد تشارلز العاشر، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر.

لقد نشر ما مجموعه 789 عملا ، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات ، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعداد والمرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء.



النهايات (تعاريف)

نهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

تعريف

ℓ عدد حقيقي

القول أنّ للدالة f النهاية ℓ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح شامل للعدد ℓ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

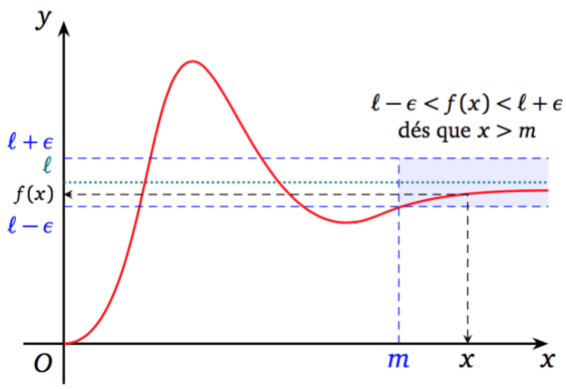
نكتب رمزياً $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى ℓ لمّا يؤول x إلى $+\infty$

ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهاية لدالة f عند $-\infty$

تنبيه

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ معناه: من أجل كل عدد حقيقي اختياري $\epsilon > 0$، يُمكن إيجاد عدد حقيقي m، حيث من أجل كل $x > m$: $f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$

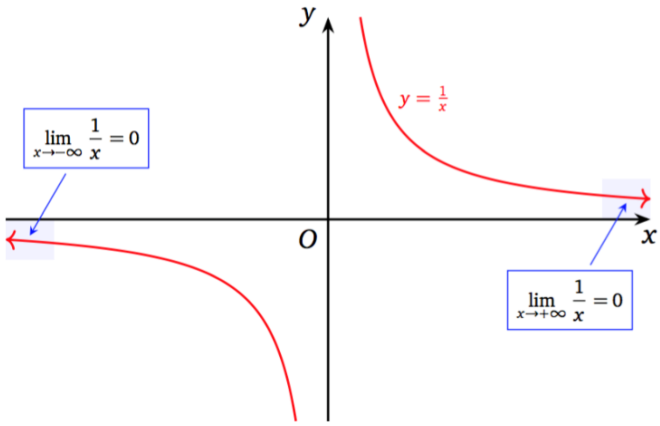


التفسير الهندسي : المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ، نقول أنّ المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ هو مستقيم مقارب (يُوازي محور الفواصل) لمنحني الدالة f عند $+\infty$

أمثلة

- التمثيل البياني و نهايات الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$:



محور الفواصل هو مقارب للمنحنى $\mathcal{H}$ ذو المعادلة $y = \frac{1}{x}$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$

- لدنيا كذلك النهايات التالية :

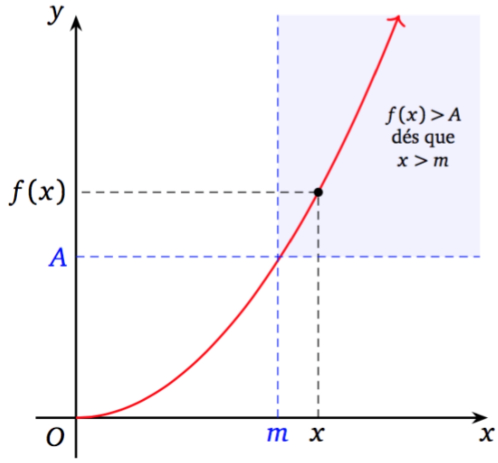
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-a)^p} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-a} = 0$$

نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب رمزيا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لمّا يؤول x إلى $+\infty$



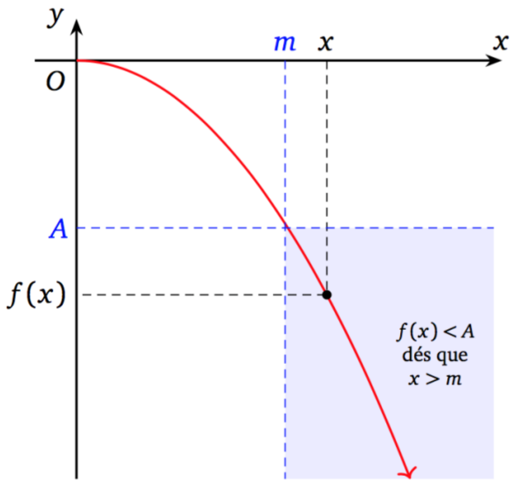
ملاحظة

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ تعني: من أجل كل عدد حقيقي اختياري A، يُمكن إيجاد عدد حقيقي m، حيث من أجل كل $x>m$ ، لدينا : $f(x)>A$

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $-\infty$ عند $+\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $]-\infty;A[$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي

نكتب رمزياً $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لمّا يؤول x إلى $+\infty$

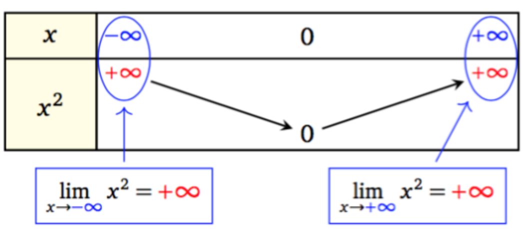


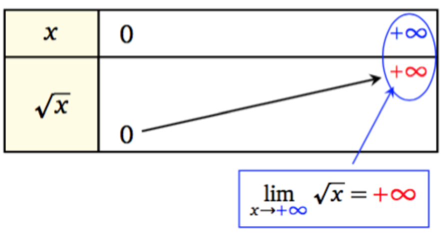
ملاحظة

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ تعني: من أجل كل عدد حقيقي اختياري A، يُمكن إيجاد عدد حقيقي m، حيث من أجل كل $x>m$ ، لدينا : $f(x)<A$

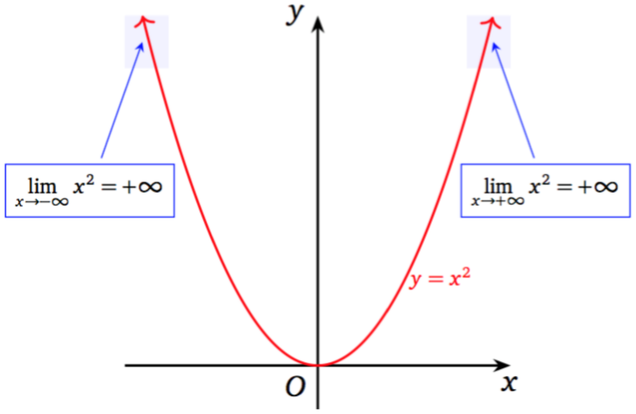
أمثلة

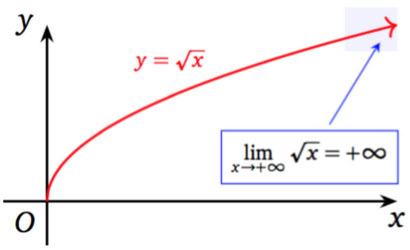
- نهايات الدالتين $x\mapsto x^2$ و $x\mapsto\sqrt{x}$ من جدول التغيّرات





- التمثيل البياني و النهايات لكل من الدالتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \sqrt{x}$





- لدينا كذلك النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

- بصفة عامة، منحنى الدالة $x \mapsto x^p$ هو متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لمعلم (متعامد) إذا كان p عدد زوجي و متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم إذا كان p عدد فردي، و عليه:
  - إذا كان p زوجي فإنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = \lim\limits_{x\to-\infty} x^p = +\infty$
  - و إذا كان p فردي فإنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = -\infty$

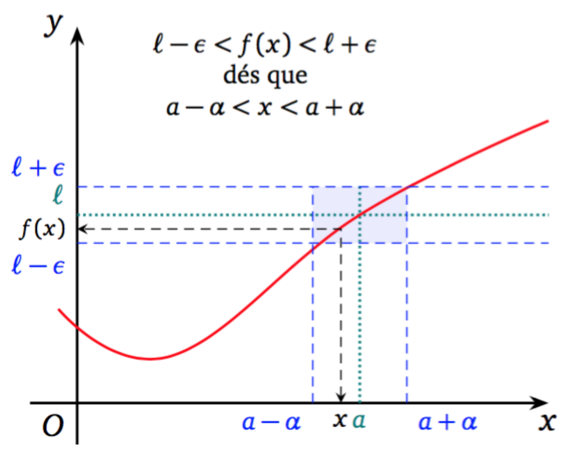
النهاية المنتهية أو غير المنتهية عند عدد حقيقي

تعريف

a و ℓ عددان حقيقيان

القول أنّ للدالة f النهاية ℓ عند a يعني أنّ كل مجال مفتوح شامل للعدد ℓ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

نكتب رمزيا $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ و نقول أنّ $f(x)$ تؤول إلى ℓ لمّا يؤول x إلى a



ملاحظة

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ تعني:
من أجل كل عدد حقيقي اختياري $\epsilon > 0$، يُمكن إيجاد عدد حقيقي $\alpha > 0$، حيث من أجل كل :
$a - \alpha < x < a + \alpha$
لدينا :
$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$

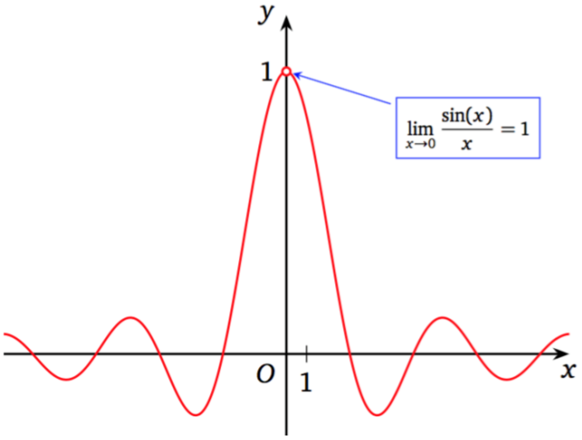
أمثلة

- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

يُشير كل من الجدول و التمثيل البياني للدالة f أنّه كلمّا أخذ المتغير x قيما قريبة جدا من 0 (بقيم موجبة أو بقيم سالبة) فإنّ $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر إلى 1. نكتب عندئذ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



x	$f(x)$
-0.04	0.999733
-0.03	0.999850
-0.02	0.999933
-0.01	0.999983
0	#DIV/0 !
0.01	0.999983
0.02	0.999933
0.03	0.999850
0.04	0.999733

- **النهاية من اليمين و النهاية من اليسار عند عدد**

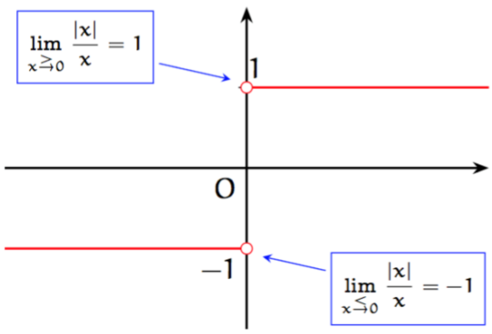
لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x)=\frac{|x|}{x}$$

على المجال $]-\infty;0[$، $f(x)=-1$ و على المجال $]0;+\infty[$، $f(x)=1$

إذن، ليس للدالة f نهاية عند 0

و في هذه الحالة نقول أنّ للدالة f نهاية عند 0 من اليمين تساوي 1 و لديها نهاية عند 0 من اليسار تساوي -1



ملاحظة

a عدد حقيقي ينتمي لمجموعة تعريف دالة f. إذا كانت f دالة مرجعية (كثير حدود ، دالة ناطقة، دالة جيب، دالة جيب تمام، ...) فإنّ الدالة f تقبل نهاية عند a و :

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

مثلاً : $\lim_{x\to a} x^2=a^2$ ، $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ ، $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$

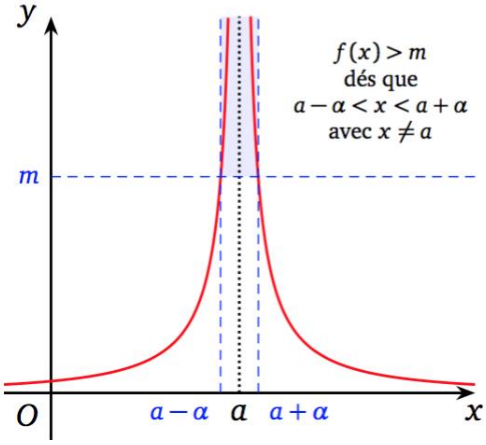
تنبيه

نقول في هذه الحالة أنّ الدالة f **مستمرة** عند العدد a

تعريف

القول أنّ للدالة f النهاية $+\infty$ عند a يعني أنّ كل مجال من الشكل $]m;+\infty[$ (مع m عدد حقيقي) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

نكتب رمزياً $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و نقول أنّ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لمّا يؤول x إلى a



ملاحظة

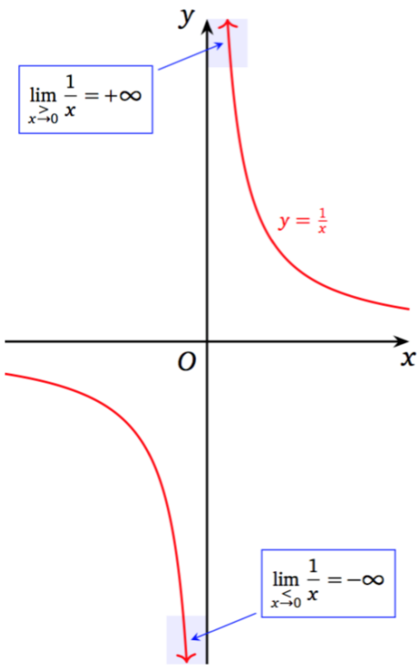
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ تعني: من أجل كل عدد حقيقي اختياري m، يُمكن إيجاد عدد حقيقي $\alpha > 0$، حيث من أجل كل : $a-\alpha < x < a+\alpha$ لدينا : $f(x) > m$

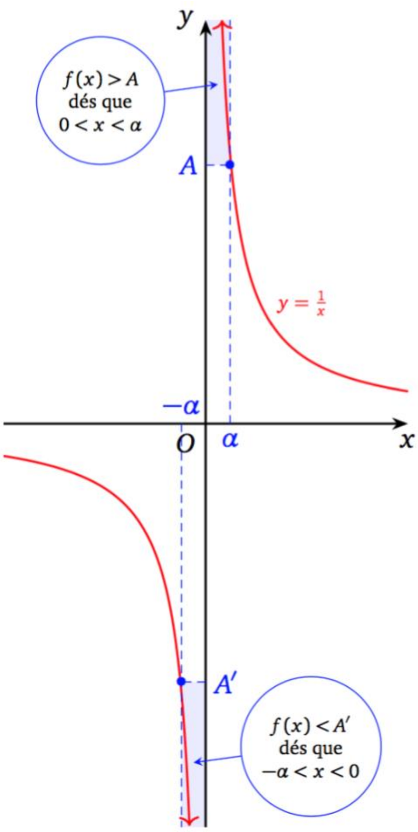
ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهاية $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$: القول أنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ يعني أنّ كل مجال من الشكل $]-\infty;m]$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من a

أمثلة

- التمثيل البياني و نهايات الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ عند 0 من اليمين و من اليسار

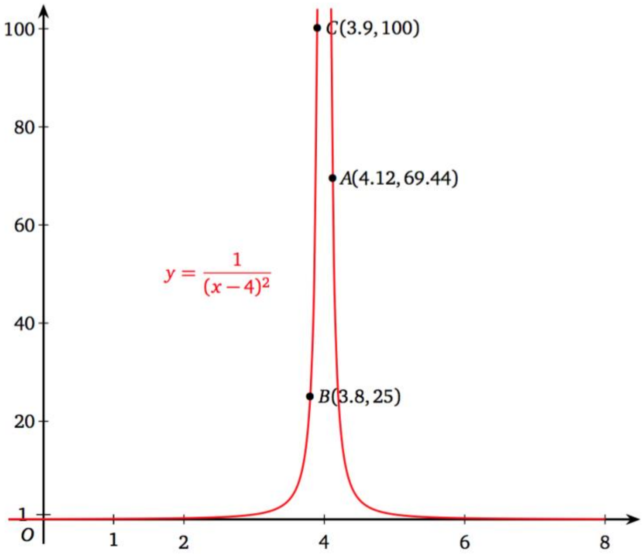




- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{4\}$ بـ

$$f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}$$

العدد 4 قيمة ممنوعة للدالة f أي لا يُمكن حساب $f(4)$ لكن إذا أردنا دراسة سلوك الدالة f من أجل قيم x القريبة من 4 ، باستعمال مجدول أو راسم للبيانات، فإنّه يمكن أن نُعطي التخمين التالي:
يُمكن جعل المقدار $f(x)$ أكبر ما يمكن كما نُريد باختيار x قريب من 4 بالقدر الكافي



x	$f(x)$
3.8	25
3.9	100
3.95	400
3.97	1111.11
3.99	10000
3.999	1.00E + 06
4	#DIV/0 !
4.0001	1.00E + 08
4.02	2500
4.06	277.78
4.12	69.44

الطرائق

تمرين محلول 1 **كيف نحسب النهاية عند $+\infty$ باستعمال التعريف ؟**

نعلم أنّ نهاية الدالة $x\mapsto\frac{4x-5}{2x+3}$: عند $+\infty$ هي 2
جد عدد حقيقي m حيث :
إذا كان « $x>m$ » فإنّ « $1{,}95<f(x)<2{,}05$ »

★★★☆☆

حل

القول أنّ $1{,}95<f(x)<2{,}05$ يعني أنّ

$$1{,}95<\frac{4x-5}{2x+3}<2{,}05$$

بإمكاننا فرض $x>0$ (لأنّ x يؤول إلى $+\infty$)، إذن $2x+3>0$ و عليه بضرب كل طرف في $2x+3$
نحصل على : $1{,}95(2x+3)<4x-5<2{,}05(2x+3)$ أي: $-0{,}1x+5{,}85<-5<0{,}1x+6{,}15$
نستنتج إذن أنّه :
إذا كان: $-0{,}1x<-10{,}85$ و $0{,}1x>-11{,}15$ بمعنى: $x>108{,}5$ و $x>-111{,}5$ أي:

$$\boldsymbol{x>108,5}$$

فإنّ : $1{,}95<f(x)<2{,}05$

النتيجة: يمكن إذن اختيار $m=108{,}5$ (أو أي عدد آخر أكبر من 108,5)

◇

تمرين محلول 2 كيف نحسب النهاية عند $+\infty$ باستعمال التعريف ؟

1. f هي الدالة المعرفة على المجال $]2\,;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$
أثبت باستعمال التعريف أنّ نهاية f عند $+\infty$ هي 0

2. g هي الدالة المعرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ بـ:
$$g(x)=\sqrt{x}$$
أثبت باستعمال التعريف أنّ نهاية g عند $+\infty$ هي $+\infty$

حل

1. يكفي أن نبرهن أنّ كل مجال مفتوح شاملاً العدد 0 يشمل كل القيم $f(x)$

I هو مجال مفتوح يشمل 0، $I=]-\alpha;\alpha[$ مع $\alpha>0$

$x>2$ (لأنّ x يؤول إلى $+\infty$) إذن القول أنّ $f(x)\in I$ يكافئ القول أنّ $\frac{1}{x-2}<\alpha$، بمعنى $x-2>\frac{1}{\alpha}$ أي $x>2+\frac{1}{\alpha}$

إذن من أجل x كبيرا بالقدر الكافي (أكبر من $2+\frac{1}{\alpha}$)، يكون I شاملاً لكل القيم $f(x)$

النتيجة: إذن للدالة f النهاية 0 عند $+\infty$

2. يكفي أن نبرهن أنّ كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$

ليكن A عدد حقيقي

نعلم أنّه إذا كان x عددا حقيقيا موجبا فإنّ: $\sqrt{x}\geq A$ يكافئ $x>A^2$

إذن باختيار x أكبر من A^2 أي كبيرا بالقدر الكافي يكون $\sqrt{x}\geq A$ أي $g(x)\in[A;+\infty[$ بمعنى أنّ المجال $]A;+\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$

النتيجة: إذن للدالة g النهاية $+\infty$ عند $+\infty$

تمرين محلول 3 كيف نحسب النهاية عند عدد باستعمال التعريف ؟

f هي الدالة المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=(x-1)^2+2$$
نُريد دراسة سلوك $f(x)$ لمّا x يؤُول إلى 2

1. ما هو التخمين الذي يُمكن طرحه بالنسبة إلى نهاية الدالة f عند 2 ؟
2. في أيّ مجال يجب اختيار x حتى يكون:
   أ) $f(x)\in[2{,}9;3{,}1]$
   ب) $f(x)\in[2{,}99;3{,}01]$
3. r عدد حقيقي حيث $0<r<1$
   (أ) في أيّ مجال يجب اختيار x حتى يكون $f(x)\in[3-r;3+r]$
   (ب) ماذا تستنتج علما أنّه يُمكن اختيار x صغيرا بالقدر الذي نُريد ؟

حل

1. التخمين: إذا كان x قريب من 2، يكون $f(x)$ قريب من $2 + (2-1)^2$، أي قريب من 3 بمعنى
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

2. أ) من أجل $2{,}9 \leq f(x) \leq 3{,}1$ أي $0{,}9 \leq (x-1)^2 \leq 1{,}1$، يُمكن اختيار x بحيث
$0{,}95 \leq x-1 \leq 1{,}04$ أي $x \in [1{,}95; 2{,}04]$

ب) من أجل $2{,}99 \leq f(x) \leq 3{,}01$ أي $0{,}99 \leq (x-1)^2 \leq 1{,}01$، يُمكن اختيار x بحيث
$0{,}995 \leq x-1 \leq 1{,}00$ أي $x \in [1{,}995; 2{,}004]$

3. أ) من أجل $3-r \leq f(x) \leq 3+r$ أي $1-r \leq (x-1)^2 \leq 1+r$، يُمكن اختيار x بحيث
$\sqrt{1-r} \leq x-1 \leq \sqrt{1+r}$، أي $x \in \left[1+\sqrt{1-r}; 1+\sqrt{1+r}\right]$ ، هذا المجال يشمل 2

ب) بإمكان اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ، كذلك يمكن اختيار $f(x)$ قريبا من 3 بالقدر الذي نريد شريطة أن يكون x قريبا من 2 بالقدر الكافي. و هذا يعني أنّ للدالة f النهاية 3 عند 2

العمليات على النهايات

f و g دالتان لهما نفس مجموعة التعريف D

ملاحظة

في الجداول التالية، النهايات هي عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ أو عند عدد حقيقيا a.
ℓ و ℓ' هما عددان حقيقيان

نهاية مجموع دالتين

إذا كانت نهاية f:	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
و كانت نهاية g:	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإنّ نهاية $f+g$:	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية جداء دالتين

إذا كانت نهاية f:	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
و كانت نهاية g:	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
فإنّ نهاية $f\times g$:	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين

حالات حيث g غير معدومة

إذا كانت نهاية f:	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
و كانت نهاية g:	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
فإنّ نهاية $\frac{f}{g}$:	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

حالات حيث g معدومة

إذا كانت نهاية f:	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	0
و كانت نهاية g:	0^+	0^-	0^+	0^-	0
فإنّ نهاية $\frac{f}{g}$:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

حالات عدم التعيين

- توجد أربعة حالات عدم التعيين و هي من الشكل: «$\frac{\infty}{\infty}$» ، «$\frac{0}{0}$» ، «$\infty - \infty$» ، «$0 \times \infty$»
- تتطلب حالات عدم التعيين دراسة خاصة في كل حالة

النهايات في ما لانهاية

- في مالا نهاية ، نهاية كثير حدود هي نهاية حدّه الأعلى درجة
- في مالا نهاية ، نهاية كسر ناطق هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة

الطرائق

تمرين محلول 4 كيف نحسب نهايات دالة ناطقة عند أطراف مجموعة تعريفها ؟

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{-x^2 + x + 2}$$

ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

حل

الدالة f معرفة على المجموعة $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

ندرس أولا ، حسب قيم x، إشارة $-x^2 + x + 2$:

لكثير الحدود $-x^2 + x + 2$ جذرين هما -1 و 2 و عليه لدينا جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط و في المقام هو $\frac{2x^2}{-x^2} = -2$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$
- كذلك بتطبيق نفس القاعدة نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2 + x + 3) = 4$ و $\lim\limits_{x\to-1}(-x^2 + x + 2) = 0$ و من أجل $-1 < x < 2$ ، $-x^2 + x + 2 > 0$ ،
  إذن $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2 + x + 3) = 4$ و $\lim\limits_{x\to-1}(-x^2 + x + 2) = 0$ و من أجل $x < -1$ ، $-x^2 + x + 2 < 0$ ،
  إذن $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to2}(2x^2 + x + 3) = 13$ و $\lim\limits_{x\to2}(-x^2 + x + 2) = 0$ و من أجل $-1 < x < 2$ ، $-x^2 + x + 2 > 0$ ،
  إذن $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ <}} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to2}(2x^2 + x + 3) = 13$ و $\lim\limits_{x\to-1}(-x^2 + x + 2) = 0$ و من أجل $x > 2$ ، $-x^2 + x + 2 < 0$ ،
  إذن $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ >}} f(x) = -\infty$

◇

تمرين محلول 5 كيف نُزيل حالة عدم التعيين باستعمال المرافق أو العامل المشترك ؟

عيّن نهاية الدالة f عند a في كل حالة من الحالات التالية:

- $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $a = +\infty$
- $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ و $a = +\infty$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ و $a = 3$

★★☆☆☆

حل

- نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = x - \sqrt{x}$ عند $+\infty$

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

من أجل $x > 0$،

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ عند $+\infty$

لدينا حالة عدم التعيين في البسط من الشكل $+\infty - \infty$

من أجل $x > 0$،

$$f(x) = \frac{x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

- نهاية الدالة f المعرفة بـ $(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ عند 3

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

من أجل $x \neq 3$،

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \\ &= \frac{(x+1) - 2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \end{aligned}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+1} + 2 = 4$ فإنّ M

$$\lim_{x\to3} f(x) = \frac{1}{4}$$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة الحصر

مبرهنة

f، g و h ثلاث دوال معرفة على مجال $I =]b; +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي

إذا كان من أجل كل x من I، $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

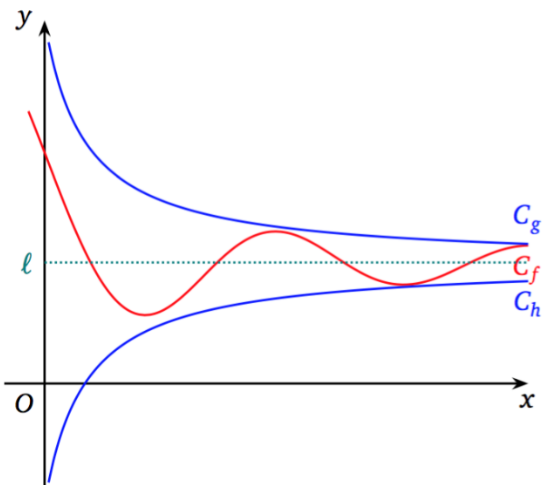
ملاحظة

تمتد المبرهنة في حالة النهاية عند $-\infty$ أو عند عدد

البرهان

من الفرضيات كل مجال مفتوح شاملاً للعدد ℓ يشمل كل القيم $g(x)$ و $h(x)$ إذن يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبيراً بالقدر الكافي (و أكبر من b) لأنّ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$، وعليه حسب تعريف النهاية عند $+\infty$ فإنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$



أمثلة

- نهاية الدالة $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ عند $+\infty$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، $-1 \leq \sin x \leq 1$ إذن بقسمة كل طرف على x نحصل على:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

و بما أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

فإنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x) = 3 + \frac{\sin(5x)}{x}$. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

المقارنة في ما لا نهاية

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان على مجال $I =]b; +\infty[$. **إذا كان** من أجل كل x من I،

- $f(x) \geq g(x)$ **و كان** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f(x) \leq g(x)$ **و كان** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

البرهان

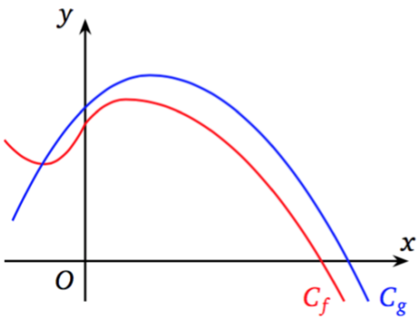
من الفرضيات كل مجال من الشكل $]m, +\infty[$ يشمل كل القيم $g(x)$ فهو يشمل كذلك كل القيم $f(x)$ من أجل x كبيراً بالقدر الكافي (و أكبر من b) لأنّ $g(x) \leq f(x)$, و عليه حسب تعريف النهاية عند $+\infty$ فإنّ :

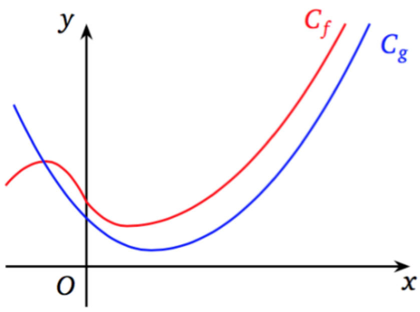
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

بنفس الطريقة نُبرهن على الخاصية الثانية

ملاحظة

تمتد المبرهنة في حالة النهايات عند $-\infty$





مثال

النهاية عند $+\infty$ للدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^2 + 2\cos x$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $-1 \leq \cos x \leq 1$ إذن $-2 \leq 2\cos x \leq 2$ و نستنتج

$x^2 - 2 \leq x^2 + 2\cos x \leq x^2 + 2$ أي

$$f(x) \geq x^2 - 2$$

و منه بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 2) = +\infty$ فإنّ حسب مبرهنة المقارنة في ما لانهاية فإنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2\cos x) = +\infty$$

الطرائق

تمرين محلول 6 كيف نستعمل مبرهنة الحصر لحساب نهاية ؟

f هي دالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$،

$$\frac{2x - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$$

2. استنتج نهاية f عند $+\infty$

الحل

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $-1 \leq \sin x \leq 1$

بإضافة $2x$ لكل طرف نحصل على $2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$،

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x-1}$$

2. بما أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

فإنّ، حسب مبرهنة الحصر،

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{x-1} = 2$$

◇

تمرين محلول 7 كيف نحسب نهاية بالمقارنة في ما لانهاية ؟

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،

$$1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$$

2. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \frac{x}{2-\cos x}$$

أدرس نهاية f عند $-\infty$

★☆☆☆☆

حل

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $-1 \leq \cos x \leq 1$

بضرب كل طرف في -1 نحصل على $-1 \leq -\cos x \leq 1$

و بإضافة 2 لكل طرف نستنتج المطلوب الأول و هو : $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

و باستعمال المقلوب نستنتج المطلوب الثاني و هو :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$$

2. لدينا :

$$\frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x \leq 0$،

$$\frac{x}{2-\cos x} \leq \frac{x}{3}$$

و بما أنّ :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3} = -\infty$$

فإنّ :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2-\cos x} = -\infty$$

◇

نهاية دالة مركبة

نهاية مركب دالتين

مبرهنة

a، b و c هي أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. و f، g و h هي ثلاث دوال حيث $f(x)=g(h(x))$

إذا كان $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ و $\lim\limits_{X\to b} g(X)=c$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

البرهان

تقبل دون برهان

مثال: النهاية عند $+\infty$ للدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$h(x)=\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2+1}}$$

لدراسة نهاية الدالة h عند $+\infty$ نكتب $h(x)=g[f(x)]$ مع :

$$g(X)=\sqrt{X} \quad \text{و} \quad X=f(x)=\frac{4x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{X\to 4}\sqrt{X}=2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=4$$

إذن، حسب الخاصية أعلاه، $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2$

ملاحظة

بوضع $X=\frac{4^2+x+1}{x^2+1}$ نقول أنّنا أجرينا تغييراً للمتغيّر

الطرائق

تمرين محلول 8 **كيف نحسب نهاية دالة مركبة ؟**

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-4[\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+4}}$$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

طريقة

لتطبيق المبرهنة على النهاية عند a للدالة المركبة $x\mapsto g(h(x))$، نبحث أولاً عن النهاية b للدالة h عند a، ثمّ نهاية الدالة g عند b

حل

- بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+4}=2$ و $\lim\limits_{X\to 2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{2}$
- بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x+4}=2$ و $\lim\limits_{X\to 2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$ فإنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\sqrt{2}$
- بما أنّ $\lim\limits_{x\to-4^-}\frac{2x-1}{x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to-4^-}(x)=+\infty$
- بما أنّ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=+\infty$

تمرين محلول 9 كيف نحسب نهاية باستعمال تغيير للمتغيّر ؟

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. ما هي نهاية الدالة $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ؟
2. أحسب نهاية f عند $+\infty$

حل

1. من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$، نضع $X = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$ و $\lim\limits_{X\to 0} \sin X = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ فإنّه لا يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$ لأنّنا أمام حال عدم تعيين من الشكل $+\infty \times 0$

2. لإزالة حالة عدم التعيين، يكفي ملاحظة:

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{X}\sin X = \frac{\sin X}{X}$$

يُؤدي هذا التغيير للمتغير للنهاية المعلومة $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = 1$ و عليه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

المستقيم المقارب المائل

تعريف

$\mathcal{C}_f$ هو التمثيل البياني للدالة f في معلم.

القول أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + b$ هو مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$ يعني أنّ :

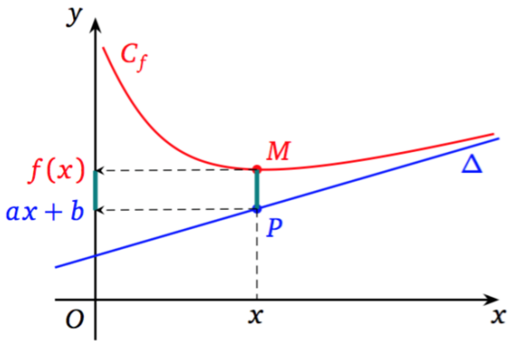
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

تنبيه

نعرف بطريقة مماثلة المستقيم المقارب المائل عند $-\infty$

التفسير البياني

ليكن x ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة f، M نقطة من $\mathcal{C}_f$ و P نقطة من Δ فاصلتاهما x (الشكل) في معلم متعامد المسافة PM هي $|f(x) - (ax+b)|$ و عليه من أجل x بجوار $+\infty$ المسافة PM هي قريبة من الصفر، أي: بجوار $+\infty$ المنحني $\mathcal{C}_f$ و المستقيم Δ هما متقاربان



الطرائق

تمرين محلول 10 كيف نعيّن مستقيما مقاربا لمنحني دالة ؟

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

و $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل للدالة f في معلم

ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. أثبت أنّ المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$

حل

بما أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$$

فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

نُلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (2x+1)) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x^2+1} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ هو مُقارب للمنحني $\mathcal{C}$ عند $+\infty$

◇

تمرين محلول 11 كيف ندرس وضعية منحنى بالنسبة إلى مستقيمه المقارب ؟

أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ للمنحني $\mathcal{C}_f$ الممثل للدالة f المعرفة ب

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}$$

ثمّ حدد وضعية $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى Δ

★☆☆☆☆

حل

$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= \frac{x^2+3x+1}{x+2} - (x+1) \\ &= \frac{-1}{x+2} \end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$$

و منه المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مُقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

لدراسة وضعية المنحنى $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المستقيم Δ ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x+1)$:

إشارة هذا الفرق هي عكس إشارة $x + 2$ و المبيّنة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-(x+1)=\frac{-1}{x+2}$	$+$	$\Vert$	$-$

و عليه : في المجال $]-\infty; 2[$، المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ و:

في المجال $]2; +\infty[$، المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع تحت المستقيم Δ

◇

مفهوم الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال

الاستمرارية : الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال

تعريف

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي a.

- القول أنّ الدالة f **مستمرة عند العدد a** يعني أنّ نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$ أي بمعنى:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
- القول أنّ الدالة f **مستمرة على المجال I** يعني أنّ f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I

أمثلة

1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-4\}$ بـ: $f(x)=\frac{x-4}{x+4}$
f غير مستمرة عند -4 لأنّها غير معرفة عند -4
f مستمرة عند 0 لأنّ: من جهة $f(0)=-1$ و $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$ أي $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=-1$
2. لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة: $g(x)=\sqrt{x-4}$
هل الدالة g مستمرة عند 4 ؟ هل هي مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟
3. نعتبر الدالة h المعرفة بما يلي :
$$h(x)=\begin{cases} 2x-3, & x<1 \\ 0, & x\geq 1 \end{cases}$$
هل الدالة h مستمرة عند 1 ؟ هل هي مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟
4. نعتبر الدالة k المعرفة بما يلي :
$$k(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+10x+25}{x+5}, & x\neq -5 \\ 0, & x=-5 \end{cases}$$
هل الدالة h مستمرة عند -5 ؟ هل هي مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

المعرفة البيانية لدالة مستمرة

بيانيا ، تُعرف دالة مستمرة على مجال I عندما يُمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم

(ملاحظة: هذا ليس دليلا!)

نتائج :استمرارية الدوال المرجعية

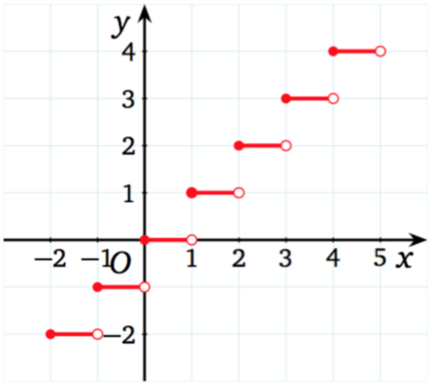
- مجموع و جداء دالتين مستمرتين عند a هي دوال مستمرة عند a
- مقلوب دالة مستمرة عند a و غير معدومة عند a هي دالة مستمرة عند a
- إذا كانت الدالة f مستمرة عند a و كانت الدالة g مستمرة عند $f(a)$ فإنّ الدالة $g\circ f$ مستمرة عند a
- الدوال كثيرات الحدود ، $\sin$ ، $\cos$ و $x\mapsto |x|$ هي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدوال الناطقة والدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها
- يُستنتج من هذا أنّ كل دالة مكتوبة جبرياً على شكل مجموع، جُداء أو مركب دوال مرجعية هي كذلك دالة مستمرة على أي مجال من مجموعة تعريفها

مثال لدالة غير مستمرة : الدالة الجزء الصحيح

تعريف

ليكن x عددا حقيقيا. يوجد عدد صحيح وحيد n، حيث: $n \leq x < n+1$

نعرف إذن على $\mathbb{R}$ الدالة الجزء الصحيح، التي نرمز لها بالرمز E، بـ: $E(x) = n$ أو $[x] = n$



مثلا

$E(2{,}3) = 2$ ، $E(3) = 3$ ، $E(\pi) = 2$ ، $E(-4{,}12) = -5$

التمثيل البياني للدالة الجزء الصحيح

إذا كان n عدد صحيح، فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[n; n+1[$، $E(x) = n$

الدالة E غير مستمرة على $\mathbb{R}$ ، لا تقبل نهاية عند كل عدد صحيح.

أنواع مختلفة لدوال غير مستمرة

هل توجد أنواع مختلفة لدوال غير مستمرة ؟ نعم !

تكون دالة f مستمرة عند عدد a إذا، و فقط إذا كانت لهذه الدالة نهاية من اليمين عند a و لها نهاية من اليسار عند a و هاته النهايتين تساويان $f(a)$

و عليه تكون f غير مستمرة عند a لعدة أسباب:

السبب الأول: للدالة f نهاية من اليمين عند a، نهاية من اليسار عند a، لكن النهايتان غير متساويتين

مثال: الدالة الجزء الصحيح عند 1 مثلاً

السبب الثاني: للدالة f نهاية من اليمين عند a تساوي النهاية من اليسار عند a، لكن الدالة f هي غير معرفة عند a أو تأخذ قيمة تختلف عن النهاية المشتركة. مثال ذلك الدالة $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ من أجل $x \neq 0$، هذه الدالة غير معرفة عند 0 لكن:

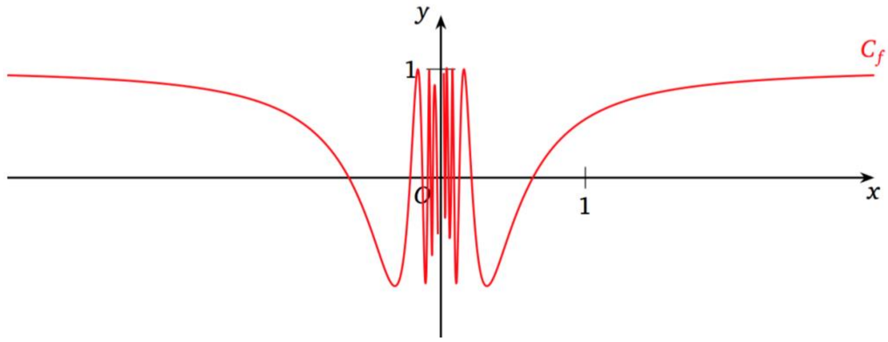
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

يُمكن هنا أن **نُمدد الدالة f بالاستمرارية**، بتعريف الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$$

نحصل إذن على دالة **g مستمرة** على $\mathbb{R}$

السبب الثالث: ليس للدالة f نهاية من اليمين أو من اليسار عند a. مثال ذلك الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ من أجل $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ و المثلة بيانيا بـ:



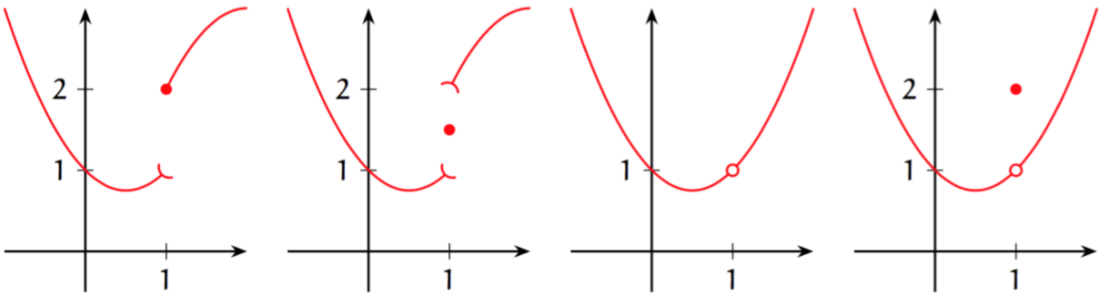
ملاحظة

مثال لدالة معرفة على $\mathbb{R}$ و غير مستمرة عند كل عدد حقيقي (خارج البرنامج !):

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

مثال

الدوال التالية الممثلة بمنحنياتها غير مستمرة عند 1 مع التبرير



$f(1)=2$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=1$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=1$	f غير معرفة عند 1	$f(1)=1.5$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=1$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=2$	$f(1)=2$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=1$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=2$

الطرائق

تمرين محلول 12 كيف ندرس الاستمرارية عند عدد و الاستمرارية على مجال ؟

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[-1;3]$ بما يلي :

$$g(x)=\begin{cases} x^2-2x & : x\in[-1;1] \\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} & : x\in]1;3] \end{cases}$$

1. أدرس استمرارية الدالة g عند 1
2. هل الدالة g مستمرة على المجال $[-1;3]$ ؟ أذكر المجالات أين تكون هذه الدالة مستمرة.
3. أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_g$

الحل

1. لدينا $g(1)=1^2-2\times1=-1$

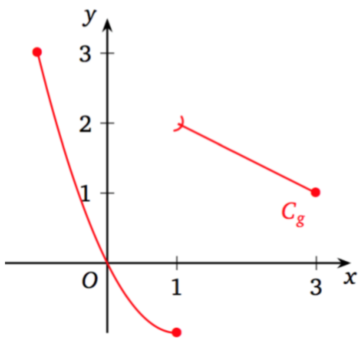
و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}(x^2-2x)=-1$

النهاية عند 1 من اليمين تختلف عن النهاية عند 1 من اليسار ، إذن الدالة g ليست لها نهاية عند 1 و منه الدالة g غير مستمرة عند 1

2. الدالة g ليست مستمرة على المجال $[-3;2]$ لأنها ليست مستمرة عند 1

لكن الدالة g مستمرة على المجال $[-1;1]$ لأنّ $x\mapsto x^2-2x$ دالة كثير حدود. كذلك الدالة g مستمرة على المجال $]1;3]$ لأنّ $x\mapsto -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ دالة كثير حدود

المنحنى :



الدوال المستمرة و حل المعادلات (مبرهنة القيم المتوسطة)

مبرهنة القيم المتوسطة (البينية)

مبرهنة

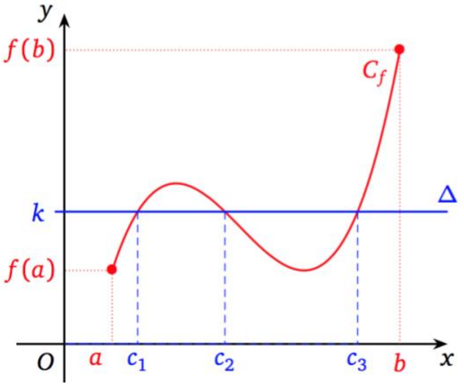
f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a;b]$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b

بحيث $f(c) = k$

البرهان

البرهان يتطلب دراسة المتتاليتان المتجاورتان (درس المتتاليات)



التفسير الهندسي

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم Δ ذو المعادلة $y = k$، يقطع المنحنى $\mathcal{C}$ على الأقل في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b

ملاحظة

لمّا x يتغيّر من a إلى b مع $a < b$ و إذا كانت f مستمرة على المجال $[a,b]$ فإنّ $f(x)$ يأخذ على الأقل كل قيمة بينية محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$

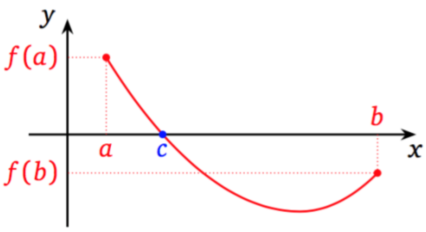
التفسير بمفهوم المعادلات

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a;b]$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلاً c محصور بين a و b

نتيجة

إذا كانت مستمرة على المجال $[a;b]$ و كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنّه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = 0$



الطرائق

تمرين محلول 13 كيف نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة ؟

1. أثبت أنّ المعادلة $x^3 - 4x = 3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[2;3]$
2. لتكن (E) المعادلة $\cos(2x) = 2\sin x - 2$

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

حل

> **طريقة**
> لإثبات وُجود حلول معادلةِ على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة:
> - نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$
> - نتحقق من استمرارية الدالة f على $[a;b]$
> - نتحقق أنّ k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

1. المعادلة $x^3-4x=3$ هي من الشكل $f(x)=3$ مع f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x)=x^3-4x$$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنّها دالة كثير حدود

$f(3)=15$ و $f(2)=0$

بما أنّ 3 محصور بين 0 و 15 فإنّه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يُمكن التأكيد أنّ المعادلة $f(x)=3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[2;3]$

2. المعادلة (E) تكافئ $\cos(2x)-2\sin(x)+2=0$ بمعنى $f(x)=0$ مع f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x)=\cos(2x)-2\sin(x)+2$$

f هي مركب دوال مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي كذلك مستمرة على $\mathbb{R}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ و $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{2}$

بما أنّ $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ (أي 0 محصور بين -1 و $\frac{7}{2}$) فإنّ مبرهنة القيم المتوسطة تسمح لنا بالتأكيد أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a;b]$

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$

البرهان

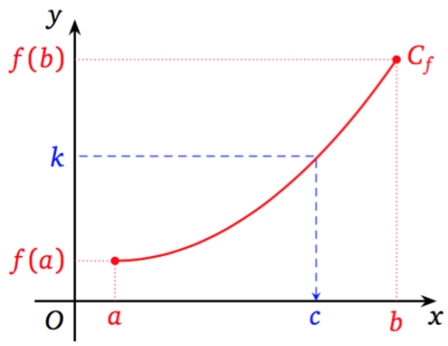
نفرض أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a;b]$

وجود الحل: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$ حيث $f(c)=k$ أي المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$

وحدانية الحل : f متزايدة تماما على المجال $[a;b]$. إذن إذا كان x من المجال $[a,b]$ حيث $x<c$ فإنّ $f(x)<f(c)$ أي $f(x)<k$ و إذا كان x من المجال $[a,b]$ حيث $x>c$ فإنّ $f(x)>f(c)$ أي $f(x)>k$

النتيجة : c هو الحل الحقيقي الوحيد من المجال $[a;b]$ للمعادلة $f(x)=k$

ملاحظة : الأسهم المائلة في جدول تغيّرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر. فمثلا يسمح لنا جدول التغيّرات التالي بتأكيد أنّ المعادلة $f(x)=k$ تقبل c كحلاً وحيدا في المجال $[a;b]$



x	a	c	b
f	$f(a)$ ↗	k	↗ $f(b)$

تمديد مبرهنة القيم المتوسطة إلى حالات أخرى

تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين فقط، محدود أو غير محدود تماما. فيما يلي ثلاثة أمثلة:

x	$-\infty$	c	b
f	ℓ ↘	k ↘	$-\infty$

من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $]+\infty;\ell[$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;b[$

x	a	c	b
f	$f(a)$ ↗	k ↗	ℓ

من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[f(a);\ell[$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b[$

x	a	c	$+\infty$
f	$f(a)$ ↗	k ↗	$+\infty$

من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[f(a);+\infty[$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;+\infty[$

الطرائق

تمرين محلول 14 كيف نُعيّن عدد حلول معادلة و تعيين إشارة دالة من جدول التغيّرات ؟

جدول التغيّرات التالي هو لدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$. عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

ثمّ استنتج إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f	0 ↘	-3 ↗	1 ↘	$-\infty$

حل

- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و $f(-2)=-3$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;-2]$ لدينا $f(x)<0$ و عليه: المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حل في المجال $]-\infty;-2]$
- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2;2]$ و 0 ينتمي إلى المجال $[-2;2]$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-2;2]$
- الدالة f متناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$ و 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty;1]$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $[2;+\infty[$

النتيجة : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β في $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	α	2	β	$+\infty$
f	0 ↘	-3 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	$-\infty$

- إشارة الدالة f : من جدول تغيّرات الدالة f نستنتج إشارتها :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

◇

أعمال موّجهة

إزالة حالات عدم التعيين < باستعمال التحليل

f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2\sqrt{x}$

1. تحقق أنّ لدينا حالة عدم تعيين لّما يؤول x إلى $+\infty$
2. أثبت أنّه من أجل كل $x>0$، $f(x)=x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$
3. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

حل

1. عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x}=+\infty$ إذن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$
2. من أجل $x>0$،

$$f(x)=x-2\sqrt{x}=x\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x}\right)=x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

3. بما أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=1$$

فإنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

إزالة حالات عدم التعيين < باستعمال المرافق

f هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}$$

1. تحقق أنّ لدينا حالة عدم تعيين لّما يؤول x إلى $+\infty$
2. أضرب و أقسم العبارة $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}$ بالعبارة المرفقة $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}$
3. أثبت أنّه من أجل كل $x\geq 1$،

$$f(x)=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

4. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

حل

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2)=+\infty$ و بوضع $X=x^2+2$ يكون $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن حسب نهاية مركب دالتين فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}=+\infty$ كذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)$ و بالتركيب نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$

نحصل إذن على حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$

2. من أجل $x\geq 1$،

$$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}$$

3. من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$:

$$\sqrt{x^2+2}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$$
$$\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

إذن

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$
$$=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

4. بما أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$$

فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$$

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $]-\infty;-1]$ بـ: $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$

إزالة حالات عدم التعيين > بالاختزال

f هي الدالة المعرفة على $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(2x-1)}$$

1. ما هي النهاية عند 2 للدالة $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ ؟ هل يُمكن استنتاج نهاية الدالة f عند 2 ؟
2. أثبت أنّه من أجل كل $x \in \mathcal{D}$،

$$f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$$

3. استنتج نهاية الدالة f عند 2

حل

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 5x + 6) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)(2x-1) = 0$
نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$
2. العدد 2 جذر لـ $x^2 - 5x + 6$ إذن بتحليل $x^2 - 5x + 6$ نحصل على:
$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

و من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathcal{D}$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(2x-1)} = \frac{x-3}{2x-1}$$

3. من النتيجة الأخيرة

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x-1} = -\frac{1}{3}$$

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

إزالة حالات عدم التعيين > باستعمال العدد المشتق

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

1. ما هي النهاية عند 0 لكل من الدالتين $x \mapsto \cos x - 1$ و $x \mapsto x$ ؟
هل يُمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟
2. باستعمال العدد المشتق للدالة $x \mapsto \cos x$ عند 0، أحسب نهاية الدالة f عند 0

حل

1. $\lim\limits_{x\to 1}(\cos x - 1) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$
نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$
2. الدالة $g: x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق عند 0 هو $g'(0) = -\sin(0) = 0$

لدينا:

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

إذن باستعمال تعريف قابلية اشتقاق الدالة $x \mapsto \cos x$ عند 0:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 1$$

تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

السلوك التقاربي < المستقيم المقارب و المنحنى المقارب

المستقيم المقارب

1. $\mathcal{C}_f$ هو المنحنى الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$$

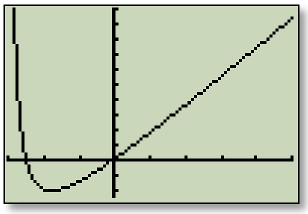
(أ) لماذا يُمكن التأكيد بأنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

(ب) حدد الوضعية النسبية لـ Δ و $\mathcal{C}_f$

(ج) هل المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مستقيما مقاربا عند $-\infty$ ؟

2. $\mathcal{C}_f$ هو المنحنى الممثل للدالة f المعرفة على $]-3, +\infty[$ بما يلي

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x + 3}$$



درجة البسط أكبر بواحدة من درجة المقام، يُمكن إذن توقع وُجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $_f$ عند $+\infty$ و هذا ما يُمكن كذلك تخمينه على شاشة الآلة الحاسبة البيانية في الهامش

(أ) أثبت أنّه يوجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 3$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 3}$$

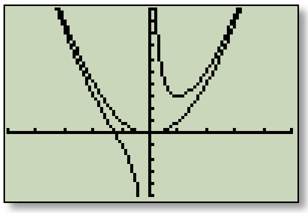
(ب) استنتج أنّ المنحنى $_f$ يقبل مستقيما مقاربا Δ يطلب تعيين معادلة له. أدرس وضعية المنحنى $_f$ بالنسبة إلى Δ

المنحنيات المقاربة

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

و $\mathcal{C}_f$ هو تمثيلها البياني



1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x^2]$

2. ما هو التفسير الهندسي بالنسبة للمنحنى $\mathcal{C}_f$ و القطع المكافئ Γ ذو المعادلة $y = x^2$ بجوار $+\infty$ ؟
(لاحظ المنحنيين على شاشة آلة حاسبة بيانية في الهامش)

3. أدرس حسب قيم x، الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}_f$ و Γ

حل

المستقيم المقارب

1. (أ) بما أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{و} \qquad f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x}$$

فإنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

أي المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مُقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

(ب) إشارة الفرق $f(x) - (x + 2)$ هي إشارة $\frac{1}{x}$ و عليه

- من أجل $x < 0$ فإنّ $\frac{1}{x} < 0$ و منه المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع تحت المستقيم Δ
- من أجل $x > 0$ فإنّ $\frac{1}{x} > 0$ و منه المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ

(جـ) بما أنّ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ فإنّ المنحنى $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) =$ يقبل كذلك $\mathcal{C}_f$ كمستقيم مُقارب عند $-\infty$ Δ

.2 (أ) بإنجاز القسمة الإقليدية لكثير الحدود $2x^2 + 5x$ على $x+3$ أو بتوحيد مقام العبارة $ax + b + \frac{c}{x+3}$ ثمّ المطابقة نجد أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > -3$:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+3}$$

.3 (ب) بما أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+3} = 0 \quad \text{و} \quad f(x) - (2x-1) = \frac{3}{x+3}$$

فإنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-1)] = 0$$

أي المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مُقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

(ب) إشارة الفرق $f(x) - (2x-1)$ هي إشارة $\frac{3}{x+3}$ (أي إشارة $x+3$) و عليه

- من أجل $x < -3$ فإنّ $\frac{3}{x+3}$ و منه المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع تحت المستقيم Δ
- من أجل $x > 3$ فإنّ $\frac{3}{x+3} > 0$ و منه المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ

ملاحظة
إذا أمكن كتابة عبارة الدالة f على الشكل : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ فإنّ المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

المنحنيات المقاربة

.1 من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

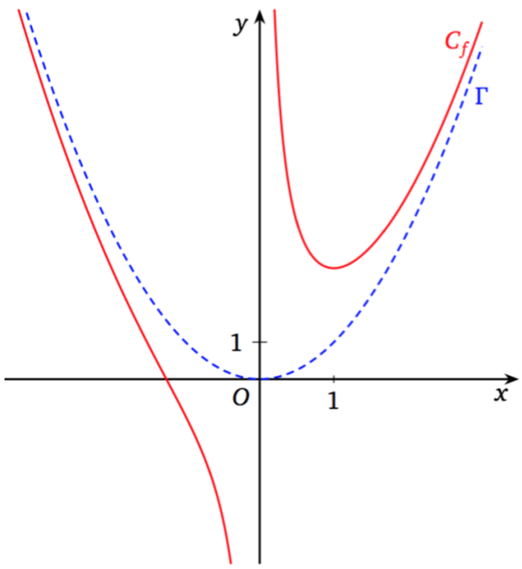
.2 في ما لا نهاية $(+\infty)$، $\frac{2}{x}$ يؤول إلى الصفر و لـ $f(x)$ نفس سلوك x^2 أي لمّا يؤول x إلى $+\infty$ فإنّ المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقترب أكثر فأكثر إلى القطع المكافئ Γ. نقول في هذه الحالة أنّ المنحنى Γ هو **منحنى مقارب** للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$ (و يكون كذلك $\mathcal{C}_f$ مقارب لـ Γ عند $+\infty$)

.3 من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: إشارة الفرق $f(x) - x^2$ هي إشارة $\frac{2}{x}$ و عليه

- من أجل $x < 0$ فإنّ $\frac{2}{x} < 0$ و منه المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع تحت المستقيم Γ
- من أجل $x > 0$ فإنّ $\frac{2}{x} > 0$ و منه المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Γ

ملاحظة
إذا أمكن كتابة عبارة الدالة f على الشكل : $f(x) = g(x) + \varphi(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ فإنّ المنحنى ذو المعادلة $y = g(x)$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

التمثيلان البيانيان $\mathcal{C}_f$ و Γ :



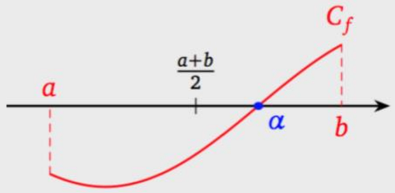
إيجاد حصر لحل معادلة باستعمال طريقة التنصيف

1. **المبدأ** : بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$
فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$

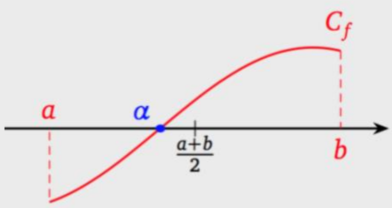
طريقة التنصيف (dichotomie) هي طريقة تسمح تدريجيا بالحصول على حصر أدق للعدد α

ماذا يُمكن القول عن α إذا كان للعددين $f(a)$ و $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

(أ) نفس الإشارة ؟



(ب) إشارتين مختلفتين ؟



2. **دراسة مثال**

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=x^3-3x-1$$

- **الدالة** f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-2;-1]$. احسب $f(-2)$ و $f(-1)$
  استنتج أنّه في المجال $[-2;-1]$، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

للحصول على حصر أدق لـ α نتبع المنهجية التالية:

- **المرحلة** الأولى : $-1{,}5$ هو مركز المجال $[-2;-1]$، احسب $f(-1{,}5)$
  استنتج حصراً أدق للعدد α
- **المرحلة** الثانية : $-1{,}75$ هو مركز المجال $[-2;\ -1{,}5]$، احسب $f(-1{,}75)$
  استنتج حصراً آخر أدق للعدد α

حل

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-2;-1]$. $f(-2)=-3$ و $f(-1)=1$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-2;-1]$ و عليه

$$-2<\alpha<-1$$

- المرحلة **الأولى** : $f(-1{,}5)=0{,}125$

إذن $f(-1{,}5)$ و $f(-2)$ مختلفان في الإشارة و عليه حسب المبدأ فإنّ α ينتمي إلى المجال $[-2;\ -1{,}75]$ أي

$$-2<\alpha<-1{,}75$$

- المرحلة **الثانية** : $f(-1{,}75)=-1{,}109$

$f(-1{,}5)$ و $f(-2)$ من نفس الإشارة. و عليه حسب المبدأ فإنّ α ينتمي إلى المجال $[-1{,}75;\ -1{,}5]$ أي

$$-1{,}75<\alpha<-1{,}5$$

تمرين مع حل نموذجي ‹ دراسة دالة ناطقة

تمرين مع حل نموذجي > دراسة دالة ناطقة

الهدف من هذه المسألة هو دراسة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+13x-10}{x^2-4x+9}$$

ليكن $\mathcal{C}_f$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس من المستوي (الوحدة: 2 cm)

الجزء الأول: دراسة دالة مساعدة

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x)=\frac{4x^2-16x-4}{(x^2-4x+9)^2}$$

1. أدرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$
2. نقبل أنّ جدول تغيّرات الدالة g هو التالي

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
g		↗		↘		↗		↘	

(أ) احسب $g(2)$

(ب) استنتج من الأسئلة السابقة، قيم x التي تحقق $g(x)>-1$. برّر الإجابة

الجزء الثاني: دراسة الدالة f و إنشاء تمثيلها البياني

1. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f(x)=x-2+\frac{-4x+8}{x^2-4x+9}$$

2. (أ) أثبت أنّ الدالة المشتقة f' للدالة f تحقق:

من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=1+g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f

3. أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$
4. (أ) أثبت أنّ $A(2;0)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}$

(ب) أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y=x-2$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$

5. أدرس وضعية المنحنى $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المستقيم Δ
6. أنشئ المستقيم Δ و المنحنى $\mathcal{C}_f$

حل

الجزء الأول

1. g هي دالة ناطقة، نهايتها عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام. و عليه: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$

و بطريقة مماثلة نبرهن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

2. أ) $g(2)=-\frac{4}{5}=-0{,}8$

ب) g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;x_1]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ إذن $g(x)>0>-1$ على المجال $]-\infty;x_1]$

و g متناقصة تماما على المجال $]x_1;2]$ و $g(2)=-0{,}8$ إذن $g(x)\geq -0{,}8>-1$ على المجال $[x_1;2]$.

نبرهن بطريقة مماثلة أنّ $g(x) > -1$ على المجال $]2; x_2]$ و على المجال $]x_2; +\infty[$

و عليه: من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) > -1$

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
g	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\frac{4}{5}$	$\nearrow$		$\searrow$	0

تبرير آخر: الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$

و $g(2) = -\frac{4}{5} = -0{,}8$ هي القيمة الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x،

$g(x) \geq -0{,}8 > -1$ و هو المطلوب

الجزء الثاني

1. من أجل كل عدد حقيقي x،

$$x - 2 + \frac{-4x+8}{{}^2 - 4x + 9} = \frac{(x-2)(x^2-4x+9) - 4x + 8}{x^2 - 4x + 9}$$
$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 10}{x^2 - 4x + 9}$$
$$= f(x)$$

2. أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x

$$f'(x) = 1 + \frac{-4(x^2-4x+9) - (-4x+8)(2x-4)}{(x^2-4x+9)^2}$$
$$= 1 + \frac{-4x^2 + 16x - 36 + 8x^2 - 16x - 16x + 32}{(x^2-4x+9)^2}$$
$$= 1 + \frac{4x^2 - 16x - 4}{(x^2-4x+9)^2}$$
$$= 1 + g(x)$$

ب) حسب الجزء الأول، من أجل كل عدد حقيقي ، $g(x) > -1$ إذن $1 + g(x) > 0$، أي: $f'(x) > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

3. أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

نبرهن كذلك أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(2+x) + f(2-x) = 2 + x - 2 + \frac{-4(2+x)+8}{(2+x)^2 - 4(2+x) + 9}$$
$$= +2 - x - 2 + \frac{-4(2-x)+8}{(2-x)^2 - 4(2-x) + 9}$$
$$= \frac{-4x}{4 + x^2 - 8 + 9} + \frac{4x}{4 + x^2 - 8 + 9}$$
$$= \frac{-4x + 4x}{x^2 + 5}$$
$$= 0$$

إذن النقطة $A(2; 0)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$.

طريقة

لإثبات أنّ النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f يكفي التحقق من المساواة $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$

5. أ) من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f(x)-(x-2)=\frac{-4x+8}{x^2-4x+9}$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x}=0$$

كذلك :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x}=0$$

النتيجة : المستقيم Δ ذو المعادلة $y=x-2$ هو مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

ب) من أجل كل عدد حقيقي x،

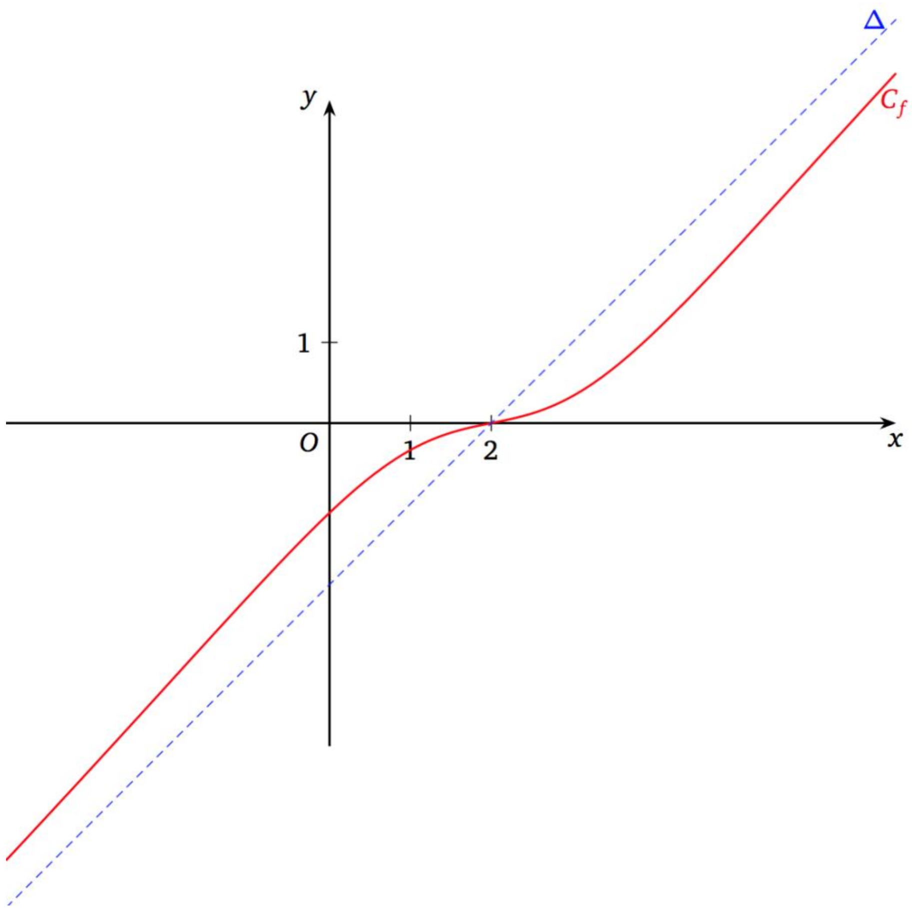
$$f(x)-(x-2)=\frac{-4x+8}{x^2-4x+9}$$

بما أنّ $x^2-4x+9>0$ فإنّ إشارة $f(x)-(x-2)$ هي إشارة $-4x+8$ أي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		$+$	0	$-$	

- من أجل $x<2$، $f(x)-(x-2)>0$ إذن المنحني $\mathcal{C}_f$ يقع فوق المستقيم Δ في المجال $]-\infty;2[$
- من أجل $x>2$، $f(x)-(x-2)<0$ إذن المنحني $\mathcal{C}_f$ يقع تحت المستقيم Δ في المجال $]2;+\infty[$
- و $\mathcal{C}_f$ يقطع المستقيم Δ في النقطة ذات الفاصلة 2

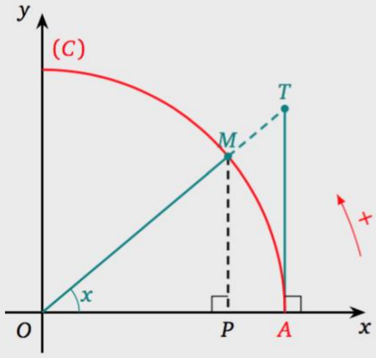
6. التمثيل البياني للدالة f



طريقة هندسية لإثبات أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

الهدف هو حساب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

نفرض أنّ $x\in\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ و نعتبر الشكل التالي :



(C) هي الدائرة المثلثية و x هو القيس الرئيسي بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$

نرمز بـ $\mathcal{A}(OPM)$ لمساحة المثلث OPM، $\mathcal{A}(OAT)$ لمساحة المثلث OAT و $\mathcal{S}$ لمساحة القطاع الدائري (OAM)

1. برّر أنّ :

$$\mathcal{A}(OPM)=\frac{\cos x\sin x}{2}\quad \text{و}\quad \mathcal{S}=\frac{x}{2}\quad \text{و}\quad \mathcal{A}(OAT)=\frac{\tan x}{2}$$

2. بملاحظة أنّ

$$\mathcal{A}(OPM)\leq\mathcal{S}\leq\mathcal{A}(OAT)$$

أثبت أنّ

$$\cos(x)\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq\frac{1}{\cos(x)}$$

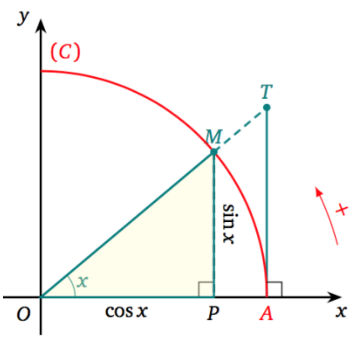
3. استنتج

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

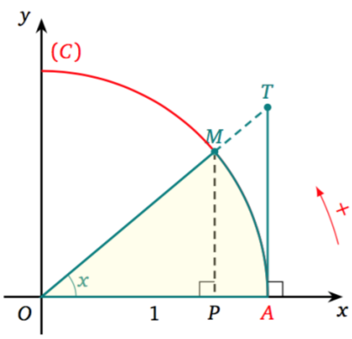
حل

بشروط النص و رموز الشكل، x هو كذلك القيس الرئيسي بالراديان للزاوية الهندسية $\widehat{AOM}$ و هو كذلك طول القوس $\widehat{AM}$. نعلم أنّ $OA=1$، $OP=\cos x$ و $MP=\sin x$

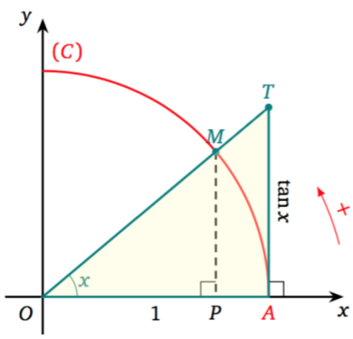
الشكل التالي يوضح كل المعطيات



المثلث OPM



القطاع الدائري (OAM)



المثلث OAT

1. مساحة مثلث قائم هي نصف جداء طول القاعدة في الارتفاع. و عليه

مساحة المثلث OAT هي :

$$\mathcal{A}(OAT) = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

و مساحة المثلث OPM هي :

$$\mathcal{A}(OPM) = \frac{OP \times PM}{2} = \frac{\cos x \times \sin x}{2} = \frac{\cos x \sin x}{2}$$

أمّا مساحة القطاع الدائري (OAM) فهي معرفة بـ

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

حيث α هي زاوية القطاع الدائري (OAM) و r هو طول نصف القطر، بما أنّ $r = 1$ و $\alpha = x$ فإنّ :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \times x \times OA^2 = \frac{x}{2}$$

2. باستعمال الحصر التالي

$$\mathcal{A}(OPM) \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{A}(OAT)$$

و من تائج السؤال الأول :

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

بالضرب في 2 و بما أنّ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ نحصل على

$$\cos x \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

بالقسمة على $\sin x$ ثم باستعمال المقلوب نجد:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x} \qquad [1]$$

3. من [1] و علما أنّ :

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

نستنتج بتطبيق مبرهنة الحصر أنّ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

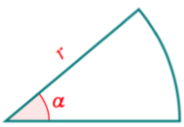
تذكير : القطاع الدائري

يتميّز القطاع الدائري بزاوية α و نصف قطر r.

المساحة $\mathcal{S}$ للقطاع الدائري متناسبة مع الزاوية α. نعلم أنّ مساحة القرص ذو نصف القطر r (أي القطاع الدائري الذي زاويته 2π) هي πr^2

تسمح لنا الطريقة الثلاثية بالنتيجة التالية :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\alpha r^2$$



تمارين للتعمق

حساب النهايات

01 في كل حالة، أدرس النهايات المقترحة للدالة f

- $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$، عند 1، عند -2
- $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}$ عند $+\infty$، عند $-\infty$، عند 3، عند -3
- $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ عند $+\infty$، عند 1
- $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ عند $+\infty$
- $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ عند $-\infty$
- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ عند 3
- $f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ عند 2

02 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+4}$$

1. عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي :
$$f(x)=-\frac{4}{x-\sqrt{x^2+4}}$$
3. استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$

03 f هي الدالة المعرفة على $]-5;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$
2. جد هذه النهاية الأخيرة بتعيين عبارة $f(f(x))$

04 g هي الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ التي تحقق :

$$g(0)=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

و f هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

و ليكن $\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. عيّن نهاية الدالة f عند 0 . فسر النتيجة هندسيا
2. عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا

النهايات بالمقارنة

05 عيّن، باستعمال مبرهنات النهايات بالمقارنة، النهايات التالية

- $f(x)=2x+\sin x$ عند $+\infty$، عند $-\infty$
- $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ عند $+\infty$
- $f(x)=\frac{x}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ عند $+\infty$
- $f(x)=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ عند $-\infty$

الاستمرارية

06 f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2;3]$ بما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\in[-2;1[\\ x+p & : x\in[1;3] \end{cases}$$

p عدد حقيقي

1. نختار $p=1$. أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_f$ الممثل للدالة f
   - أ) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;1[$ ؟ هل هي مستمرة على المجال $[1;3]$ ؟
   - ب) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;3]$ ؟
2. كيف يتم اختيار قيمة p حتى تكون f مستمرة على المجال $[-2;3]$ ؟

07 في كل حالة، هل يُمكن تعيين العدد الحقيقي k الذي من أجله تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ بـ:

1. f هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي
$$f(x)=\begin{cases} -5x+2, & x<3 \\ k, & x=3 \\ 4x-25, & x>3 \end{cases}$$
2. f هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي
$$(x)=\begin{cases} (2x+1)^3, & x<-1 \\ 5x+4, & -1\le x\le 5 \\ k, & x>5 \end{cases}$$

08 ★ أدرس استمرارية الدالة عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

.1
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & : x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

.2
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & : x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

09 ★ بيّن أنّ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & : x > 0 \\ f(x) = \dfrac{1-x^2}{x-2} & : x \leq 0 \end{cases}$$
مستمرة على $\mathbb{R}$

10 ★ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & : \ x < 1 \\ a & : \ x = 1 \\ x^2+b & : \ x > 1 \end{cases}$$
عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 1.

11 ★ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = x^2+2x-a & : x < 2 \\ f(x) = \dfrac{2x^2-a+b}{x} & : x \geq 2 \end{cases}$$
حيث a و b عددان حقيقيان.

عيّن علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2.

12 نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي:
$$g(x) = \frac{2}{x} \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x}$$
و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيليهما البيانيين

بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ يتقاطعان في نقطة A فاصلتها x_0 حيث $1 < x_0 < 2$

13 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:
$$f(x) = -x^3+3x+3$$
1. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$
2. شكل جدول تغيّرات الدالة f
3. اثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;+\infty[$
4. تحقق أنّ $2 < \alpha < 3$ ثمّ عيّن حصرا لـ α سعته 0,1

14 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;3[$ بـ:
$$f(x) = x - x\,E(x)$$
حيث E هي الدالة الجزء الصحيح
1. أكتب عبارة $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى كل مجال من المجالات التالية $[-1;0[$ ، $[0;1[$ ، $[1;2[$ و $[2;3[$
2. في معلم، أنشئ التمثيل البياني للدالة f.
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $]-1;3[$؟

15 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بجدول تغيّراتها التالي :

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	-10	↗	3	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	6

1. عيّن في كل حالة من الحالات التالية عدد حلول المعادلة المقترحة
(أ) $f(x)=0$ (ب) $(x)=-7$ (جـ) $(x)=6$
2. حل المتراجحة $f(x) \geq 5$

16 ★ f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث
$$f(a) < ab \quad \text{و} \quad f(b) > b^2$$
بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي c من $[a;]$ بحيث $f(c) = bc$

(إرشاد :

طبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة $x \mapsto f(x) - bx$)

17 ★ f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f(1)=1$. بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث
$$f(c) = \frac{1-c}{1+c}$$
(إرشاد :

طبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة $x \mapsto f(x) - \frac{1-x}{1+x}$)

من البكالوريا...

يشمل ★★☆☆☆
25 دقيقة
- نهايات دوال صماء
- النهاية بالحصر
- النهاية بالمقارنة

18 1. f هي دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

(أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$،

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\leq f(x)\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

هل للدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

2. h هي الدالة المعرفة من أجل $x>1$ بـ :

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$$

(أ) بيّن أنّه لما يكون $x>1$ يكون

$$\frac{1}{\sqrt{2x}}<\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

(ب) استنتج أنّ $f(x)>\sqrt{2x}$ ثم عيّن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

يشمل ★★☆☆☆
20 دقيقة
- إزالة حالة عدم التعيين
- اتجاه تغيّر دالة
- مبرهنة القيم المتوسطة
- إشارة دالة

19 لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=f(x)-xf(x)+1$$

f هي الدالة الموجبة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و التي تحقق $f(x)=f'(x)$، $f(0)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

1. عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة g
3. أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$
4. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$
5. أثبت المساواة :

$$f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$$

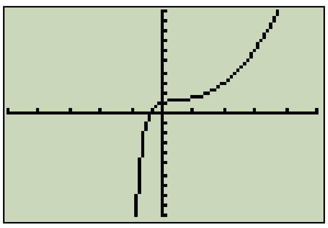
يشمل ★★☆☆☆
30 دقيقة
- تعيين عبارة دالة
- مبرهنة القيم المتوسطة
- المماسات لمنحن الموازية لمحور الفواصل
- تشكيل جدول تغيّرات

20 لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+2x+1}{x+1}$$

و ليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني.

برسم تمثيلها البياني على آلة حاسبة بيانية، يُعتقد أنّ المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مماسا يوازي محور الفواصل



1. (أ) عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c و d التي تحقق :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$$

(ب) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها و فسر النتائج هندسيا

2. (أ) أثبت أنّه يُمكن كتابة $f'(x)$ على الشكل $\frac{N(x)}{D(x)}$ حيث $N(x)$ هو كثير حدود من الدرجة الثالثة

(ب) أثبت وُجود عدد حقيقي α وحيد حيث $N(\alpha) = 0$

(جـ) ماذا نستنتج بالنسبة إلى المماسات للمنحنى $\mathcal{C}_f$ الموازية لمحور الفواصل

(د) استنتج حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة f

يشمل ★★☆☆☆
30 دقيقة
- تفسير جدول تغيّرات
- تعيين عبارة دالة
- وضعية منحنى بالنسبة إلى مستقيمه المقارب

21 a ، b ، c و d هي أعداد حقيقية حيث من أجل كل $x \neq -1$،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$$

في الشكل المقابل يُعطى جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$ ↗		-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	

1. (أ) ما هي قيمة d ؟

(ب) أحسب $f'(x)$

(جـ) عيّن الأعداد a، b و c

2. المستوي منسوب إلى معلم،

أثبت أنّ المنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f يقبل المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x + 1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$ و عند $-\infty$. أدرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى Δ

يشمل ★★★☆☆
30 دقيقة
- إزالة حالات عدم التعيين
- وضعية منحنى بالنسبة إلى مستقيمه المقارب
- معادلة اتحاد منحنيين

22 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (وحدة الرسم: 1 cm)

نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

و ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني

1. أ) عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$

ب) أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

2. أ) أثبت أنّ $[u(x) + 2x]$ يول إلى 0 لمّا يؤول x إلى $-\infty$

ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا $u(x) > 0$. استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$

جـ) فسر هذه النتائج بيانيا

3. نقبل أنّ الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أنشئ المنحنى $\mathcal{C}$ و مستقيمه المقارب المائل

4. $\mathcal{C}'$ هو التمثيل البياني للدالة v المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$v(x) = -\sqrt{x^2+1} - x$$

و $\mathcal{H}$ هو اتحاد $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$

تحقق أنّ للمنحنى $\mathcal{H}$ المعادلة: $y^2 + 2xy - 1 = 0$