تمــارين محلولــة حول النهــايــات

تمرين 01:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x+3}{x-2}$

1) أوجد عددا حقيقيا a حيث إذا كان $x>a$ فإن $f(x)\in]3{,}9;4{,}1[$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

3) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

الحـل:

1) $f(x)\in]3{,}9;4{,}1[$ يعني $3{,}9<f(x)<4{,}1$

أي $3{,}9<\dfrac{4x+3}{x-2}<4{,}1$

ومنه $3{,}9(x-2)<4x+3<4{,}1(x-2)$ لأن $x-2>0$

أي $3{,}9x-7{,}8<4x+3<4{,}1x-8{,}2$

ومنه $(4x+3<4{,}1x-8{,}2)$ و $(3{,}9x-7{,}8<4x+3)$

ومنه $(-0{,}1x<-11{,}2)$ و $(-0{,}1x<10{,}8)$

عندئذ $(x>112)$ و $(x>-108)$

و بالتالي $x>112$

إذن $a=112$

2)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x\left(4+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{4+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}\right)$$

وبالتالي $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=4$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

3)
$$f(x)-4=\frac{4x+3}{x-2}-4$$
$$=\frac{4x+3-4x+8}{x-2}$$
وبالتالي $f(x)-4=\frac{11}{x-2}$

من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، $\frac{11}{x-2}>0$ أي $f(x)-4>0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

تمرين 02:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;3[$ بـ: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

1) أوجد عددا حقيقيا a حيث إذا كان $x<a$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى $]1,9;2,1[$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

3) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

الحل:

1) $f(x)\in]1,9;2,1[$ يعني $1,9<f(x)<2,1$

أي $1,9<\frac{2x+1}{x-3}<2,1$

ومنه $2,1(x-3)<2x+1<1,9(x-3)$ لأن $x-3<0$

أي $2,1x-6,3<2x+1<1,9x-5,7$

ومنه $(2x+1<1,9x-5,7)$ و $(2,1x-6,3<2x+1)$

ومنه $(0,1x<-6,7)$ و $(0,1x<7,3)$

عندئذ $(x<-67)$ و $(x<73)$

وبالتالي $x<-67$

إذن $a=-67$

2)
$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$$
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)$$
وبالتالي $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=2$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

(3
$$f(x)-2=\frac{2x+1}{x-3}-2$$
$$=\frac{2x+1-2x+6}{x-3}$$

وبالتالي $f(x)-2=\frac{7}{x-3}$

من أجل كل x من المجال $]-\infty;3[$ ، $\frac{7}{x-3}<0$ أي $f(x)-2<0$

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

تمرين 03:

أثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-3}=0$

الحل:

نضع $f(x)=\frac{2}{x-3}$

ليكن $I=]a;b[$ حيث $a<0<b$ I (مجال مفتوح يشمل العدد 0)

من أجل x من المجال $]3;+\infty[$ ، يكون لدينا: $x-3>0$

$f(x)\in I$ يعني $f(x)>a$ و $f(x)<b$

أي $\frac{2}{x-3}>a$ و $\frac{2}{x-3}<b$

ومنه $2>ax-3a$ و $2<bx-3b$

ومنه $ax<3a+2$ و $bx>3b+2$

ومنه $x>\frac{3a+2}{a}$ و $x>\frac{3b+2}{b}$

إذن $x>3+\frac{2}{a}$ و $x>3+\frac{2}{b}$

وبالتالي $x>3+\frac{2}{b}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x>3+\frac{2}{b}\right)$ ، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$.

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-3}=0$

تمرين 04:

a و b عددان حقيقيان.

(1 برهن أنه إذا كان $a<3<b$ فإن $\frac{a+2}{3-a}>\frac{b+2}{3-b}$.

(2 أثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x+1}=3$

الحل:

1) لدينا $a<3<b$ ومنه $a<3$ و $b>3$ أي $a-3<0$ و $b-3>0$

وبالتالي $(a-3)(b-3)<0$

$$\frac{a+2}{3-a}-\frac{b+2}{3-b}=\frac{(a+2)(3-b)-(b+2)(3-a)}{(3-a)(3-b)}$$

$$=\frac{3a-ab+6-2b-(3b-ab+6-2a)}{(3-a)(3-b)}$$

$$=\frac{3a-ab+6-2b-3b+ab-6+2a}{(3-a)(3-b)}$$

$$=\frac{5a-5b}{(3-a)(3-b)}$$

إذن $\dfrac{a+2}{3-a}-\dfrac{b+2}{3-b}=\dfrac{5(a-b)}{(a-3)(b-3)}$

بماأن $a-b<0$ و $(a-3)(b-3)<0$ فإن $\dfrac{a+2}{3-a}-\dfrac{b+2}{3-b}>0$

إذن $\dfrac{a+2}{3-a}>\dfrac{b+2}{3-b}$

2) إثبات باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x+1}=3$

نضع $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$

ليكن $I=]a;b[$ حيث $a<3<b$ I (مجال مفتوح يشمل العدد 3)

من أجل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، يكون لدينا: $x+1>0$

$f(x)\in I$ يعني $f(x)>a$ و $f(x)<b$

أي $\dfrac{3x-2}{x+1}>a$ و $\dfrac{3x-2}{x+1}<b$

ومنه $3x-2>ax+a$ و $3x-2<bx+b$

ومنه $(3-a)x>a+2$ و $(3-b)x<b+2$

ومنه $x>\dfrac{a+2}{3-a}$ و $x>\dfrac{b+2}{3-b}$

إذن $x>\dfrac{a+2}{3-a}$ لأن $\dfrac{a+2}{3-a}>\dfrac{b+2}{3-b}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x>\dfrac{a+2}{3-a}\right)$، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$.

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x+1}=3$

تمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x+1$

أثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

الـحـل:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا.

$f(x)\in[a;+\infty[$ يعني $3x+1\geq a$

أي $3x\geq a-1$

إذن $x\geq\frac{a-1}{3}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x\geq\frac{a-1}{3}\right)$، المجال $[a;+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين 06:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-3;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

الـحـل:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا.

من أجل x من المجال $[-3;+\infty[$، يكون لدينا: $x+3\geq 0$

$f(x)\in[a;+\infty[$ يعني $\sqrt{x+3}\geq a$

أي $x+3\geq a^2$

إذن $x\geq a^2-3$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $(x\geq a^2-3)$، المجال $[a;+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين 07:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=3x+1-\frac{3}{x-2}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=3x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) .

2) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

الـحـل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، لدينا:

$$f(x)-(3x+1)=-\frac{3}{x-2}$$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(3x+1)]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(3x+1)]=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=3x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) .

2) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، لدينا: $f(x)-(3x+1)=-\frac{3}{x-2}$

إذا كان $x\in]-\infty;2[$ فإن $-\frac{3}{x-2}>0$ أي $f(x)-(3x+1)>0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) على المجال $]-\infty;2[$.

إذا كان $x \in]2;+\infty[$ فإن $-\dfrac{3}{x-2} < 0$ أي $f(x)-(3x+1) < 0$

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) على المجال $]2;+\infty[$.

تمرين 08:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{3x}{x^2+4}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - \dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) .

2) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

الحـل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3x}{x^2+4}$ أي $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{x + \dfrac{4}{x}}$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right] = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right] = 0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - \dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) .

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3x}{x^2+4}$

إذا كان $x \in]-\infty;0[$ فإن $\dfrac{3x}{x^2+4} < 0$ أي $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) < 0$

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) على المجال $]-\infty;0[$.

إذا كان $x \in]0;+\infty[$ فإن $\dfrac{3x}{x^2+4} > 0$ أي $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) > 0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) على المجال $]0;+\infty[$.

تمرين 09:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{-x^2+3x+2}{x-2}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

ب) استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

3) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

الحـل:

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2+3x+2}{x-2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+3+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2)أ) من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$$
$$=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$$

إذن $(1)......... .f(x)=\dfrac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$

ولدينا من جهة أخرى: $(2)......... .f(x)=\dfrac{-x^2+3x+2}{x-2}$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$\begin{cases}a=-1\\ b-2a=3\\ c-2b=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=-1\\ b=2a+3\\ c=2b+2\end{cases}$ إذن $\begin{cases}a=-1\\ b=1\\ c=4\end{cases}$

عندئذ: $f(x)=-x+1+\dfrac{4}{x-2}$

ب) من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، لدينا: $f(x)-(-x+1)=\dfrac{4}{x-2}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

(3 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\left(\dfrac{-x^2+3x+2}{x-2}\right)$ إذن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2} f(x)=+\infty$

إذن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=2$.

تمرين 10:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

(1 أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

4) عين أصغر عدد طبيعي n حيث من أجل كل x يحقق $(x \geq n)$، يكون لدينا:

$$f(x)-(x+1) \leq \frac{1}{100}$$

الحل:

1)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+5}{x^2-4x+4}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-3+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$، لدينا:

$$f(x)-(x+1) = \frac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}-(x+1)$$

$$= \frac{x^3-3x^2+5-(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+5-(x^2-4x+4)(x+1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+5-(x^3-3x^2+4)}{(x-2)^2}$$

إذن $f(x)-(x+1)=\frac{1}{(x-2)^2}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3) من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، لدينا: $f(x)-(x+1)>0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

4) تعيين أصغر عدد طبيعي n حيث من أجل كل x يحقق $(x\geq n)$ ، يكون لدينا: $f(x)-(x+1)\leq\frac{1}{100}$

$f(x)-(x+1)\leq\frac{1}{100}$ يعني $\frac{1}{(x-2)^2}\leq\frac{1}{100}$

أي $(x-2)^2\geq 100$ لأن $x\neq 2$

ومنه $(x-2)^2-10^2\geq 0$

ومنه $(x+8)(x-12)\geq 0$

x	$-\infty$		-8		12		$+\infty$
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+8)(x-12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

نستنتج من الجدول أن $(x+8)(x-12)\geq 0$ إذا كان $x\leq -8$ أو $x\geq 12$.

إذن أصغر عدد طبيعي n حيث من أجل كل x يحقق $(x\geq n)$ ، يكون لدينا: $f(x)-(x+1)\leq\frac{1}{100}$ هو 12.

تمرين 11:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x+4$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ عندما x يؤول إلى 1.

1) ضع تخمينا.

2) في أي مجال يجب إختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[2,99;3,01]$ ؟

3) r عدد حقيقي حيث $0<r<1$.

أ) في أي مجال يجب إختيار x بحيث $f(x)\in[3-r;3+r]$ ؟

ب) ماذا نستنتج علما أنه يمكن إختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

الحل:

1) يبدو أنه كلما اقترب x من 1، اقترب $f(x)$ من 3.

2) $f(x)\in]2,99;3,01[$ يعني $2,99<f(x)<3,01$

أي $2,99<-x+4<3,01$

ومنه $-1,01<-x<-0,99$

وبالتالي $0,99<x<1,01$

إذن $x\in]0,99;1,01[$

3) أ) $f(x)\in]3-r;3+r[$ يعني $3-r<f(x)<3+r$

أي $3-r<-x+4<3+r$

ومنه $-1-r<-x<r-1$

وبالتالي $1-r<x<1+r$ أي $x\in]1-r;1+r[$

ب) عندما نختار r صغيرا بالقدر الذي نريد، يكون x قريبا من 1 بالقدر الكافي وبالتالي يكون $f(x)$ قريبا من 3 بالقدر الذي نريد.

إذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$

تمرين 12: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^2+x-2)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^2+x-2)$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3-x^2+4x+3)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-2x^3-x^2+4x+3)$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^4+2x^3-3x+1)$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^4+2x^3-3x+1)$

الحل:

1) $$\lim_{x\to -\infty}(3x^2+x-2)=\lim_{x\to -\infty} x\left(3x+1-\frac{2}{x}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^2+x-2)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^2+x-2)=+\infty$

3) $$\lim_{x\to -\infty}(-2x^3-x^2+4x+3)=\lim_{x\to -\infty} x^2\left(-2x-1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3-x^2+4x+3)=+\infty$

4) $$\lim_{x\to +\infty}(-2x^3-x^2+4x+3)=\lim_{x\to +\infty} x\left(-2x^2-x+4+\frac{3}{x}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}(-2x^3-x^2+4x+3)=-\infty$

5) $$\lim_{x\to -\infty}(-x^4+2x^3-3x+1)=\lim_{x\to -\infty} x\left(-x^3+2x^2-3+\frac{1}{x}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^4+2x^3-3x+1)=-\infty$

6) $$\lim_{x\to +\infty}(-x^4+2x^3-3x+1)=\lim_{x\to +\infty} x^3\left(-x+2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^4+2x^3-3x+1)=-\infty$

$x \to +\infty$

تمرين 13:

أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-3}{x+4}$

(2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-3}{x+4}$

(3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+2}{1-2x}$

(4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+2}{1-2x}$

الحل:

(1
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{x+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x}}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-3}{x+4} = 2$

(2
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-3}{x+4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x}}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-3}{x+4} = 2$

(3
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2}{1-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(3x+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-2}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+2}{1-2x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3x+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)} \quad (4$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-2}\right)$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2}{1-2x} = -\infty$

تمرين 14: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{x^2+3}{x-2}$

(2 $\lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{x^2+3}{x-2}$

(3 $\lim_{x \xrightarrow{<} -3} \frac{-x^2+4}{x+3}$

(4 $\lim_{x \xrightarrow{>} -3} \frac{-x^2+4}{x+3}$

(5 $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{1-x}{x^2+2x+1}$

(6 $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1-x}{x^2+2x+1}$

الحل:

(1 لدينا $\lim_{x\to 2}(x^2+3)=7$ و $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$

من أجل $x<2$ يكون لدينا $x-2<0$

إذن $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{x^2+3}{x-2} = -\infty$

(2 لدينا $\lim_{x\to 2}(x^2+3)=7$ و $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$

من أجل $x>2$ يكون لدينا $x-2>0$

إذن $\lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{x^2+3}{x-2} = +\infty$

(3 لدينا $\lim_{x\to -3}(-x^2+4)=-5$ و $\lim_{x\to -3}(x+3)=0$

من أجل $x<-3$ يكون لدينا $x+3<0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -3} \dfrac{-x^2+4}{x+3} = +\infty$

4) لدينا $\lim\limits_{x \to -3}(-x^2+4) = -5$ و $\lim\limits_{x \to -3}(x+3) = 0$

من أجل $x > -3$ يكون لدينا $x+3 > 0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} \dfrac{-x^2+4}{x+3} = -\infty$

5) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{1-x}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{1-x}{(x+1)^2}$

لدينا $\lim\limits_{x \to -1}(1-x) = 2$ و $\lim\limits_{x \to -1}(x+1)^2 = 0$

من أجل $x < -1$ يكون لدينا $x+1 < 0$ ومنه $(x+1)^2 > 0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{1-x}{x^2+2x+1} = +\infty$

6) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{1-x}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{1-x}{(x+1)^2}$

لدينا $\lim\limits_{x \to -1}(1-x) = 2$ و $\lim\limits_{x \to -1}(x+1)^2 = 0$

من أجل $x > -1$ يكون لدينا $x+1 > 0$ ومنه $(x+1)^2 > 0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{1-x}{x^2+2x+1} = +\infty$

تمرين 15: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5-2x}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x - 1)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+2} - x)$

الحـل:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5-2x} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - (x+1))$

$$= \lim \frac{(\sqrt{x^2+2x} - (x+1))(\sqrt{x^2+2x} + (x+1))}{\sqrt{x^2+2x} + (x+1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x} + x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x} + x + 1}$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x - 1) = 0$

(4 $\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+2} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+2} - x)(\sqrt{x^2+2} + x)}{\sqrt{x^2+2} + x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+2} - x) = 1$

تمرين 16: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ **(3** $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 2}$

(2 $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ **(4** $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3}$

الحل:

(1 لدينا $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0$ و $\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$

من أجل x يختلف عن العدد 2 ، يكون لدينا:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

أي $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$

$$\lim \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim (x + 2)$$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2)$

إذن $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

(2 لدينا $\lim\limits_{x\to -3}(x^2-9)=0$ و $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)=0$

من أجل x يختلف عن العدد -3، يكون لدينا:

$$\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$$

أي $\dfrac{x^2-9}{x+3} = x-3$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3)$$

إذن $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = -6$

(3 لدينا $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-4)=0$ و $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$

من أجل x يختلف عن العددين 1 و 2، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-2)}$$

أي $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+4}{x-2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x-2}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2} = -5$

(4 لدينا $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+6)=0$ و $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x-3)=0$

من أجل x يختلف عن العددين -1 و 3، يكون لدينا:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$$

أي $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = \dfrac{x-2}{x+1}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x+1}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = \dfrac{1}{4}$

تمرين 17: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$

(2 $\lim_{x \to -4} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}$

(3 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}$

(4 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8}$

الحـل:

(1 لدينا $\lim_{x \to -1} (x^2+2x+1) = 0$ و $\lim_{x \to -1} (x^2+3x+2) = 0$

من أجل x يختلف عن العددين -2 و -1 ، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

أي $$\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x+2}$$

إذن $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2} = 0$$

(2 لدينا $\lim_{x \to -4} (x^2+7x+12) = 0$ و $\lim_{x \to -4} (x^2+5x+4) = 0$

من أجل x يختلف عن العددين -4 و -1 ، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4} = \frac{(x+4)(x+3)}{(x+4)(x+1)}$$

أي $$\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4} = \frac{x+3}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4} = \lim_{x \to -4} \frac{x+3}{x+1}$$

إذن $$\lim_{x \to -4} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4} = \frac{1}{3}$$

(3 لدينا $\lim_{x \to 2} (x^2+2x-8) = 0$ و $\lim_{x \to 2} (x^2-7x+10) = 0$

من أجل x يختلف عن العددين 2 و 5 ، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x-5)}$$

أي $$\frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10} = \frac{x+4}{x-5}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10} = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x-5}$$

إذن $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10} = -2$

4) لدينا $\lim_{x \to -2} (x^2+8x+12) = 0$ و $\lim_{x \to -2} (x^2+6x+8) = 0$

من أجل x يختلف عن العددين -4 و -2، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8} = \frac{(x+2)(x+6)}{(x+2)(x+4)}$$

أي $\frac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8} = \frac{x+6}{x+4}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8} = \lim_{x \to -2} \frac{x+6}{x+4}$$

إذن $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8} = 2$

تمرين 18: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

2) $\lim_{x \to -5} \frac{-x-5}{x^2+8x+15}$

3) $\lim_{x \to 3} \frac{3-x}{x^2-4x+3}$

الحل:

1) لدينا $\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$ و $\lim_{x \to 1} (x^2-1) = 0$

من أجل x يختلف عن العددين -1 و 1، يكون لدينا:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

أي $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1}$$

إذن $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

2) لدينا $\lim_{x \to -5} (-x-5) = 0$ و $\lim_{x \to -5} (x^2+8x+15) = 0$

من أجل x يختلف عن العددين -5 و -3 ، يكون لدينا:

$$\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\frac{-(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

أي $$\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\frac{-1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to-5}\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\lim_{x\to-5}\frac{-1}{x+3}$$

إذن $$\lim_{x\to-5}\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\frac{1}{2}$$

3) لدينا $\lim_{x\to3}(3-x)=0$ و $\lim_{x\to3}(x^2-4x+3)=0$

من أجل x يختلف عن العددين 1 و 3 ، يكون لدينا:

$$\frac{3-x}{x^2-4x+3}=\frac{-(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

أي $$\frac{3-x}{x^2-4x+3}=-\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to3}\left(-\frac{1}{x-1}\right)$$

إذن $$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{x^2-4x+3}=-\frac{1}{2}$$

تمرين 19: أحسب النهايات التالية بدلالة الوسيط الحقيقي m :

1) $\lim_{x\to1}\frac{(x-m)^2-m^2}{x}$ **2)** $\lim_{x\to0}\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}$

الحل:

1) من أجل x غير معدوم ، يكون لدينا:

$$\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=\frac{x^2-2mx+m^2-m^2}{x}$$
$$=\frac{x(x-2m)}{x}$$

أي $$\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=x-2m$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=\lim_{x\to0}(x-2m)$$

إذن $$\lim_{x\to0}\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=-2m$$

2) من أجل x يختلف عن العددين 1 و 2 ،يكون لدينا:

$$\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=\frac{x^2(x-1)+x-mx+m-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2(x-1)+(x-1)-m(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+1-m)}{(x-1)(x-2)}$$

أي $\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=\frac{x^2+1-m}{x-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-m}{x-2}$$

إذن $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=m-2$

تمرين 20: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

(2 $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)$

(3 $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\sin x}{3x}\right)$

الحل:

(1 بمأن $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ فإن $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

(2 لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi+\frac{2}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}\right)$ أي $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\frac{\pi}{3}$

بمأن $\lim_{x\to-\infty}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3 بمأن $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi\sin x}{3x}\right)=\frac{\pi}{3}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\frac{1}{2}$ فإن $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\sin x}{3x}\right)=\frac{1}{2}$

تمرين 21:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2;+\infty[$: $\frac{1}{x-2} \le \frac{2-\sin x}{x-2} \le \frac{3}{x-2}$

2) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2-\sin x}{x-2} \right)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2;+\infty[$ ، يكون لدينا: $-1 \le \sin x \le 1$

ومنه $-1 \le -\sin x \le 1$

إذن $1 \le 2-\sin x \le 3$

وبالتالي $\frac{1}{x-2} \le \frac{2-\sin x}{x-2} \le \frac{3}{x-2}$ لأن $x-2>0$

2) من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، لدينا: $\frac{1}{x-2} \le \frac{2-\sin x}{x-2} \le \frac{3}{x-2}$

بماأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x-2} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2-\sin x}{x-2} \right) = 0$

تمرين 22:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2 \le 4+2\cos x \le 6$

2) استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{4+2\cos x} \right)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، يكون لدينا: $-1 \le \cos x \le 1$

ومنه $-2 \le 2\cos x \le 2$

إذن $2 \le 4+2\cos x \le 6$

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $2 \le 4+2\cos x \le 6$

ومنه $\frac{1}{6} \le \frac{1}{4+2\cos x} \le \frac{1}{2}$

إذن $\frac{x^2+1}{6} \le \frac{x^2+1}{4+2\cos x} \le \frac{x^2+1}{2}$

بماأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{6} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{2} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{4+2\cos x} \right) = +\infty$

تمرين 23:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;3[$ بـ: $f(x) = \frac{2x-\cos x}{x-3}$

1) برهن أن: $\frac{2x+1}{x-3} \le f(x) \le \frac{2x-1}{x-3}$

2) استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;3[$ ، يكون لدينا: $-1 \leq \cos x \leq 1$

أي $-1 \leq -\cos x \leq 1$

ومنه $2x-1 \leq 2x-\cos x \leq 2x+1$

إذن $\dfrac{2x-1}{x-3} \leq \dfrac{2x-\cos x}{x-3} \leq \dfrac{2x+1}{x-3}$ لأن $x-3<0$

وبالتالي $\dfrac{2x-1}{x-3} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x-3}$

2) من أجل كل x من المجال $]-\infty;3[$ ، لدينا: $\dfrac{2x+1}{x-3} \leq f(x) \leq \dfrac{2x-1}{x-3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right) \quad و \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)$$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x-3} = 2$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

تمرين 24:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2 \leq 5-3\sin x \leq 8$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{|x|+2}{5-3\sin x}\right)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، يكون لدينا: $-1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه $-3 \leq -3\sin x \leq 3$

إذن $2 \leq 5-3\sin x \leq 8$

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $2 \leq 5-3\sin x \leq 8$

ومنه $\dfrac{1}{8} \leq \dfrac{1}{5-3\sin x} \leq \dfrac{1}{2}$

إذن $\dfrac{|x|+2}{8} \leq \dfrac{|x|+2}{5-3\sin x} \leq \dfrac{|x|+2}{2}$

بماأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|+2}{8} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|+2}{2} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{|x|+2}{5-3\sin x}\right) = +\infty$

تمرين 25:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $-5 \leq 2\sin x + 3\cos x \leq 5$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\sin x+3\cos x}{x^2+1}\right)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، يكون لدينا:
$$-1\le \sin x\le 1 \quad \text{و} \quad -1\le \cos x\le 1$$
ومنه $-2\le 2\sin x\le 2$ و $-3\le 3\cos x\le 3$

إذن $-5\le 2\sin x+3\cos x\le 5$

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $-5\le 2\sin x+3\cos x\le 5$

ومنه $-\frac{5}{x^2+1}\le \frac{2\sin x+3\cos x}{x^2+1}\le \frac{5}{x^2+1}$

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{5}{x^2+1}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2+1}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\sin x+3\cos x}{x^2+1}\right)=0$

تمرين 26:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $\frac{1}{2}\le \frac{x}{x+1}\le 1$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\right)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ ،لدينا : $\frac{x}{x+1}-1=-\frac{1}{x+1}$

بما أن $-\frac{1}{x+1}\le 0$ فإن $\frac{x}{x+1}-1\le 0$

إذن $(1)\ldots\ldots\frac{x}{x+1}\le 1$

ولدينا $\frac{1}{2}-\frac{x}{x+1}=\frac{1-x}{2(x+1)}$

بما أن $\frac{1-x}{2(x+1)}\le 0$ فإن $\frac{1}{2}-\frac{x}{x+1}\le 0$

إذن $(2)\ldots\ldots\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+1}$

من (1) و (2) نجد: $\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+1}\le 1$

2) لدينا: $\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+1}\le 1$ عندئذ: $\frac{\sqrt{x}}{2}\le\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\le\sqrt{x}$

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right)=+\infty$

لدينا: $\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+1}\le 1$ عندئذ: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\right)=0$

تمرين 27:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $|f(x)+2| \le \dfrac{4}{x^2}$

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

الـحـل:

بما أن $|f(x)+2| \le \dfrac{4}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)+2| = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)+2\right) = 0$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

تمرين 28:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x^2+3x-4$

1) أحسب $f(1)$ ثم حلل $f(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

2) نضع $D = [0;1[\cup]1;2]$.

أثبت أنه من أجل كل x من D ، يوجد عدد حقيقي موجب k يحقق: $|f(x)| \le k|x-1|$

3) استنتج مما سبق أن: $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$.

الـحـل:

1) $f(1) = 0$.

بما أن $f(1)=0$ فإن $f(x) = (ax+b)(x-1)$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

$f(x) = (ax+b)(x-1)$

عندئذ: $f(x) = ax^2+(b-a)x-b$ .... (1)

$f(x) = x^2+3x-4$ .... (2)

من (1) و (2) نجد: $a=1$ و $b-a=3$ و $-b=-4$

إذن $a=1$ و $b=4$ عندئذ $f(x) = (x+4)(x-1)$

2) من أجل كل x من D ، لدينا: $|f(x)| = |x+4|\times|x-1|$

$x \in [0;1[\cup]1;2]$ معناه $(x+4) \in [4;5[\cup]5;6]$

أي $|x+4| \le 6$

ومنه $|x+4|\times|x-1| \le 6|x-1|$

إذن $|f(x)| \le 6|x-1|$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي موجب k حيث $k=6$ يحقق: $|f(x)| \le k|x-1|$

3) بما أن $|f(x)| \le 6|x-1|$ و $\lim\limits_{x\to1} 6|x-1| = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to1} |f(x)| = 0$

إذن $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$

تمرين 29:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=x^2-2x-1$

1) نضع $D=[2;3[\cup]3;4]$.

أثبت أنه من أجل كل x من D، يوجد عدد حقيقي موجب k يحقق: $|f(x)-2|\leq k|x-3|$

2) استنتج مما سبق: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

الحل:

1) من أجل كل x من D، لدينا: $|f(x)-2|=|x^2-2x-3|$

أي $|f(x)-2|=|x+1|\times|x-3|$

$x\in[2;3[\cup]3;4]$ معناه $(x+1)\in[3;4[\cup]4;5]$

أي $|x+1|\leq 5$

ومنه $|x+1|\times|x-3|\leq 5|x-3|$

إذن $|f(x)-2|\leq 5|x-3|$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي موجب k حيث $k=5$ يحقق: $|f(x)-2|\leq k|x-3|$

2) بما أن $|f(x)-2|\leq 5|x-3|$ و $\lim\limits_{x\to 3} 5|x-3|=0$

فإن $\lim\limits_{x\to 3}|f(x)-2|=0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

تمرين 30:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-2)^2\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$: $|f(x)|\leq(x-2)^2$

2) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$.

الحل:

1) من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$، لدينا: $\left|\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)\right|\leq 1$

ومنه $(x-2)^2\left|\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)\right|\leq(x-2)^2$

وبالتالي $\left|(x-2)^2\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)\right|\leq(x-2)^2$

إذن $|f(x)|\leq(x-2)^2$

2) بما أن $|f(x)|\leq(x-2)^2$ و $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$

فإن $\lim\limits_{x\to 2}|f(x)|=0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

تمرين 31: باستعمال المرافق، أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ 　　 3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ 　　 4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2}$

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq -4$ و $x \neq 0$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

إذن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \dfrac{1}{4}$

2) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq -3$ و $x \neq 1$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$$

إذن $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{1}{4}$

3) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq -2$ و $x \neq 2$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)}$$

إذن $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{4}$

4) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \leq \frac{5}{2}$ و $x \neq -2$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2} = \frac{(\sqrt{5-2x}-3)(\sqrt{5-2x}+3)}{(x+2)(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$= \frac{5-2x-9}{(x+2)(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$= \frac{-2(x+2)}{(x+2)(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2} = -\frac{2}{(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2} = \lim_{x \to -2} \left(-\frac{2}{(\sqrt{5-2x}+3)}\right)$$

إذن $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2} = -\frac{1}{3}$

تمرين 32: حول النهايات التالية إلى نهايات عند الصفر،ثم أحسبها.

1) $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ **2)** $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

الحل:

1) نضع $x+1=t$ ومنه $x+2=t+1$

إذا كان x يؤول إلى -1 فإن t يؤول إلى 0

ومنه $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+1}-1}{t}$

من أجل كل عدد حقيقي t حيث $t \geq -1$ و $t \neq 0$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{t+1}-1}{t} = \frac{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}{t(\sqrt{t+1}+1)}$$

$$= \frac{t+1-1}{t(\sqrt{t+1}+1)}$$

$$= \frac{t}{t(\sqrt{t+1}+1)}$$

$$\frac{\sqrt{t+1}-1}{t} = \frac{1}{\sqrt{t+1}+1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+1}-1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t+1}+1}$$

إذن $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \frac{1}{2}$

2) نضع $x-5=t$ ومنه $x-1=t+4$

إذا كان x يؤول إلى 5 فإن t يؤول إلى 0

ومنه $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+4}-2}{t}$

من أجل كل عدد حقيقي t حيث $t \geq -4$ و $t \neq 0$، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{t+4}-2}{t} = \frac{(\sqrt{t+4}-2)(\sqrt{t+4}+2)}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$

$$= \frac{t+4-4}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$

$$= \frac{t}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{t+4}-2}{t} = \frac{1}{\sqrt{t+4}+2}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+4}-2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t+4}+2}$$

إذن $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$

تمرين 33:

أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

الحـل:

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، لدينا:

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\frac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$=\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$=\frac{2\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$=\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=1$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=1$

تمرين 34:

لتكن f الدالة المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' هي دالتها المشتقة.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dots$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $\dots$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

نقبل أن الدالة f معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

حيث a ، b و c أعـداد حقيقية.

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c.

2) بالإستعـانة بجدول التغيرات ، بين أن: $a=1$، $b=-3$ ، $c=1$.

3) أتـمـم جـدول التغيرات بـتعـييـن النـهـايـات المنقوصة .

4) بين أن المنحنى (C_f) الممثل للـدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-3$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) أدرس وضعـية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستـقيم (D).

6) عـين، فـي $\mathbb{R}$،عــدد حلول المعادلة $f(x)=m$ حيث m عدد حقيقي معطى.

الحـل:

1) حساب $f'(x)$ بدلالة a و c:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2 ، لدينا : $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-2)^2}$

ومنـــه $f'(x)=\dfrac{a(x-2)^2-c}{(x-2)^2}$

$$=\dfrac{a(x^2-4x+4)-c}{(x-2)^2}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{ax^2-4ax+4a-c}{(x-2)^2}$

2) من جدول التغيرات ، نلاحظ أن : $f(1)=-3$ ، $f(3)=1$ ، $f'(1)=0$

$f(1)=-3$ يعني $a+b-c=-3$

$f(3)=1$ يعني $3a+b+c=1$

$f'(1)=0$ يعني $a-c=0$ أي $a=c$

لديـنا: $a+b-c=-3$ ومنه $c+b-c=-3$ ومنه $b=-3$

$3a+b+c=1$ ومنه $3c-3+c=1$ ومنه $c=1$

وبما أن $a=c$ فإن $a=1$

إذن $a=1$ ، $b=-3$ ، $c=1$ عنـــدئـذ $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

3) إتـمام جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$ 1 2	2 3 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 −	− 0 +
$f(x)$	$-\infty$ ↗ -3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1 ↗ $+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=0$

$\lim[f(x)-(x-3)]=\lim\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=0$ أي $\lim[f(x)-(x-3)]=0$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

إذن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y = x-3$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) $f(x)-(x-3) = \dfrac{1}{x-2}$:

إذا كان $x > 2$ فإن $x-2 > 0$ ومنه $f(x)-(x-3) > 0$

إذن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (D) على المجال $]2;+\infty[$.

إذا كان $x < 2$ فإن $x-2 < 0$ ومنه $f(x)-(x-3) < 0$

إذن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty;2[$.

6) تعيين عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ في $\mathbb{R}$:

- إذا كان $m < -3$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.
- إذا كان $m = -3$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.
- إذا كان $-3 < m < 1$ فإن المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.
- إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.
- إذا كان $m > 1$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

تمرين 35:

لتكن f الدالة المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' هي دالتها المشتقة.

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dots$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$\dots$ ↘	3	↗	$+\infty$

نقبل أن الدالة f معرفة على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ بـ: $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية.

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c.

2) بالإستعانة بجدول التغيرات ، بين أن: $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=1$.

3) أتمم جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة .

4) بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y = x-2$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

6) عين، في $\mathbb{R}$، عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث m عدد حقيقي معطى.

الحل:

1) حساب $f'(x)$ بدلالة a و c:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 ، لدينا : $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-3)^2}$

$$=\frac{a(x-3)^2-c}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{a(x^2-6x+9)-c}{(x-3)^2}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{ax^2-6ax+9a-c}{(x-3)^2}$

2) من جدول التغيرات ، نلاحظ أن : $f(2)=-1$ ، $f(4)=3$ ، $f'(2)=0$

$f(2)=-1$ يعني $2a+b-c=-1$

$f(4)=3$ يعني $4a+b+c=3$

$f'(2)=0$ يعني $a-c=0$ أي $a=c$

لديـنا: $2a+b-c=-1$ ومنه $2c+b-c=-1$

ومنه $b+c=-1$

$4a+b+c=3$ ومنه $4a-1=3$ ومنه $a=1$

وبما أن $a=c$ فإن $c=1$

$b+c=-1$ ومنه $b=-1-c$ ومنه $b=-2$

إذن $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=1$ عـنـدئـذ $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x-3}$

3) إتمام جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-2+\dfrac{1}{x-3}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\left(x-2+\dfrac{1}{x-3}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-3}\right)$$ ومنه $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$$

إذن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-2$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) : $f(x)-(x-2)=\dfrac{1}{x-3}$

إذا كان $x>3$ فإن $x-3>0$ ومنه $f(x)-(x-2)>0$

إذن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (D) على المجال $]3;+\infty[$.

إذا كان $x<3$ فإن $x-3<0$ ومنه $f(x)-(x-2)<0$

إذن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty;3[$.

6) تعيين عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ في $\mathbb{R}$

- ❖ إذا كان $m<-1$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $m=-1$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $-1<m<3$ فإن المعادلة $f(x)=m$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $m=3$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $m>3$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

تمرين 36:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بجدولي تغيراتهما كما يلي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-4	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	2	↘	-2	↗	0

أحسب مايلي:

1) $(gof)(0)$

2) $(fog)(1)$

3) $\lim_{x\to-\infty}(fog)(x)$

4) $\lim(gof)(x)$

$x \to +\infty$

(5 $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \times g)(x)$

الحل:

(1 $(gof)(0) = g[f(0)]$

بما أن $f(0) = 0$ و $g(0) = 1$ فإن $(gof)(0) = 1$

(2 $(fog)(1) = f[g(1)]$

بما أن $g(1) = 2$ و $f(2) = -4$ فإن $(fog)(1) = -4$

(3 $\lim\limits_{x \to -\infty} (fog)(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f[g(x)]$

بما أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} (fog)(x) = +\infty$

(4 $\lim\limits_{x \to +\infty} (gof)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g[f(x)]$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (gof)(x) = 0$

(5 $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \times g)(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \times g)(x) = -\infty$