

# مجلة الرائد في الرياضيات

\*\*\*\*\*

تمارين الاحتمالات في البكالوريا  
بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

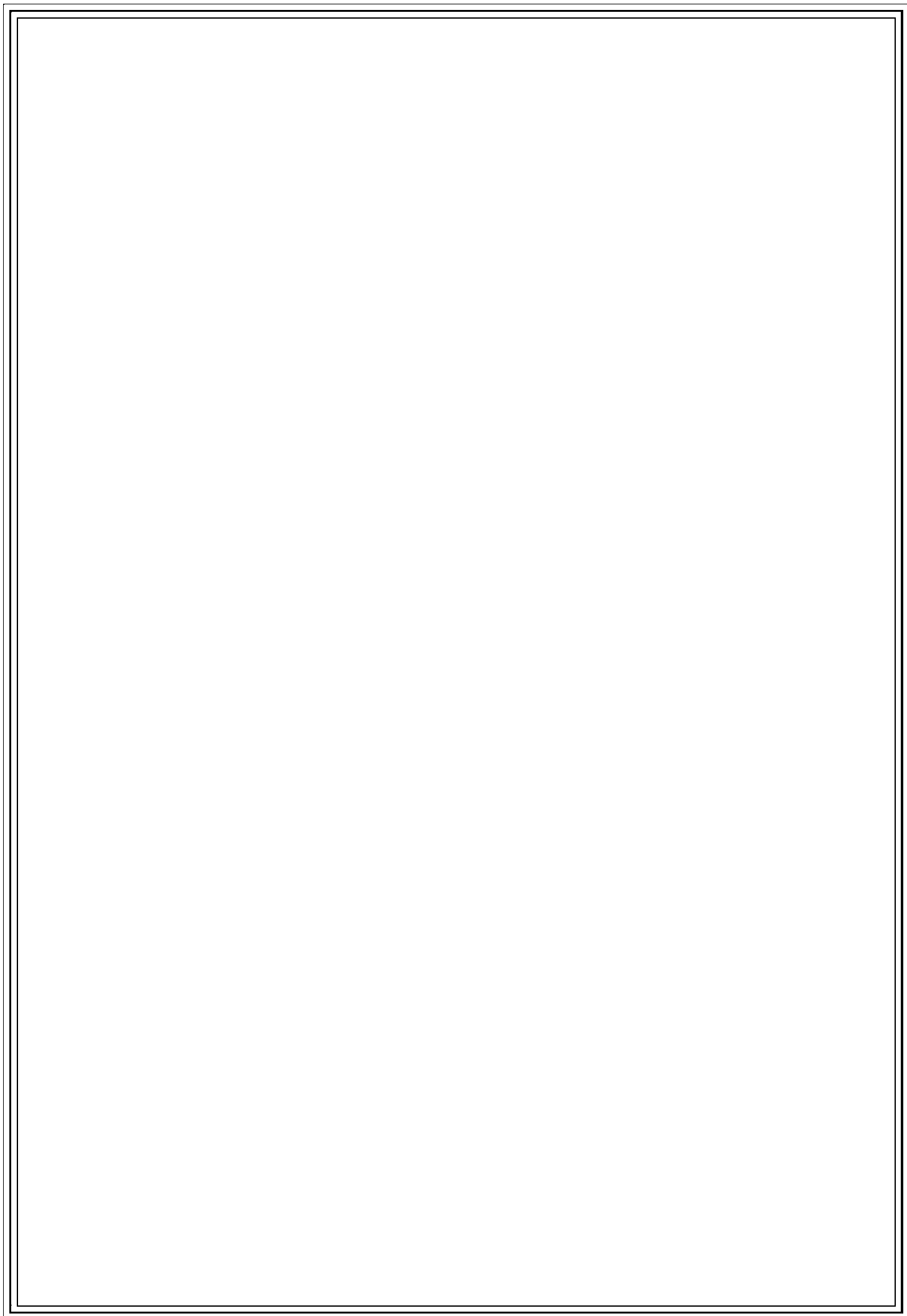


إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

[larbibelabidi@gmail.com](mailto:larbibelabidi@gmail.com)

العربي الجزائري Facebook

2018-2017



# مجلة الرائد في الرياضيات

\*\*\*\*\*

## تمارين الاحتمالات في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول : تمارين على التحليل التوفيقى

الجزء الثاني : تمارين البكالوريا الجزائرية

الشعب: تسيير واقتصاد+علوم تجريبية+رياضيات

(1)المواضيع ، (2)الحلول(المجلة المرفقة)

الجزء الثالث:تمارين بكالوريات النظام القديم

(1)المواضيع ، (2)الحلول(المجلة المرفقة)

الجزء الرابع:تمارين البكالوريات الاجنبية

(1)المواضيع ، (2)الحلول(المجلة المرفقة)

الجزء الخامس:تمارين مقترحة

\*\*\*\*\*

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

[larbibelabidi@gmail.com](mailto:larbibelabidi@gmail.com)

العربي الجزائري Facebook

2018-2017

## الجزء الأول: تمارين التحليل التوافقي

### التمرين 01:

يحتوي كيس على 18 كرة منها 4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و6 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 6 و 8 كرات خضراء مرقمة من 1 إلى 8.

1. نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد. ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:  
أ) 3 أرقام فردية ب) كرة حمراء على الأقل ج) كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4
2. نحسب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي بحيث نعيد في كل مرة الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي. ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:  
أ) 3 أرقام فردية ب) كرة حمراء على الأقل ج) كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4

### التمرين 02:

اشترى احد التلاميذ المجتهدين 3 كتب للرياضيات وكتابين للفيزياء وأربعة كتب للأدب العربي ثم أراد أن يضعهم على رف مكتبته فما هو عدد الطرق الممكنة لتحقيق ذلك إذا:  
أ) أراد وضع الكتب ذات نفس المادة متجاورة  
ب) كتب الأدب العربي فقط متجاورة . ج) دون شرط .

### التمرين 03:

في مركز أبحاث يراد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء مختارين من بين 6 باحثين و 4 باحثات.  
1) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟  
2) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها في الظروف التالية:  
أ) الأعضاء الأربعة المختارين باحثات؟  
ب) من بين الأعضاء المختارين توجد باحثة واحدة فقط؟  
ج) من بين الأعضاء المختارين توجد على الأقل باحثة.  
د) من بين الأعضاء المختارين يوجد على الأكثر باحثان  
3) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها إذا كانت هذه اللجنة تضم رئيسا ونائبا له و كاتيين

### التمرين 04:

- 1/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  
$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$
- 2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  
$$2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] = \frac{(2n)!}{n!}$$

## التمرين 05:

$n$  عدد طبيعي غير معدوم . نضع :  $L_n = 9C_{n+1}^2 + 27C_{n+1}^3 + 81C_{n+1}^4 + \dots + 3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

1/ بيّن أن :  $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2/ نضع :  $S_n = L_1 + L_2 + \dots + L_n$  ، احسب  $S_n$  بدلالة  $n$

## التمرين 06:

1/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :

$$2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] = \frac{(2n)!}{n!}$$

## التمرين 07:

يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء . نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد . ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

أ) كرة بيضاء ؟ ب) كرة بيضاء على الأقل ؟ ج) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

2) نضيف إلى الصندوق  $n$  كرة سوداء و  $n$  كرة بيضاء و نعتبر  $X_n$  عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن  $X_n = n^2 + 9n + 21 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب) كم نضيف من كرة حتى يكون  $X_n = 10713$

## التمرين 08:

1/  $n$  عدد طبيعي ، اثبت أن :  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

2/  $n$  و  $m$  عددان طبيعيان حيث :  $n \geq m$

أ- أثبت أن :  $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

ب- استنتج قيمة مبسطة للمجموع  $S$  حيث :  $S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

## التمرين 09:

ليكن المنشور التالي  $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$

1) أكتب الحد الذي درجته 10 . 2) أوجد معامل الحد التاسع . 3) أوجد الحد الثابت

## الجزء الثاني: تمارين البكالوريات

### شعبة تسيير واقتصاد

التمرين 10: دورة 2016 م 1

الجدول التالي يعطي توزيع 500 تلميذ في إحدى الثانويات

التلميذ	ذكور	إناث
يملك هاتف نقال	60	240
لا يملك هاتف نقال	120	80

نختار عشوائيا تلميذا من الثانوية ونسمي  $H$  الحادثة " التلميذ المختار ذكرا"، و  $F$  الحادثة " التلميذ المختار أنثى" و  $S$  الحادثة " التلميذ يملك هاتف نقالا" و  $\bar{S}$  الحادثة " التلميذ لا يملك هاتف نقالا" (1) شكّل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة.

(2) احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) التلميذ المختار أنثى و تملك هاتف نقالا.

ب) التلميذ المختار لا يملك هاتف نقالا.

ج) نفرض أن التلميذ المختار لا يملك هاتف نقالا. ما هو احتمال ان يكون ذكرا؟.

التمرين 11: دورة 2016 م 1

الشجرة المقابلة تمنذج تجربة عشوائية حيث  $A$  و  $B$  حادثان.  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  حادثاتهما العكسيتان على التوالي

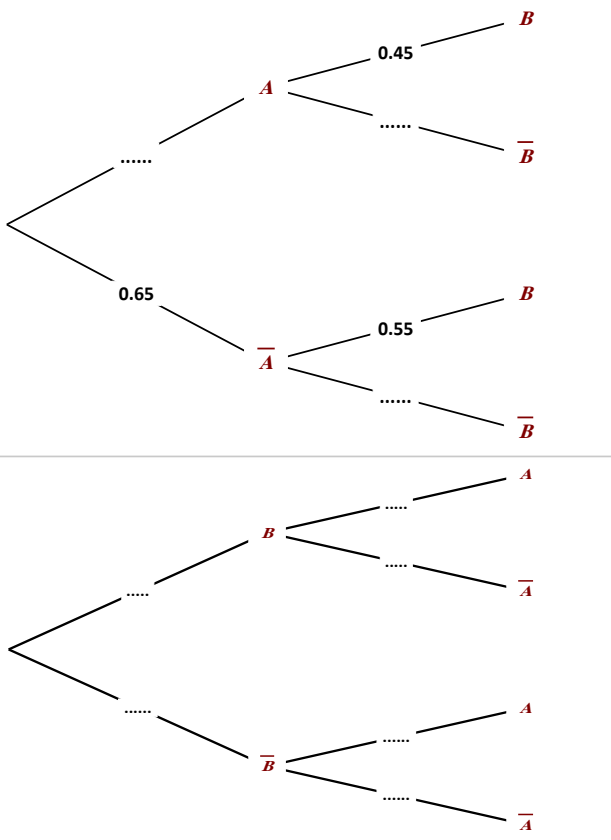
(1) أنقل وأكمل الشجرة المقابلة ثم احسب

الاحتمالات الآتية:  $P(A \cap \bar{B})$  و  $P(A \cap B)$

(2-أ) احسب الاحتمالات الآتية:

$P_B(A)$  و  $P_{\bar{B}}(A)$  و  $P(B)$

ب) انقل وأكمل الشجرة المقابلة.



## التمرين 12: دورة 2017 م 1

في كل حالة من الحالات الآتية ، اقترحت ثلاث اجابات صحيحة واحدة فقط صحيحة عين الاقتراح الصحيح مع التبرير .

1) A و B حادثتان مستقلتان . إذا كان  $P(A \cap B) = 0,03$  و  $P(A) = 0,4$  فإن:

أ)  $P(B) = 0,43$  ، ب)  $P(B) = 0,075$  ، ج)  $P(B) = 0,37$

2) A و B حادثتان . إذا كان  $P(A \cap B) = \frac{3}{100}$  و  $P_A(B) = \frac{1}{4}$  فإن:

أ)  $P(A) = \frac{3}{25}$  ، ب)  $P(A) = \frac{4}{25}$  ، ج)  $P(A) = \frac{3}{400}$

3) A و B حادثتان . إذا كان  $P(A) = 0,4$  و  $P(B) = 0,5$  و  $P(\overline{A \cup B}) = 0,55$  فإن:

أ)  $P(A \cap B) = 0,2$  ، ب)  $P(A \cap B) = 0,45$  ، ج)  $P(A \cap B) = 0,9$

4) الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية .

$x_i$	-2	-1	$\alpha$	3
$P(X = x_i)$	0,12	0,50	$\beta$	0,30

قيمتا  $\alpha$  و  $\beta$  حتى يكون الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي 0,32 هما:

أ)  $\alpha = 1$  و  $\beta = 0,08$  ، ب)  $\alpha = 2$  و  $\beta = 0,03$  ، ج)  $\alpha = 2$  و  $\beta = 0,08$

## التمرين 13: دورة 2017 م 2

يستقبل مركز إجراء امتحان شهادة البكالوريا مترشحين موزعين على ثلاث شعب هي: شعبة الآداب والفلسفة (L)، شعبة العلوم التجريبية (S) و شعبة التسيير والاقتصاد (G) 47 % من المترشحين ذكور (M) والباقي اناث (F).

من بين الذكور 35 % في شعبة العلوم التجريبية و 49 % في الآداب والفلسفة

من بين الإناث يوجد 10 % في شعبة التسيير والاقتصاد و 37 % في شعبة العلوم التجريبية نختار عشوائيا مترشحا من هذا المركز .

1) انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .

2) احسب احتمال كل حادثة ممايلي:

A " المترشح المختار أنثى و من شعبة التسيير والاقتصاد"

B " المترشح المختار من شعبة التسيير والاقتصاد"

C " المترشح المختار أنثى علما انه من شعبة التسيير والاقتصاد"

## التمرين 14: دورة 2016 م 1

وكالة تجارية تقترح على زبائنها ثلاث وجهات A ، B و C

20 % من الزبائن اختاروا الوجهة A و 50 % اختاروا الوجهة A والباقي اختاروا الوجهة C

عند العودة من السفر اجرت الوكالة استجوابا حول مدى اعجابهم بالوجهة واستنتجت ما يلي:  
 50 % من اصحاب الوجهة A كانوا معجبين بها.  
 30 % من اصحاب الوجهة B كانوا معجبين بها.  
 80 % من اصحاب الوجهة C كانوا معجبين بها.

فختار عشوائيا أحد الزبائن ونسجل الحوادث التالية:

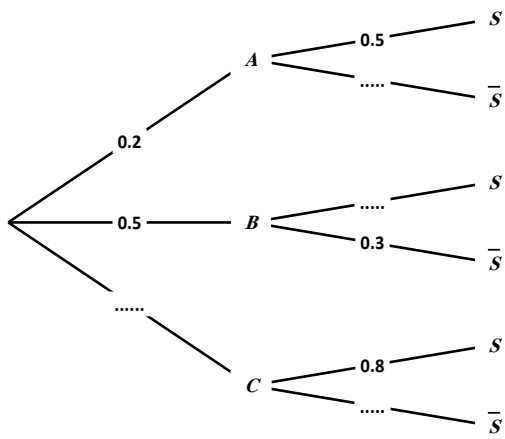
S: الزبون معجب بالوجهة المختارة  $\bar{S}$ : الزبون غير معجب بالوجهة المختارة .  
 (1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكمل القيم الناقصة.

(2) -أ) احسب احتمال الحوادث التالية:

$$C \cap S \text{ و } B \cap S, A \cap S$$

(ب) استنتج احتمال ان يكون الزبون معجب بالوجهة المختارة.

(3) نستوجب زبونا غير معجب بالوجهة المختارة ،  
 ما احتمال ان يكون من الوجهة B؟



### التمرين 15: دورة 2012 م 1 بتصرف

عدد تلاميذ قسم دراسي هو 35 من بينهم 15 بنتا، يختار كل تلميذ من القسم رياضة واحد  
 وواحدة فقط يمارسها في إطار نشاطات النادي للمؤسسة . 75 % من الأولاد اختاروا ممارسة كرة  
 القدم و 15 % اختاروا ممارسة كرة اليد بينما اختار 10 % ممارسة الكرة الطائرة. 60 % من  
 البنات اخترن ممارسة الطائرة والبقية اخترن ممارسة كرة اليد.

لتمثيل هذا القسم في منافسة رياضية ، يتم اختيار تلميذ واحد منه بطريقة عشوائية.

يرمز G للحادثة "التلميذ المختار ولد" و يرمز F للحادثة "التلميذ المختار بنت"

يرمز T للحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة القدم"

يرمز M للحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة اليد"

يرمز T للحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة القدم"

يرمز V للحادثة "التلميذ المختار يمارس الكرة الطائرة"

(1) انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .

(2) أحسب  $P(V)$  احتمال ان تتحقق الحادثة V.

(3) احسب الاحتمال الشرطي  $P_V(G)$ .

(4) احسب احتمال ان يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم

### التمرين 16: دورة 2013 م 1



في رف من رفوف مكتبة "ثانوية النجاح" ، يوجد 150 كتاب رياضيات و50 كتاب فلسفة ، حيث % 40 من كتب الرياضيات و % 70 من كتب الفلسفة تخص شعبة التسيير والاقتصاد. فختار عشوائيا من الرف كتابا واحدا. عيّن مع التبرير، الجواب الصحيح الوحيد من بين الأجوبة المقترحة: في كل حالة من الحالات التالية:

1) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات هو: أ)  $\frac{3}{4}$  ، ب)  $\frac{2}{5}$  ، ج)  $\frac{1}{150}$

2) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

أ) 0,24 ، ب) 0,475 ، ج) 0,21

3) احتمال أن يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد

أ) 0,15 ، ب) 0,4 ، ج) 0,3

4) إذا كان الكتاب المختار يخص شعبة التسيير والاقتصاد، فإن احتمال أن يكون كتاب رياضيات

هو: أ)  $\frac{2}{75}$  ، ب)  $\frac{12}{19}$  ، ج)  $\frac{3}{10}$

### التمرين 17: دورة 2008

يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء وتحمل الارقام -2 ، 1 ، 2،

و 4 كرات حمراء تحمل الارقام 2 ، 2 ، 1 ، 1

1) نسحب كرة واحدة من الكيس .

أ) ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 ؟.

ب) إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 ما هو احتمال ان يكون لونها أحمر؟.

2) نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون إرجاع.

أ) ما هو احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منهما رقما فرديا؟

ب) ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

ج) ما هو احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 ؟.

## شعبة: الرياضيات وعلوم تجريبية

### التمرين 18: دورة 2009 رياضيات

- كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و6 حمراء .  
نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.  
أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.  
ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.  
2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.  
-عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضي  $E(X)$ .

### التمرين 19: دورة 2008 رياضيات نموذج وزارتي مقترح

- يحتوي كيس على 12 كرة منها : 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 , 1 , 2 ,  
و 4 حمراء تحمل الأرقام 1 , 1 , 2 , 2 و 5 خضراء تحمل الأرقام 1 , 2 , 2 , 2 , 3 .  
نسحب عشوائيا، وفي آن واحد، كرتين من الكيس .  
1- نعتبر الحادثتين :  $A$  : " سحب كرتين من نفس اللون " .  
 $B$  : " سحب كرة خضراء على الأقل "  
أ- احسب احتمال كل حادثة من الحوادث :  $A \cap B$  ,  $B$  ,  $A$   
ب- هل الحادثتان  $B$  ,  $A$  مستقلتان ؟  
2- ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين.  
أ- أعط قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  .  
ب- احسب الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي  $X$  .  
ج- احسب التباين  $Var(X)$ ، واستنتج الانحراف المعياري  $\sigma(X)$

### التمرين 20: دورة 2008 ع تجريبية نموذج وزارتي

- يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء، و 7 كريات سوداء، لا نفرّق بينها عند اللمس.  
1. يسحب لاعب، عشوائيا، 3 كريات في آن واحد.  
أ- احسب احتمالات الحوادث التالية:  
 $A$  : " يسحب اللاعب كرية بيضاء واحدة فقط " .  
 $B$  : " يسحب اللاعب كرتين بيضاوين فقط " .  
 $C$  : " يسحب اللاعب 3 كريات بيضاء " .

ب- يربح اللّاعب 10 دنانير من أجل كلّ كرية بيضاء مسحوبة و ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرق بكلّ سحب، مجموع الرّبح المحصّل عليه.  
 عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$ ، واحسب أمله الرياضي  
 2. يسحب اللّاعب كرية من الكيس، فإذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء، يربح اللّاعب 10 دنانير، ويتوقّف اللعب، بينما إذا كانت الكرية المسحوبة سوداء، يُعيد اللّاعب الكرية المسحوبة إلى الكيس، ويسحب كرية أخرى في نفس الظروف.  
 تتكرّر العملية، ويتوقّف اللّعب تلقائيًا عند السّحب الثالث.  
 احسب احتمالات الحوادث التالية:

$D$  : " يربح اللّاعب في السّحب الأوّل "

$E$  : " يربح اللّاعب في السّحب الثاني "

$F$  : " يربح اللّاعب في السّحب الثالث "

$G$  : " لا يربح اللّاعب أيّ شيء "

### التمرين 21 دورة 2008 نموذج وزارتي مقترح

كيس  $U$  يحتوي على 4 قريصات بيضاء، و 3 سوداء و كيس آخر  $U'$  يحتوي على 17 قريصة بيضاء و 18 قريصة سوداء.

نرمي زهرة نرد متجانسة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6، فإذا ظهر الرقم 6 نسحب قريصة من الكيس  $U$  وإلا فنسحب قريصة من الكيس  $U'$ .

1. برهن أن احتمال سحب قريصة بيضاء هو 0,5.

2. إذا سحبنا قريصة بيضاء، فما احتمال أن تكون من الكيس  $U$ .

## الجزء الثالث: بكالوريات النظام القديم

### التمرين 22: دورة 2002 ع ط

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها:  
3 حمراء ، 3 خضراء و 4 بيضاء .

(1) نسحب من هذا الكيس ثلاث كرات في آن واحد . ما احتمال الحصول على :  
أ - نفس اللون ؟ ، ب - الألوان الثلاثة ؟ ، ج - كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟  
(2) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ - ما هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ؟  
ب - احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  .

### التمرين 23: دورة 2003 ع ط

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخرى تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فاثنتان منها تحملان الرقم 2 والأخرى تحملان الرقم 3 .  
نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد ، ونحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما .  
(1) ما هو احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 ؟  
(2) ما هو احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين ؟ .  
(3) نعرف المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .  
ما هي قيم المتغير العشوائي  $X$  ؟ .  
أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  واحسب أمله الرياضي .

### التمرين 24: دورة 1996 ع ط

زهرة نرد مكعبة  $A$  لها وجه يحمل الرقم 1 ، ووجهان يحملان الرقم 2 وثلاثة أوجه تحمل الرقم 3  
زهرة نرد مكعبة  $B$  لها وجه يحمل الرقم 1 ووجهان يحملان الرقم 2 ووجه يحمل الرقم 3  
ووجهان يحملان الرقم 4  
نفرض ان كل الأوجه في كل من المكعبين لها نفس حظوظ الظهور . نرمي الزهرتين في آن واحد ما احتمال أن يكون الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين :  
(أ) زوجيين ، (ب) فرديين .

### التمرين 25: دورة 1997 ع ط

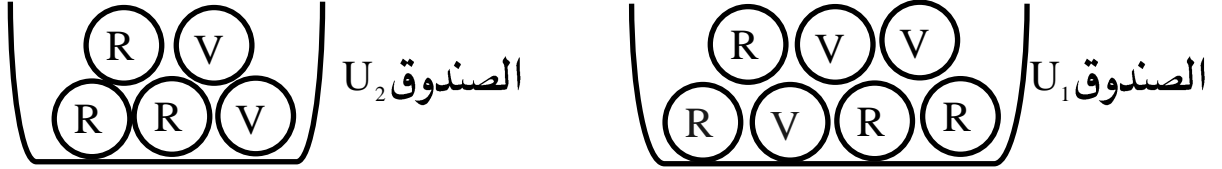
يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10 (لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) .  
نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الإحتمال .

- 1) أحسب عدد السحبات الممكنة .
  - 2) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها زوجية .
  - 3) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها أعداد أولية .
  - 4) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم كل واحدة منها عدد غير أولي .
  - 5) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم أحداها على الأقل عدد أولي .
- تعطى كل النتائج على شكل كسور غير قابلة للإختزال ثم تعطى كل واحدة منها مقربة إلى  $\frac{1}{100}$  بالتقاص .

## الجزء الرابع: بكالوريات اجنبية

### التمرين 26: المغرب 2015 ع ت

يحتوي صندوق  $U_1$  على 7 كرات: 4 حمراء و 3 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس).  
و يحتوي صندوق  $U_2$  على 5 كرات: 3 حمراء و 2 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس).



(I) نعتبر التجربة التالية: نسحب وعشوائيا 3 كرات من الصندوق  $U_1$ .

ليكن A الحادث " الحصول على كرة حمراء واحدة وكرتين خضراوين"  
و ليكن B الحادث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

$$\text{بيّن أن } P(A) = \frac{12}{35} \text{ و } P(B) = \frac{1}{7} \text{ وأن } P(B) = \frac{1}{7}$$

(II) نعتبر التجربة التالية: نسحب وعشوائيا كرتين من  $U_1$  ثم نسحب كرة واحدة من  $U_2$ .

ليكن C الحادث " الحصول على 3 كرات حمراء ". بيّن أن:  $P(C) = \frac{6}{25}$

### التمرين 27: المغرب 2003 ع ت

يحتوي كيس على 6 كرات بيضاء تحمل الأعداد 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 2  
و كرتين سوادين تحملان العددين 0 و 1 (لا يمكن التمييز بينها باللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس .

(1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A " للكرتين نفس اللون " ، B " جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين منعدم "

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع العددين المسجلين على الكرتين

المسحوبتين ، حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

### التمرين 28: المغرب 2003 ع ت الاستراكية

يحتوي كيس على 6 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل الأعداد -2 و -1 و 0 و 1 و 1 و 2

نعتبر الاختبار التالي : نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس!

نعتبر ، بعد القيام بهذا الاختبار ، الحدثين التاليين :

A: " من بين الكرات المسحوبة ، توجد كرة على الأقل تحمل العدد 1 "

S، "مجموع الاعداد المكتوبة على الكرات المحوبة منعدم".

أ) أحسب احتمال الحدث A. ب) بيّن أن احتمال الحدث S يساوي  $\frac{1}{5}$

## التمرين 29: المغرب 2004 ع ت

يحتوي كيس على 9 بيديات (لا يمكن التمييز بينها باللمس).  
بيدقتان بيضاوين تحملان الرقم 1 وثلاثة بيديات حمراء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 وأربع بيديات سوداء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 و 2.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيديات من الكيس .

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A: "البيديات الثلاث المسحوبة مختلفة اللون (بيدقة من كل لون)"

B: "البيديات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم".

C: "من بين البيديات المسحوبة توجد على الأقل بيدقة واحدة حمراء"

(2) أحسب احتمال الحدث:  $A \cap B$ .

## التمرين 30: المغرب 2006 ع ت

يحتوي كيس  $U_1$  على 5 بيديات : ثلاث منها تحمل الرقم 2 وبيدقتان تحملان الرقم 3.  
ويحتوي كيس ثاني  $U_2$  صندوق على 5 بيديات : ثلاث منها بيضاء واثنان حمراوين (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) نسحب عشوائيا بيدقة واحدة من الكيس  $U_1$  ونسجل رقمها، ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد  $n$  كرة من الكيس  $U_2$  بحيث  $n$  هو الرقم الذي تحمله البيدقة المسحوبة من الكيس  $U_1$ .

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيديات الحمراء المسحوبة .

(1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$ .

(2) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$ .

## التمرين 31: المغرب 2007 ع ت

يحتوي كيس 7 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الاعداد: -1، 0، 1، 1 و 1.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من هذا الكيس. لتكن الحوادث الآتية:

A: "لا توجد أية كرة من الكرات المسحوبة تحمل العدد 0".

B: "سحب 3 كرات تحمل أعداد مختلفة مثنى مثنى .

C: "مجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة معدوم .

(1) احسب  $P(A)$  و  $P(B)$ . (2) بيّن أن  $P(C) = \frac{2}{7}$ .

## التمرين 32: تونس 2007 ش ر

يحتوي كيس على 4 زهرات نرد لا نفرق بينها عند اللمس ، منها:

- 3 زهرات نرد خضراء تحمل أوجه كل منها الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 .  
 وزهرة نرد حمراء تحمل أوجهها الأرقام 2، 2، 4، 4، 6، 6 .  
 (1) نسحب عشوائياً زهرة نرد من الكيس .أحسب احتمال الحادثتين الآتيتين :  
 A: "الزهرة المسحوبة حمراء" . B : "الزهرة المسحوبة خضراء" .  
 (2) نسحب عشوائياً زهرة نرد من الكيس ثم نرميها ثلاث مرات متتابة .  
 نسمي C الحادثة : "الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات متتابة" .  
 أ-  $P(C/A) = 1$  و  $P(C/B) = \frac{1}{8}$  . أستنتج  $P(C)$  .

- (3) نفرض أن الزهرة المسحوبة خضراء . ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية من الرميات الثلاثة السابقة عدد الأوجه التي تحمل رقما زوجيا .  
 أ- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .  
 ب- احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

### التمرين 33: ES:2008 Metropole

- تحتوي قاعة مخصصة لأجهزة الكمبيوتر بإحدى الثانويات على 200 جهاز كمبيوتر منها:  
 \* 30 تعتبر كأجهزة جديدة  
 \* 90 تعتبر كأجهزة جديدة.  
 \* باقي الأجهزة تعتبر كأجهزة قديمة .  
 بينت دراسة إحصائية أن:  
 • 5 % من الأجهزة الجديدة بها عجز (عطب).  
 • 10 % من الأجهزة الحديثة بها عجز (عطب).  
 • 20 % من الأجهزة القديمة بها عجز (عطب).  
 نختار ، عشوائياً ، جهاز من بين 200 جهاز كمبيوتر. نعتبر الحوادث الآتية :  
 N: "الجهاز جديد" و R: "الجهاز حديث" و A: "الجهاز قديم" و D: "الجهاز به عجز".  
 (1) أنشئ الشجرة المتوازنة لترجمة هذه الوضعية.  
 (2) احسب احتمال أن يكون الجهاز المختار به عجز يساوي 0.1325





## الجزء الخامس: تمارين مقترحة

### التمرين 34:

- تأهل إلى أولمبياد الرياضيات من دول المغرب العربي 25 تلميذا. 3 تلاميذ و 5 تلميذات من المغرب  
4 تلاميذ و تلميذتين من الجزائر تلميذين و 4 تلميذات من تونس و تلميذين و 3 تلميذات من ليبيا  
I 1) نريد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء من هذه المجموعة  
أ) ما هو احتمال أن تضم اللجنة 4 تلميذات ؟  
ب) ما هو احتمال أن تضم اللجنة 4 أعضاء من نفس الدولة؟  
ج) ما هو احتمال أن تضم اللجنة على الأقل عضوين من ليبيا؟  
2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد التلاميذ الذكور المتواجدين فيها.  
أ) أوجد قيم المتغير العشوائي X.  
ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

### التمرين 35: جامعة التكوين المتواصل 1995

- تبين من مجموعة 12 شخصا أن 5 منهم يشاهدون التلفزيون فقط و 4 يستمعون للمذياع فقط و 3  
يشاهدون التلفزيون ويستمعون للمذياع معا.  
أ- نختار 3 أشخاص بطريقة عشوائية من هذه المجموعة.  
\* عين احتمال لكي الأشخاص الثلاثة يشاهدون التلفزيون فقط  
\* عين احتمال لكي يوجد شخص واحد على الأقل يستمع للمذياع فقط من بين الأشخاص الثلاثة  
ب- نختار شخصا واحدا وتبين أنه يشاهد التلفزيون فقط فما هو احتمال أنه يستمع للمذياع فقط.  
ج - نختار شخصين ونهتم بالمتغير العشوائي بعدد الأشخاص اللذين يشاهدون التلفزيون  
ويستمعون للمذياع معا من بين الشخصين المختارين .  
عين فيم المتغير العشوائي ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضي.

### التمرين 36:

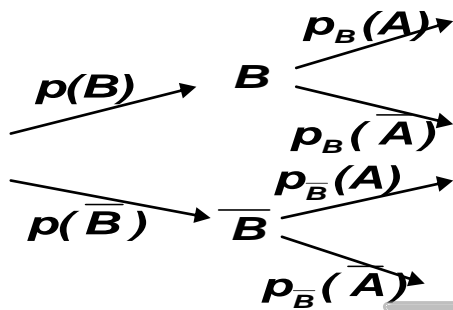
- يحتوي كيس U على 4 قريصات بيضاء و 3 سوداء و يحتوي كيس U على 17 قريصة بيضاء و 18  
سوداء كل القريصات لا تميز بينها عند اللمس.  
نرمي زهرة نرد متجانسة اوجهها مرقمة من 1 إلى 6 فإذا ظهر الرقم 6 نسحب قريصة من  
الكيس U وإلا فنسحب قريصة من الكيس U.  
لتكن الحادثتان : A سحب قريصة بيضاء و B سحب قريصة رقمها 6 .  
1) شكل شجرة الاحتمالات ، 2) احسب الاحتمالات الظاهرة على الشجرة .  
3) استنتج حساب احتمال ان تكون القريصة المسحوبة بيضاء.

### التمرين 37:

يحتوي كيس على 14 قريصة: 4 قريصات تحمل الحرف م و 3 قريصات تحمل الحرف د و 3 قريصات تحمل الحرف ي و قريصتان تحملان الحرف ن و قريصتان تحملان الحرف ة  
 نسحب في آن واحد 5 قريصات بلا اختيار (الإمكانيات متساوية الاحتمال)  
 1) ما هو الاحتمال لكي تكون الحروف التي تحملها القريصات المسحوبة هي حروف كلمة "مدينة"  
 2) ما هو الاحتمال لكي لا يحمل كل من القريصات المسحوبة الحرف م؟  
 3) ما هو الاحتمال لكي تحمل إحدى القريصات المسحوبة على الأقل الحرف م؟  
 4) ما هو الاحتمال لكي تحمل اثنتان من بين القريصات المسحوبة على الأقل الحرف م؟  
 تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال ثم تعطى قيمها المقربة إلى  $\frac{1-100}{100}$  بالزيادة

### التمرين 38:

نعتبر صندوقين أحدهما  $U_1$  يحوي 5 كرات خضراء و 3 كرات حمراء و الآخر  $U_2$  يحوي 3 كرات خضراء و 6 كرات حمراء . كل الكرات لا نميز بينها باللمس .  
 ترمي حجر نرد مكعب غير مزور ، مرقم من 1 الى 6 . إذا تحصلنا على أحد الرقمين 5 أو 6  
 نسحب كرة عشوائيا من الصندوق  $U_1$  و في الحالات الأخرى نسحب كرة من الصندوق  $U_2$   
 نسمي A الحادثة "الكرة المسحوبة خضراء" و نسمي الحادثة B "نحصل على أحد الرقمين 5 أو 6"



1) أحسب  $p(B)$  و  $p(\bar{B})$

2) أحسب  $p_B(A)$  و استنتج  $p_B(\bar{A})$

3) أحسب  $p_{\bar{B}}(A)$  و استنتج  $p_{\bar{B}}(\bar{A})$

4) أكمل الشجرة بالقيم العددية المحصل عليها

5) استنتج  $p(A)$

### التمرين 39:

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء . إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخرى  
 تحملان الرقم 5. أما القريصات الحمراء ، فاثنتان منها تحملان الرقم 2 والأخرى تحملان الرقم 3.  
 نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد. ونحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما  
 1) ما هو احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6؟  
 2) ما هو احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين المسحوبتين بيضاوان؟  
 3) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.  
 - ما هي قيم المتغير العشوائي X؟  
 - أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي.

### التمرين 40:

(I I)  $c_1$  و  $c_2$  حجران نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب  $c_1$  الأعداد:  $0, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

وتحمل أوجه المكعب  $c_2$  الأعداد:  $0, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهريين على الوجهين العلويين لـ  $c_1$  و  $c_2$ .  
نرمز لهذين العددين بـ  $\alpha$  و  $\beta$ .

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد  $\sin(\alpha + \beta)$ .

(1) ماهي القيم الممكنة للمتغير  $X$ ؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول).

(2) عيّن قانون احتمال  $X$ .

(3) احسب الأمل الرياضي  $E(X)$  والانحراف المعياري  $\sigma(x)$  للمتغير العشوائي  $X$ .

(II) نجري الآن اللعبة الآتية: يربح شخص ما  $100 DA$  عندما يرمي حجري النرد ويتحصل على

$\sin(\alpha + \beta) = 1$  أو  $\sin(\alpha + \beta) = -1$ ، ويخسر  $50 DA$  في باقي الحالات.

(1) ليكن  $Y$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة.

(1) عيّن قانون احتمال  $Y$ .

(2) نرمي حجري النرد 5 مرات. ما هو الاحتمال أن يربح اللاعب  $300 DA$ ؟

### التمرين 41:

صندوق به 8 كرات بيضاء و  $n$  كرة سوداء ( $n \geq 2$ ). نفرض أن سحب كرة بيضاء يعطي ربح نقطة وسحب كرة سوداء يفقد نقطتين.  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النقط المحصل عليها.

I/ نسحب من هذا الكيس كرتين على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي

(1) عيّن قيم المتغير العشوائي  $X$ . (2) عيّن قانون الاحتمال

(3) احسب الأمل الرياضي  $E(x)$  ثم عيّن العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $E(X) = 0$

II/ نفرض الآن  $n = 6$ . نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد

(1) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ ، (2) احسب أمله الرياضي.

### التمرين 42:

طالب في قسم هائي علوم تجريبية أو رياضيات أو تقني رياضي يعير نفس الاهتمام للمواد العلمية أو الأدبية. فإذا كان احتمال نجاحه في اختبار المواد العلمية في امتحان البكالوريا  $\frac{1}{3}$  واحتمال نجاحه في باقي المواد هو  $\frac{1}{4}$ .

1- احسب احتمال نجاحه في امتحان البكالوريا.

2- ما هو احتمال نجاحه في المواد العلمية علماً أنه حصل على البكالوريا؟